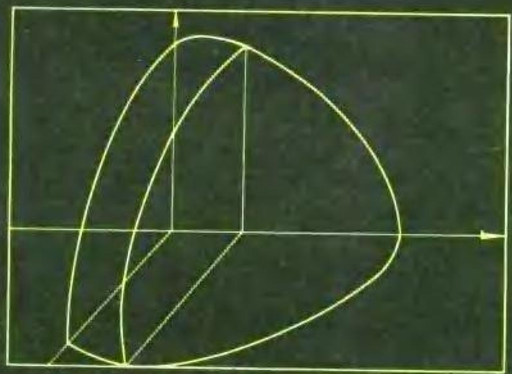
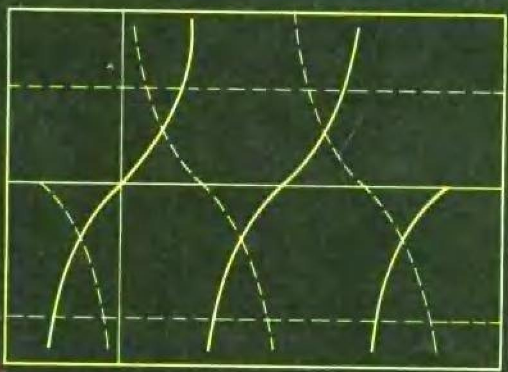


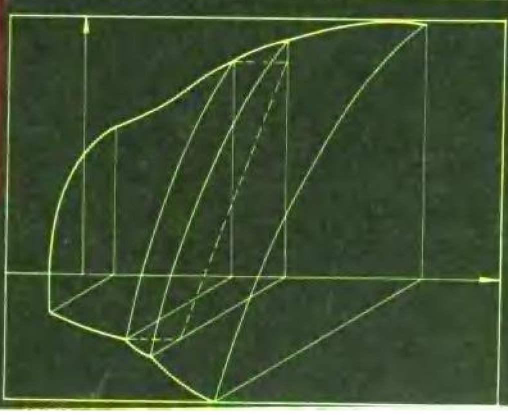
陳頤昌
陳繼昌 編著

萬里書店出版

微積分學初階



CALCULUS



微積分學初階

陳頤昌　陳繼昌編著

香港萬里書店出版

微積分學初階

陳頤昌　陳繼昌編著

出版者：萬里書店有限公司
香港北角英皇道486號三樓
電話：5-632411 & 5-632412

承印者：海　擎　印　刷　廠
柴灣新安街四號15樓B座

定　價：港　幣　十　二　元

（一九七九年五月印刷）

前　言

近年來，人們對待數學的態度似乎有所改變。學習數學，不再過份着重解决艱澀的、抽象的難題，而越來越着重實用方面。換句話說，將數學視作鍛鍊思考的訓練的人，不及將之作爲實用工具的人那麽多了。

微積分學正是一門極有用的工具知識。近年來，微積分不僅像傳統那樣，先應用於工程學、物理學、化學方面；而在工商業、經濟學、醫學、社會科學等等也都派上用場。

本書初稿早於1974年 6 月完成。編寫宗旨在對科學、工程、數學等方面有興趣的中學同學和在職青年等提供學習微積分學基礎知識。全書分爲八章。先將函數、極限、函數的連續性、微分、導數等作扼要的介紹，從而引進微分技巧和導數的應用。積分方面，也先從基本概念開始作簡要介紹，接着討論積分方法以及定積分的應用。最末一章簡單介紹無窮級數。此外有關實用價值極高的微分方程的初步認識和應用的資料，也網羅在內。

全書共編進了二十九個習題。今年夏天，編者再花了不少時間將習題重新編整；在質方面多選一些實用性的問題，並蒐集工商業方面應用的課題；在量方面，作了適量的增加。重編過程當

中，題目經過演算而將答案刋印於書末。希望這點能使學習者獲得更大信心，大家不妨先自計算，然後翻至書末檢驗，比較答案。這點對自修者來說，希望是一個小小幫忙。

由於編者水平所限，書中誤謬之處自所難免。希望高明不吝指正，俾再版時作爲更正的南針。

編　者

1977 年夏天

目　次

第 1 章　基本概念

1. 集 與 子 集

集 (Set) 是數學裏最原始的概念之一，所以不需用更簡單的概念去給它定義。舉例來說，課室裏的學生組成一個集，銀行裏的人員組成一個集，太陽系的行星組成一個集，下列的英文字母 A、B、C、D 也組成一個集。我們也可以用下面的同義字去代替“集”這一術語：“全體”、“聚合”（Aggregate）、“系”、“複元”等等。組成集的事物我們稱作集的元素 (Elements)。任何集的一部份我們稱它爲子集 (Subset)。一個沒有元素的集叫作空集(Empty set)。在上面舉出的第四個例子中，英文字母A、B、C、D 是這個集的元素，而 ABC，或 BCD，或 AB 則是組成這個集的子集。

2. 對 應 和 函 數

對應 （Correspondence）也是最簡單概念之一。現在我們也舉例解釋。我們可使正方形的邊長與它的面積對應，或半徑的長

與圓的面積對應。意思就是說。給出正方形的邊長或圓形的半徑，我們有一定的規則來計算它們的面積。所以每一個邊長或半徑的值都對應於從這個值計算出來的面積。如果稱全部邊長值組成的集爲 M，計算出來的面積所組成的集爲 N， 則對於第一個集的每一個元素 x 我們有一個規律使它對應於第二個集的一個元素 y。在數學裏，我們說這個規律建立了一個從 M 集到 N 集的函數（function）。通常我們用下面的記號代表函數:

$y=f(x)$。其中 y 是 N 的元素， x 是 M 的元素。第一個集M叫做函數的定義域 （Domain of definition），它的元素叫做變數值。第二個集 N 我們叫做值域， 它的元素 y 我們叫做函數值。從此可見，一個函數可從下面三點確定:

1)．變數值的集合（即定義域）M。

2)．函數值的集合（即值域）N。

3)．定義域和值域之間的對應規律。例如給出一個正方形的邊長（一個M集的元素），我們計算它的平方便可得到它所對應的面積(一個 N 集的元素)。這個命令“計算它的平方”， 便是這個函數的對應規律了。在一般情形下，M 集和 N 集都是實數集，即函數是定義和取值於實數集上 （Set of Real Numbers)。這在下面討論初等函數時便會遇到了。

每一個變數值在習慣上又叫原像，對應的函數值則叫像(Image)。所以，集 M 的每一個元素對應於一個像含於集合 N。所有函數值的集合叫作實數值集合的像。我們通常用“寫像”(Mapping) 這個同意義的術語去代替“函數”這一名詞。同時討論兩個或多個函數的時候我們就用不同的記號去代表不同的函數。

所以，除了用 $f(x)$ 外，我們還可利用下面的記號。

$\varphi(x)$，$\psi(x)$，或 $f_1(x)$，$f_2(x)$，……，φ_1，$(x)\varphi_2(x)$……等等。自然我們也可用任意別的記號來代表函數，如 (x)，$\alpha(x)$，$\Xi(x)$……等等。

在研究別的自然科學時，函數的概念也很重要。例如，自由落體所經過的距離依附於運動開始所需的時間。更確切一點，我們說，自由落體所經的距離是運動時間的函數；擺 (Pendulum) 的振動的週期是擺長的函數；或者說付與某一已知貨物的價值是該貨物的量的函數。

3. 函數的圖象

現在我們討論一下上面提過的特殊情形，那就是函數域和定義域都是實變數的情形。這時候，假若給出一個實變數的集合 M，又對於 M 的每一個元素 X，我們都能使其對應於一個確定的實變數 y，那 y 就是 x 的函數。由上述我們知道這種函數可由下面二要點確定：

1). 變數值的集合。

2). 函數的對應規律。

上面所討論的例子中，每一個變數值只對應一個函數值。這種函數我們稱爲單值函數 (Single valued functions)。在複雜一點的情形下，一個變數值可能對應很多個函數值，這種函數我們

稱爲多値函數 (Multi-valued functions)。

【例】 若 M 集是 0 與 1 之間所有的實數，則 $y=x^2$ 是一單値函數，它的定義域和値域都是 M 集本身。若 M 集是 1 與負 1 之間所有的實數，則 $y=\arcsin x$ 是一多値函數，它的定義域是 M 而它的値域則是一個更大的集。

對於定義和取値於實數的函數我們有一個很簡單的方法來表示，那就是笛卡兒座標 (Cartesian coordinates) 的圖象法。我們先取兩個數軸 X 和 Y 來表示函數的定義域和値域。一般來說，這兩數軸的方位是可以隨意的，但最常用的方法是使這兩軸相互垂直。橫的一條我們就稱爲X-軸或橫軸，通常是用來表示函數的定義域。縱的一條稱作 Y-軸或縱軸，通常是用來表示函數的値

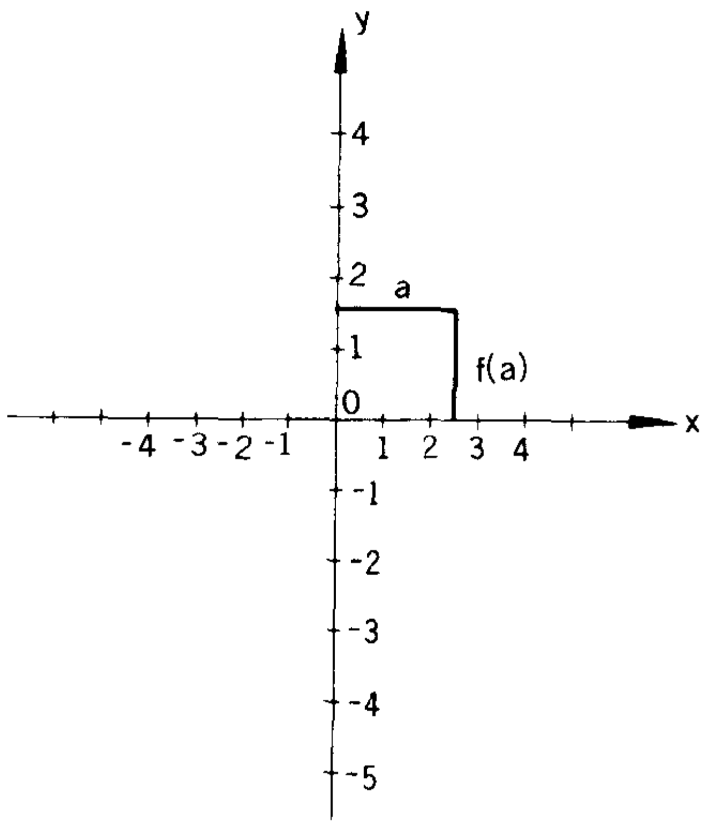
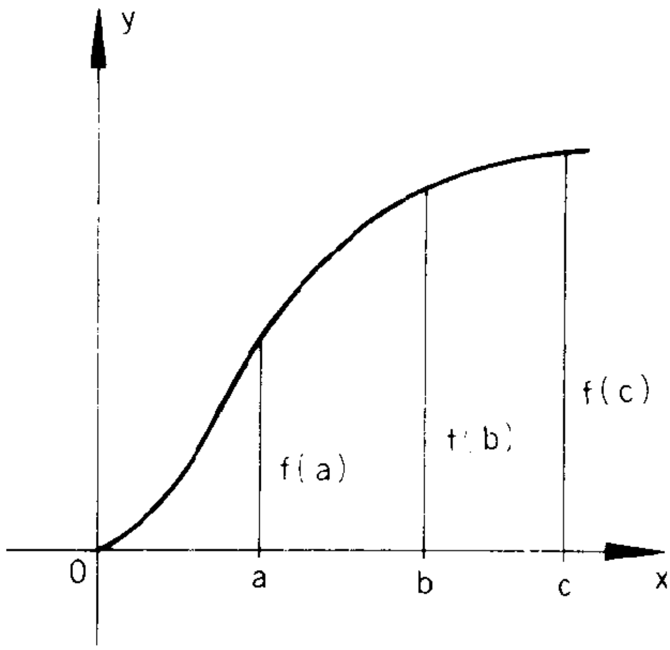


圖 1

域。X-軸和 Y- 軸交於原點。選軸之後，我們便用一個適當的長度作單位在 X-軸上表示出實數的位置，正的在原點之右，負的在原點之左。同樣，我們在 Y-軸上表示實數的位置，正的在原點之上方，負的在原點之下方。當然，Y- 軸和 X- 軸上的長度單位不需相同，如圖 1 所示。

我們把一個變數值（當然，它是屬於 M 集或函數定義域的）a 及其對應的函數值 f(a) 表示在平面上如上圖示。把同樣的手續重覆，直至對有足夠的點使我們可畫出一連續光滑的曲綫如圖 2 所示。

圖 2



4. 初等函數 (Elementary Functions)

在進行討論一些比較抽象的概念之前，我們先來認識一下一些常見的初等函數 (Elementary functions)。

a). **常數函數** (Constant functions)

這個函數的定義域是一個實數集 M，它的值域只有一個實數，所以M集裏的每一元素都對應於這個實數。在笛卡兒座標圖中，這種函數是用一直綫平行於 X 軸來表示，例如 $f(x)=2$，x 是任意一個實數。

b). **綫性函數** (Linear functions)

這種函數的對應規律如下:

$$y=mx+a$$

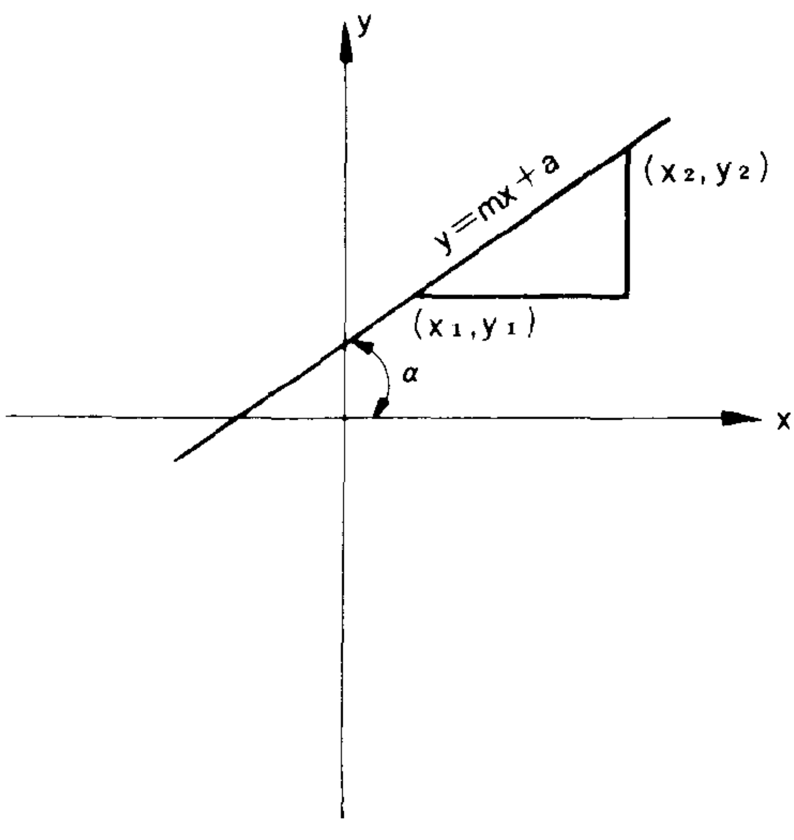


圖 3

其中 x 是定義域內的實數，與 a 是給出的實數。在笛卡兒座標圖中，這種函數的表示如圖 3。

常數 m 叫函數的斜率 (Slope)，如果它是零的話，這個函數便變成常數函數了。它可用下面的公式求出：

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

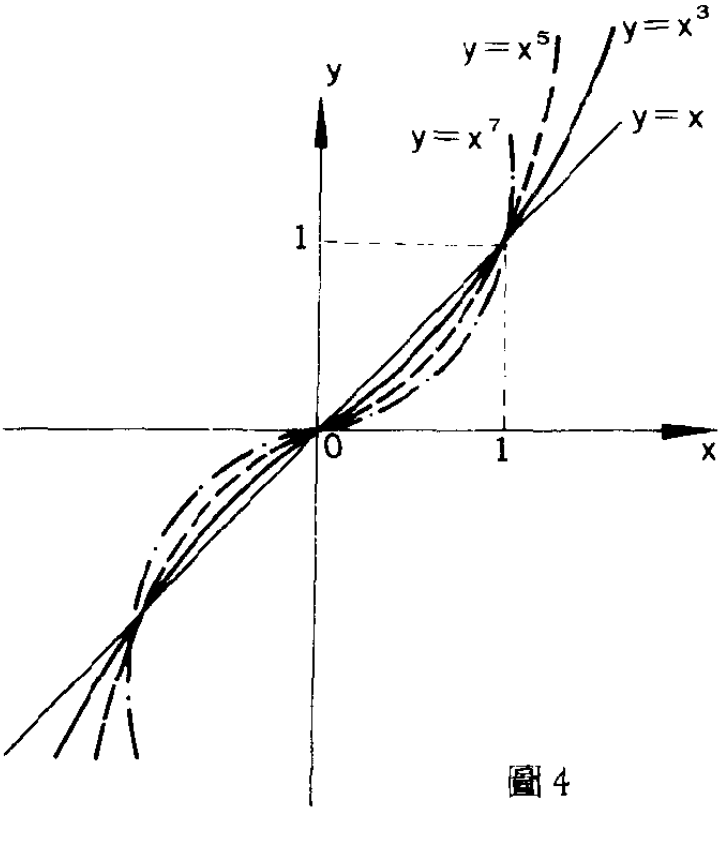
其中 (y_2, x_2) 與 (y_1, x_1) 是綫上的任何二點。

c). **冪函數** (Power functions)

這種函數的對應規律是：

$$y=x^n$$

其中 x 是定義域中的實數。$n=2, 3, \cdots\cdots$。在笛卡兒座標圖中，這種函數作如下的表達(見圖 4)：



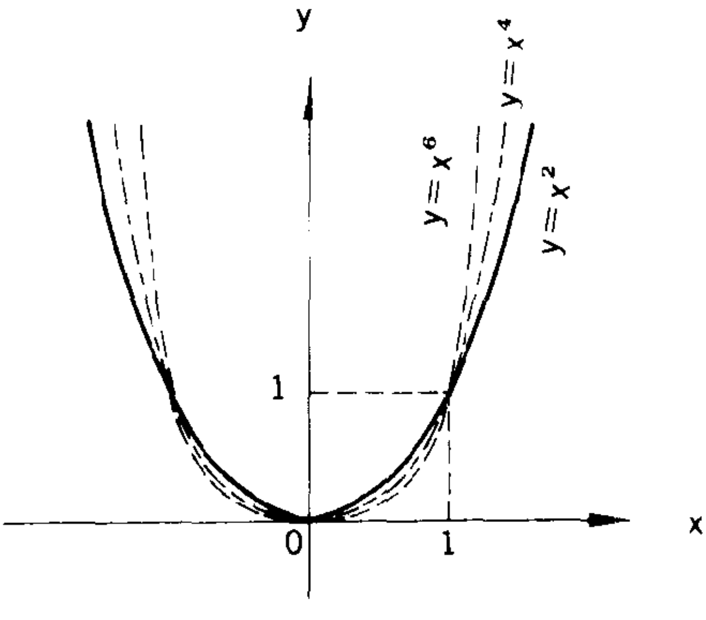


圖 4

n 若是0.1，這個函數便成爲曾討論過的常數函數和綫性函數了。

d）. **三角函數**（Trigonometric functions）

在所有的高等分析研究中，我們都用半徑角來測量角的大小。我們把要量的角的頂點放在一個半徑等於 1 的圓心內，角的大小便取决於被角的二邊從圓周上所截出的弧的長度，如圖 5 所示。所以，一個 180° 的角是和一個 π 半徑角的角一樣，一個 90° 的角是和一個 $\frac{\pi}{2}$ 半徑角的角一樣。反過來說，一個等於一半徑角的角用度數來表示是等於 $\frac{180^\circ}{\pi}=57^\circ, 17', 45''$。從今開始，每當

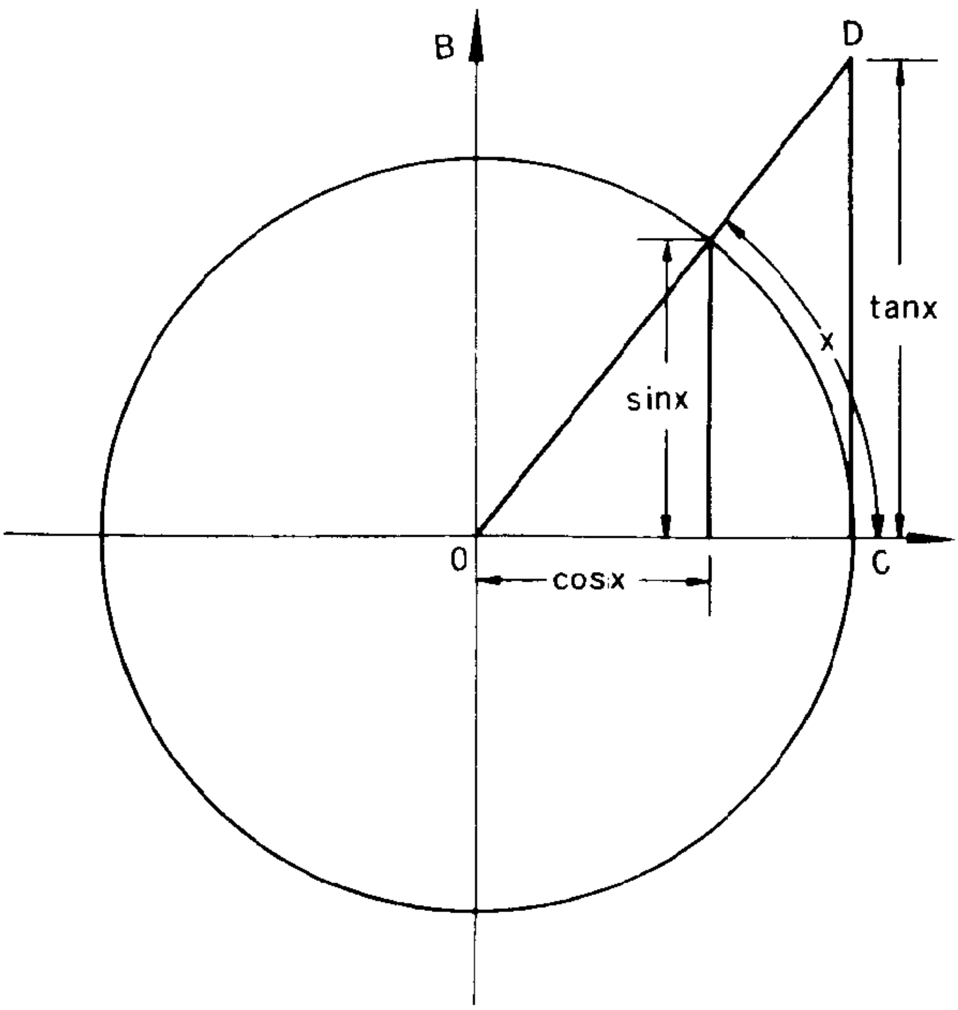


圖 5