高等数学

（下 册）

刘景麟 等编

河海大学出版

高等数学(下)

刘景麟等　编

河 海 大 学 出 版 社

责任编辑 龚 俊

高等数学(下)
刘景麟等 编

出版发行:河 海 大 学 出 版 社
(南京西康路1号,邮政编码:210024)
经 销:江 苏 省 新 华 书 店
印 刷:南 京 京 新 印 刷 厂
(地址:南京大桥北 邮政编码:210031)

开本 787×1092 毫米 1/16 印张 19.5 字数 499 千字
1996 年 12 月第 1 版 1996 年 12 月第 1 次印刷

印数 1—5000 册

ISBN7—5630—1002—5

O·62 定价:(上、下册)39.50 元

目　　录

第三篇　多元函数的微积分

第十二章　多元函数微分学

第一节　关于 R^n 的简单知识

实数或数轴 R 是我们讨论一元函数的基础，R^n 及其性质乃是讨论多元函数的基础。由于 R^2 与 R^3 有几何直观背景，所以以后的讨论多半是在它们中进行．但是所得到的结论对一般的 R^n 都是对的．

$$R^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in R, i = 1, \cdots, n\}$$

这就是代数里的 n 数组空间，它是一个 n 维线性空间．当 $n = 2$ 时，其几何图象是平面，当 $n = 3$ 时，其几何图象是空间．

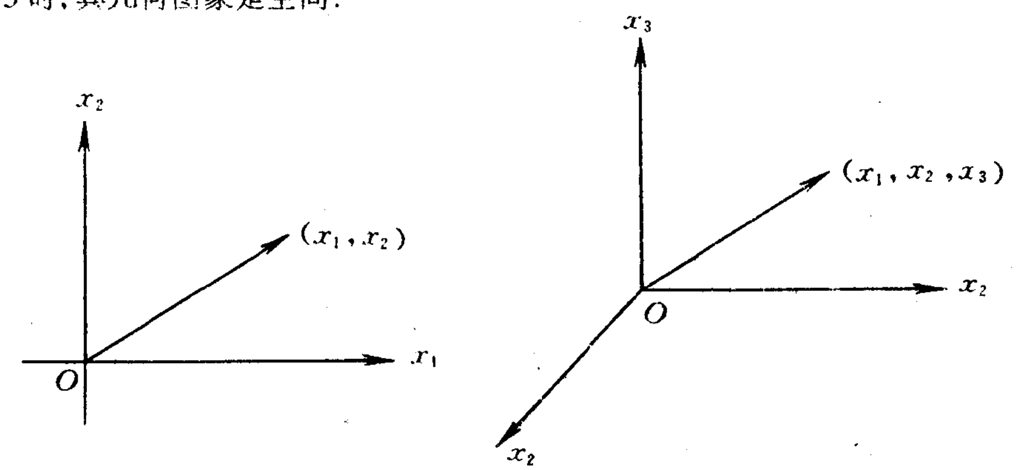


图 12 - 1

对于一般的 n，也可以设想其几何图象为

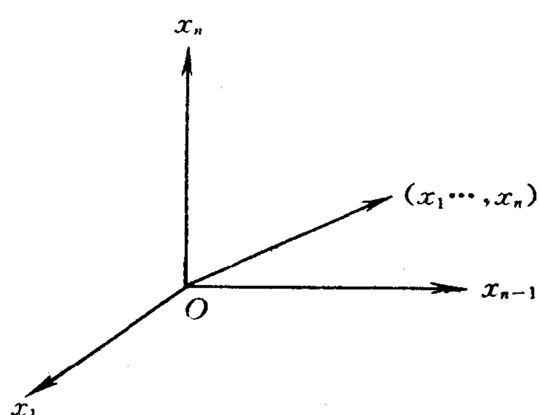


图 12 - 2

每个元素 $(x_1, \cdots, x_n)$ 可以看成是空间里的一个点，也可以认为是空间里的一个向量（以原点为起始点，以 $(x_1, \cdots, x_n)$ 为终点的一个向量）．

仿照解析几何里向量内积与长度的概念，可以定义

定义 1 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 的内积 (x,y) 是一个数,即

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

显然它是平面或空间向量内积的推广.容易验证 R^n 里的内积有以下简单性质:

① 对称性

$$(x,y)=(y,x);$$

② 双线性

$$(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z),$$
$$(x,\alpha y+\beta z)=\alpha(x,y)+\beta(x,z).$$

定义 2 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的长度 $\|x\|$ 是一个非负的数,即

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

它是解析几何里向量的长度的推广.显然

$$\|x\|=0\Leftrightarrow x=(0,\cdots,0)$$

在解析几何里我们知道

$$(x,y)=\|x\|\|y\|\cos\alpha.$$

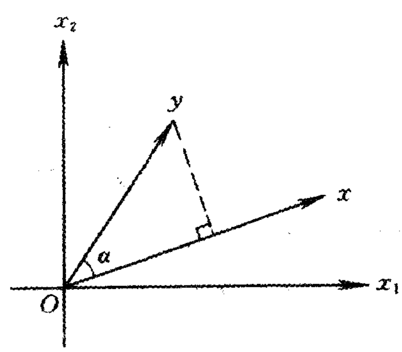


图 12－3

如果 x 是单位向量,(x,y) 就是向量 y 在向量 x 上的投影.

由上式可得

$$|(x,y)|\leqslant\|x\|\|y\|$$

推广到 R^n 里我们有

定理 1 (Cauchy－Schwarz 不等式)

$$|(x,y)|\leqslant\|x\|\|y\|.$$

证明:若 $y=0$,两边都为 0,这时等式成立.假定 $y\neq0$,对实数 t 有

$$0\leqslant\|x+ty\|^2=(x+ty,x+ty)=\|x\|^2+2t(x,y)+t^2\|y\|^2$$

由于 $\|y\|\neq0$,右边是一个 t 的二次三项式,因为它非负,其判别式 $\Delta\leqslant0$,即

$$4(x,y)^2-4\|x\|^2\|y\|^2\leqslant0$$
$$\therefore|(x,y)|\leqslant\|x\|\|y\|$$

将 Cauchy－Schwarz 不等式改写一下可得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

这是常用的一个著名不等式.

定理 2 （Minkowski 不等式或三角形不等式）

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

证明：

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2\\ &\leqslant \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2\\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

$$\therefore \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

如果 $n = 1$，则 Minkowski 不等式便变成

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

所以它是实数的三角形不等式的推广. Minkowski 不等式的变形是

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

这也是一个重要的不等式.

定义 3 两点 x、$y \in R^n$ 之间的距离是 $\|x-y\|$.

由于 $\|x-y\| = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$，当 $n = 3$ 时，这就是平常三维空间里两点间的距离.

由定理 2. 如果 x, y, z 是 R^n 里的三个点，则

$$\|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leqslant \|x-z\| + \|z-y\|$$

上面不等式的几何意思就是三角形的两边之和大于第三边.

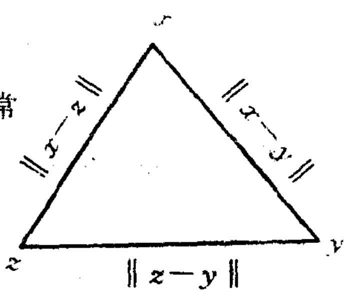


图 12 - 1

定义 4 点 $x_0 \in R^n$ 的一个 δ 邻域是以 x_0 为中心，δ 为半径的球

$$B(x_0, \delta) = \{x \mid \|x - x_0\| < \delta\}.$$

定义 5 点列 $\{x_m\} \subset R^n$ 称为趋于 $x_0 \in R^n$，如果

$$\lim_{m\to\infty}\|x_m - x_0\| = 0$$

我们记作 $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x_0$.

用 ε 语言来说，$\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x_0$ 即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists M$，当 $m \geqslant M$ 时便有

$$\|x_m - x_0\| < \varepsilon$$

几何上这意味着“对于任给的 x_0 的一个 ε 邻域，点列 $\{x_m\}$ 从某一个 x_M 开始，后面的点都在此 ε 邻域内. 所以点列 $\{x_m\}$ 是朝向点 x_0 凝聚的.

定理 3 设 $x_m = (x_{m1}, \cdots, x_{mn}) \in R^n$，$m = 1, 2, \cdots$；$x_0 = (x_{01}, \cdots, x_{0n}) \in R^n$，则 $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x_0$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{m\to\infty} x_{mi} = x_{0i}$，$i = 1, \cdots, n$.

这就是讲，在 R^n 里收敛就是按坐标收敛.

证明：

$\Rightarrow \because |x_{mi} - x_{oi}| \leqslant \|x_m - x_0\|$，$i = 1, \cdots, n$

$\Leftarrow$ $\forall \varepsilon > 0$，因为 $\lim\limits_{m\to\infty} x_{mi} = x_{oi}$，$i = 1, \cdots, n$，所以 $\exists M$，当 $m \geqslant M$ 时有

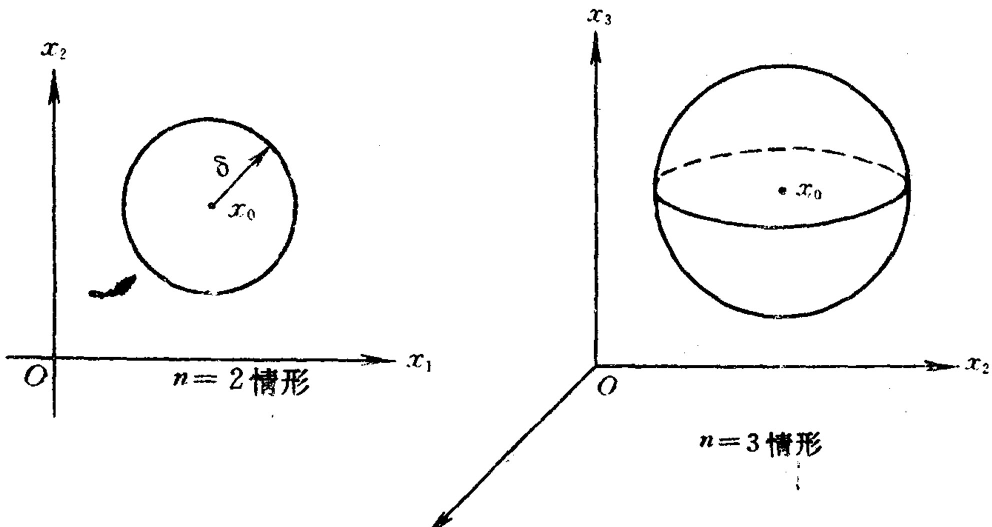


图 12 - 5

$$|x_{mi}-x_{oi}|<\frac{\varepsilon}{n},i=1,\cdots,n$$

于是当 $m\geqslant M$ 时

$$\|x_m-x_0\|=(\sum_{i=1}^{n}(x_{mi}-x_{oi})^2)^{\frac{1}{2}}<(\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon^2}{n^2})^{\frac{1}{2}}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\leqslant\varepsilon$$

$$\therefore\quad\lim_{m\to\infty}\|x_m-x_0\|=0.$$

推论 如果在 R^n 里 $\lim\limits_{m\to\infty}x_m=x_0$，$\lim\limits_{m\to\infty}y_m=y_0$，则

① $\lim\limits_{m\to\infty}(x_m+y_m)=x_0+y_0$；

② $\lim\limits_{m\to\infty}ax_m=ax_0,a\in R$；

③ $\lim\limits_{m\to\infty}(x_m,y_m)=(x_0,y_0)$.

下面考虑 R^n 里的集合，通常一个多元函数的定义域就是某个 R^n 里的集合.

定义 6 设 D 是 R^n 的一个点集，$x\in R^n$

① 如果存在点 x 的一个 δ 邻域 $B(x,\delta)$ 使得 $B(x,\delta)\subset D$，则称 x 是 D 的一个内点.

② 如果存在点 x 的一个 δ 邻域 $B(x,\delta)$ 使得 $B(x,\delta)\subset R^n\setminus D$，则称 x 是 D 的一个外点.

③ 如果点 x 的任一个 δ 邻域 $B(x,\delta)$ 都有

$$B(x,\delta)\cap D\neq\varnothing \text{ 与 } B(x,\delta)\cap(R^n\setminus D)\neq\varnothing$$

则称 x 是 D 的一个边界点.

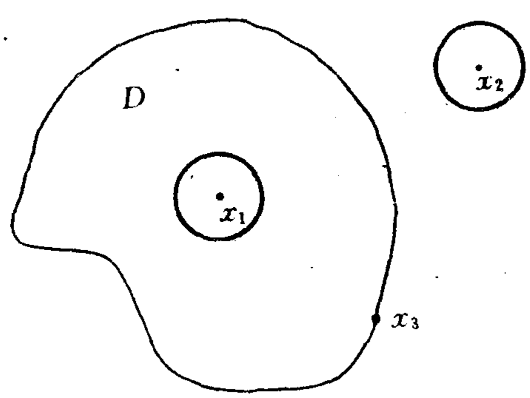


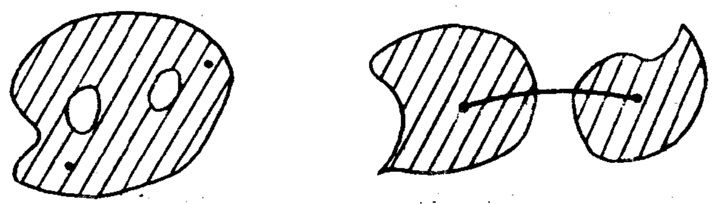
图 12 - 6

内点一定是 D 的点，外点一定不是 D 的点，边界点则可以在 D 中也可以不在 D 中.

定义 7 如果集合 D 的点都是 D 的内点，则称 D 为开集.

例 1 $D=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2<1\}$ 是 R^2 的一个开集，它的边界点集合是单位圆周 $\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2=1\}$.

定义 8 如果集合 D 里的任何两点都可以用一条完全在 D 内的连续曲线将它们连接起来，则称 D 是连通的集合.



连通的集合　　　非连通的集合

图 12－7

定义 9 连通的开集称为开区域

例 2 $D=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2<1\}$，$D_1=\{(x_1,x_2)\mid x_1>0,x_2>0,x_1+x_2<1\}$ 是 R^2 的开区域.

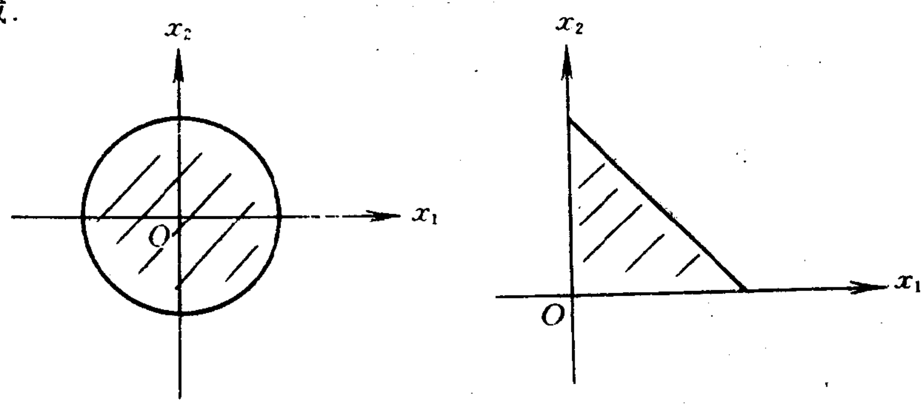


图 12－8

定义 10 开区域连同它的边界点在一起称为闭区域.

例 3 $D=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\leqslant 1\}$，$D_1=\{(x_1,x_2)\mid x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\}$ 都是 R^2 的闭区域.

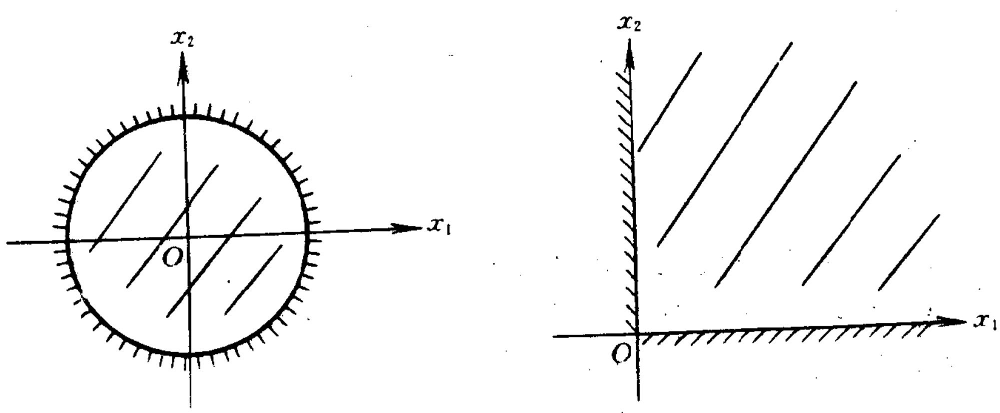


图 12－9

习 题 12-1

1. 证明 $|(x,y)| = \|x\| \|y\|$ 的充要条件是 x 与 y 线性相关.

2. 作出下列 R^2 中集合的图形并说明它们是什么集合:

①$\{(x_1,x_2) \mid x_1x_2 \neq 1\}$;

②$\{(x_1,x_2) \mid |x_1|+|x_2|<1\}$.

3. 作出下列 R^3 中集合的图形并说明它们是什么集合:

①$\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2+x_2^2 \leqslant x_3^2\}$;

②$\{(x_1,x_2,x_3) \mid 0 \leqslant x_3 \leqslant h, x_1^2+x_2^2 \leqslant x_3\}$.

第二节 多元函数的极限

一、多元函数的概念

下面我们讨论的主要是二元函数和三元函数.

定义 1 设 D 是平面 R^2 中的一个点集,如果对于任何点 $(x,y) \in D$,按一定的对应法则,都有唯一的一个实数 z 与之对应,则称 z 是 (x,y) 的函数,记作

$$z = f(x,y)$$

称 D 为函数 f 的定义域,记作 D_f,集合

$$R_f = \{f(x,y) \mid (x,y) \in D\}$$

称为函数 f 的值域.

类似的可以定义三元乃至 n 元函数.

为什么要研究多元函数呢?

1. 空间里有一些曲面的方程可以写成

$$z = f(x,y), (x,y) \in D.$$

例如 ① 上半球面

$$z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}, D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant a^2\};$$

② 椭圆抛物面

$$z = \frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}, p、q>0, D = R^2;$$

③ 双曲抛物面

$$z = \frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}, p、q>0, D = R^2.$$

2. 更重要的是自然界的现象常与时间、地点有关.所以它们的精确描述就必然要涉及到 x、y、z、t 的函数,x、y、z 是地点的直角坐标,t 表示时间.例如

① 随着地点与时间的不同,温度也不同,所以

$$T = T(x,y,z,t)$$

这是一个四元函数,在物理里称为温度场.

② 在原点放一个带正电的点电荷,它在空间任一点 $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ 产生一个电场强

度 $\vec{E}$，这是一个向量，它有三分量

$$(E_1(x,y,z),E_2(x,y,z),E_3(x,y,z))$$

这是三个三元函数.

③ 河里的水在每一点处的流速 $\vec{v}$ 随着点的不同和时间的不同而不同．$\vec{v}$ 的三个分量是

$$(P(x,y,z,t),\quad Q(x,y,z,t),\quad R(x,y,z,t))$$

这是三个四元函数．

二元函数 $z=f(x,y)$ 有简单的几何图象，我们可以把它看成是三维空间的一个曲面 Σ，其参数方程是

$$\begin{cases} x=x \\ y=y \\ z=f(x,y) \end{cases},\qquad (x,y)\in D$$

例 1　$z=\ln(x+y)$.

解：其定义域 $D=\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 是一个开区域，这是一张柱面（为什么）.

例 2　$z=\ln|x+y|$.

解：其定义域 $D=\{(x,y)\mid x+y\neq 0\}$ 是一个开集，它也是柱面.

例 3　$z=\arcsin(x^2+y^2)$.

解：其定义域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 是一个闭区域，这是一张旋转曲面，能想象出它的图象吗？

例 4　$z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\sqrt{4-x^2-y^2}$.

解：其定义域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是一个闭区域，这是一张什么样的曲面？

例 5　$z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}+\sqrt{4-x^2-y^2}$.

解：其定义域 $D=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是一个连通集.

二、二元函数的极限 —— 二重极限

设集合 D 为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域 $B(P_0,r)$（点 P_0 可能除外），$z=f(x,y)$ 在 D 上有定义. 我们来考虑当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 即 $x\to x_0,y\to y_0$ 时 $f(x,y)$ 的趋向问题.

定义 2　如果存在实数 A，使得对任给的 $\varepsilon>0$，都可以找到 $\delta>0$，点 $P(x,y)\in D$，只要满足

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

就有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

则称 A 是函数 f 当 $x\to x_0,y\to y_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

怎样求一个二重极限呢？这是一个带有一定难度和技巧性的问题. 通常有两种办法：① 利用不等式从定义出发去求；② 利用一元函数的极限去求. 下面来看几个实例．

例 6　求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

解:由于

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \leqslant |y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$$

所以 $\forall \varepsilon > 0$,取 $\delta = \varepsilon$,则当 $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$ 时,便有

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \leqslant |y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$$

按定义 2

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0.$$

例 7 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^\alpha \sin\frac{1}{x^2+y^2} \ (\alpha > 0)$.

解:令 $x^2+y^2 = t$,则

$$\begin{cases} x \to 0 \\ y \to 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \to +0$$

于是

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^\alpha \sin\frac{1}{x^2+y^2} = \lim_{t\to +0} t^\alpha \sin\frac{1}{t} = 0 .$$

例 8 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解:令 $xy = t$,则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

因为

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \left|\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

而

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = 0$$

因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$,故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

例 9 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{xy-1}{x^2y^2-1}$.

解:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{xy-1}{x^2y^2-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{1}{xy+1} = \frac{1}{2}.$$

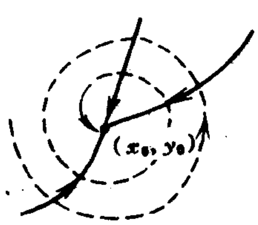


图 12 - 10

一般的讲,二重极限要比一元函数的极限复杂得多. 因为在一元情形,$x \to x_0$ 的方式比较简单,而在二元情形,$\begin{cases} x \to x_0 \\ y \to y_0 \end{cases}$ 的方式则可以十分复杂. 所以,如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$,则不管 (x,y) 以怎样的方式趋于 (x_0,y_0),都应当有

$$f(x,y) \to A .$$

举例来看，由于

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0,$$

因此当(x,y)沿着直线$y=kx$趋于$(0,0)$时，极限应当为0，即

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0\\y=kx}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=0.$$

当(x,y)沿着曲线$y=\sin x$趋于$(0,0)$时，极限也是0，即

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0\\y=\sin x}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin x}{x^2+\sin^2x}=0.$$

当(x,y)沿着抛物线$y=x^2$趋于$(0,0)$时，极限还是0，即

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0\\y=x^2}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^2+x^4}=0.$$

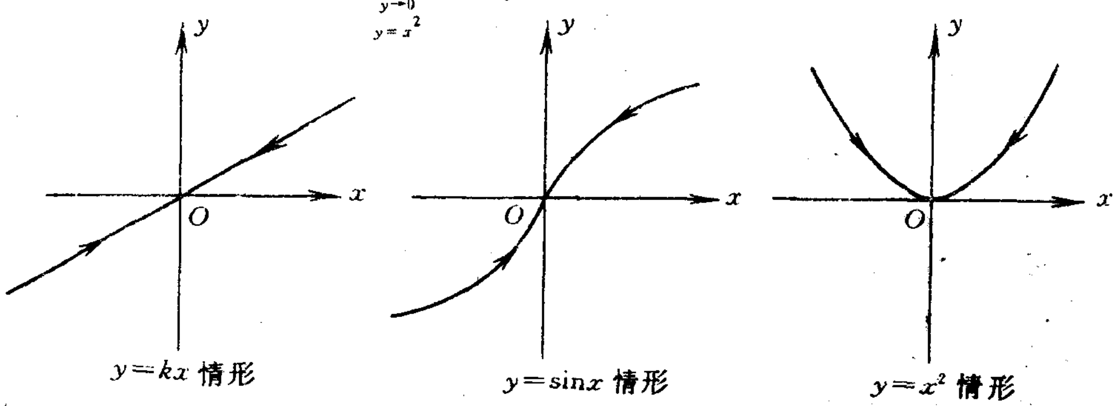


图 12－11

但是如果$f(x,y)$仅当(x,y)以某些特殊方式趋于(x_0,y_0)时有相同的极限，我们就不能立即断言$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$存在.

以上讲的二重极限的这一特点非常重要，它可以用来证明某些二重极限不存在（实际上一元函数的极限也有相应的东西，请回忆一下）.

例 10 证明$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$不存在.

证：由于

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0\\y=kx}}\frac{xy^3}{x^2+y^6}=\lim_{x\to0}\frac{k^3x^4}{x^2+k^6x^6}=\lim_{x\to0}\frac{k^3x^2}{1+k^6x^4}=0,$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0\\y=x^{1/3}}}\frac{xy^3}{x^2+y^6}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2},$$

所以$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$不存在.

例 11 证明$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$不存在.

证：因为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

即当(x,y)沿着斜率不同的直线趋于$(0,0)$时,函数的极限不一样,故$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$不存在!

在一元函数情形,我们知道

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = A$$

只要两个方向的极限存在且相等就保证了极限存在!多元函数的情形却并不这样简单!

二重极限的定义与一元函数极限的定义类似,所以一元函数极限具有的一些性质和运算法则对二重极限也成立.

三、二元函数的连续性

多元函数的连续性与一元情形类似.

定义 3 设$z=f(x,y)$是定义在平面点集D上的二元函数,$P_0(x_0,y_0)$是D的内点,如果$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$,则称$f$在点$P_0$连续.

定义 4 如果定义在开区域D上的二元函数f在D的每一点都连续,则称f为开区域D上的连续函数.

定义 5 定义在闭区域D上的二元函数f称为在D上连续,如果

①f在D的每个内点连续;

②f在D的每个边界点连续.

这里②的确切意思是这样:设$P_0(x_0,y_0)$是D的边界点,则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0\\ (x,y)\in D}} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

即$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$,当$(x,y)\in B(P_0,\delta)\cap D$时,有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

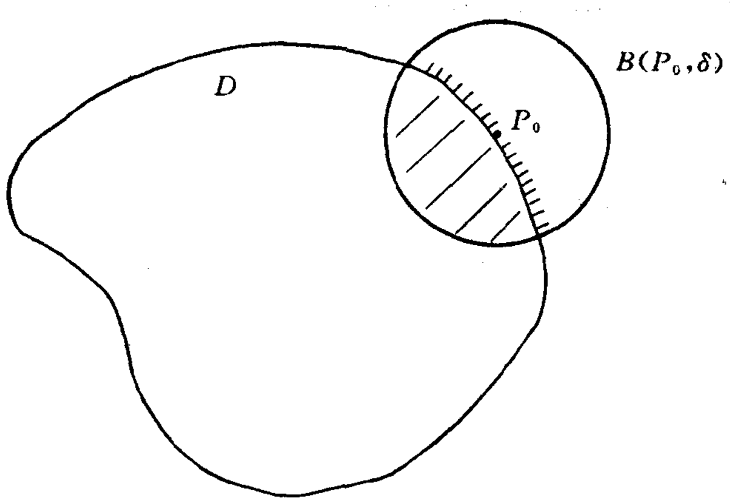


图 12 - 12

例 12　$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$　$\alpha>0, D=R^2$，f 在点 $(0,0)$ 处是否连续？

解：由例 7 可知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$，

$\therefore f$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

例 13　$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$　$D=R^2$，f 在点 $(0,0)$ 处是否连续？

解：$\because$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{|xy|}\,\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{|xy|}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$
$$=0=f(0,0)$$

故 f 在 $(0,0)$ 点处连续.

由于一元函数极限的运算法则对多元函数的极限也成立，所以连续函数的和、差、积、商（当分母不为零时）仍为连续函数. 另外也不难证明连续函数的复合函数也是连续函数. 因而我们有

定理 1　**多元初等函数在其定义域内连续**.

例 14　$\dfrac{x^3-y^3}{1+x^2+y^2}$ 在 R^2 上连续，$\ln(x^2+y^2-1)$ 在开区域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2>1\}$ 上连续. $e^{x+1/y}$ 在开集 $R^2\setminus(x$ 轴$)$ 上连续.

根据连续性也可算得一些极限. 例如

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^{n-k}\cdot y^k=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x_0^{n-k}\cdot y_0^k,$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\ln\frac{x+e^y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\ln 2,$$

如同一元函数的情形一样，多元连续函数也具有一些重要性质.

定理 2　有界闭区域 D 上连续的函数 f 是有界的.

定理 3　有界闭区域 D 上连续的函数 f 可以在 D 上取到最大值和最小值.

定理 4（取中间值定理）　开区域或闭区域 D 上连续的函数 f 可以取到它的任意两个函数值之间的一切值.

定理 5　有界闭区域 D 上连续的函数 f 在 D 上一致连续（即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，D 内任意两点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2)，只要 $((x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2)^{\frac{1}{2}}<\delta$ 便有 $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$）.

习　题　12－2

1. 求下列函数的定义域，并画出这些定义域的图形：

(1) $z=\sqrt{2x-y^2}$; (2) $z=\ln(x+5y)$;

(3) $z=\sqrt{3-x^2-2y^2}$; (4) $z=\sqrt{x\sin y}$.

2. 求集合 $\{(x,y)\mid f(x,y)<c, c>0\}$，画出其图形：

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$; (2) $f(x,y)=|x|+|y|$;

(3) $f(x,y)=\max(|x|,|y|)$.

3. 考虑下列二重极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3+y^3}{x^3+y^2}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$; (4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^4+y^4)}{x^2+y^2}$;

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x^2\cdot\ln(x^2+y^2)$; (6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{(x^4+y^4)e^{\frac{1}{x^2+y^2}}}$.

4. 求函数 f 的不连续点集合

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{(x^2+y^2-x)}, & x^2+y^2-x\neq 0\\ 0, & x^2+y^2-x=0\end{cases}$;

(4) $f(x,y)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}y+2, & x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ 0, & \text{其余地方}\end{cases}$

第三节　偏导数

在研究一元函数时，考虑函数的变化率或导数曾是一个非常重要的方法. 多元函数情形怎么样？也有变化率吗？

定义 1　设 $z=f(x,y)$ 在包含点 (x_0,y_0) 的某个邻域在内的平面点集 D 上有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为 f 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数，记作

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\ f'_x(x_0,y_0)\ \text{或}\ \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\ z'_x(x_0,y_0).$$

同样可以定义 f 在点 (x_0,y_0) 处关于 y 的偏导数

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Big(\text{或}\ \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\ f'_y(x_0,y_0)\ \text{等等}\Big).$$