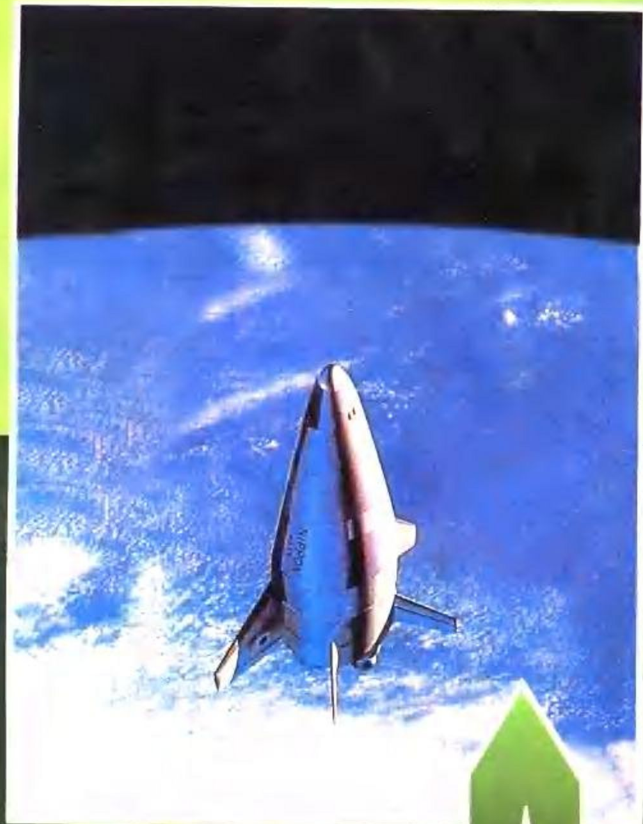
S H U X U E M O X I N G

数学模型

任善强 雷 鸣 编著



重庆大学出版社

数 学 模 型

任善强 雷 鸣 编著

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书详细介绍了数学模型的基本概念、各类数学模型的建立及其求解方法．书中涉及的模型有初等模型、微分方程模型、变分法模型、运筹学模型、图论模型、网络模型、概率统计模型、模糊数学模型等．全书共分10章，每章末配有适量习题供读者练习．书末选编了国内外大学生数学建模竞赛试题．

本书通俗易懂，趣味性强，便于自学．通过本书的学习，能提高读者观察问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力．本书可作为工科院校本科学生、研究生的教材，也可供有关工程技术人员和管理干部阅读．

数 学 模 型

任善强　雷　鸣　编著

责任编辑　　刘茂林

*

重庆大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

重庆通信学院印刷厂印刷

*

开本:787×1092　1/16　印张:16.5　字数:418千

1996年8月第1版　　1996年8月第1次印刷

印数:1—6000

ISBN7-5624-1227-8　/O·136　定价:15.50元

(川)新登字020号

想象力比知识更重要，因为知识是有限的，而想象力概括着世界的一切，推动着进步，并且是知识的源泉．

——爱因斯坦

前 言

三百多年前，英国哲学家培根提出了“知识就是力量”这句风靡全球的口号，成为引导人们求知、治学的精辟格言．

我国《南京日报》在举办“智能奖”竞赛时提出了“知识加能力就是力量”这句新的口号．

能力与知识有着极其密切的关系．缺乏知识的能力是低层次的能力，缺乏能力的知识是僵死的知识．在二者的相互依存中，主导的方面是能力，没有能力就不能尽快掌握爆炸般增长的知识，没有能力就不能使知识迅速转变为精神财富和物质财富．在“四化”建设过程中，能力显得越来越重要了，这是社会飞速前进，科学迅猛发展的必然结果．

随着科学技术的迅猛发展和计算机技术的广泛使用，数学模型已越来越受到人们的重视．这是因为数学的应用正向一切领域广泛渗透，或者说当今社会正日益数学化．用数学方法去解决任何一个实际问题，首先要对问题的实际背景进行深入地了解，摸清该问题的内在规律，并用数字、图表、公式、符号等表示出来，即所谓的数学模型．然后求解模型，得到相应的结果．此结果可供人们作分析、预测、决策或控制．这一过程人们称之为建立数学模型．

当前的大学生在校内学习数学时，主要学习数学的基本理论，即有关概念、定理和公式，在计算技巧训练上功夫下得较多．但在毕业后解决实际工作中的问题时，对复杂的研究对象不知如何简化，不知如何将研究对象抽象成一个简单的数学模型来反映客观现实．这主要是因为大学生在校期间关于这方面的训练太少，所以想象力差，分析问题、解决问题的能力比较低．因此大学生毕业后适应社会还需要好几年的时间．这种情况与当今社会的发展是极为不相适应的，应该尽快改变这种局面．

在清华大学肖树铁教授的倡导下，从 1983 年开始，在全国有关高校陆续开设了数学模型课程，并于 1992 年起每年在全国大学生中举行一次数学建模竞赛．编者积极响应肖树铁教授的倡导，并于 1984 年起每年在学生中开设数学模型课程，除在数学专业学生中开设此课程外，还在工科本科生及工科研究生中开设不同层次的数学模型课程．编者在长达十多年的数学模型课程教学和对参加数学建模竞赛学生的多年培训中，对如何培养学生的想象力，增强学生观察问题、分析问题、解决问题的综合能力，作了不少的尝试和探索，取得了一些经验和教训．

数学模型课程之所以深受学生的欢迎，是因为该课程详细而生动地介绍了许多领域的精彩应用实例．所涉及的领域有物理学、力学、工程学、生物学、医学、经济学、军事科学、体育运动学等．这些实例对于理、工、农、医、经济、管理等专业的学生和工程技术人员，运用各种数学知识（如微分方程、运筹学、概率、统计、随机过程、模糊数学、灰色系统、层次分析法、变分法等），描述和解决各种实际问题，建立数学模型，都是很有启发和帮助的．

本课程的特点是通过大量实例的介绍，说明当我们所解决的问题涉及众多的因素时，如何

分清问题的主要因素和次要因素，恰当地抛弃次要因素，提出合理的假设，建立相应的数学模型，并用相应的数学方法（或使用现有的软件）求解模型，然后将所得的解与实际问题作一比较，找出存在的差距和原因，对问题作进一步的分析，提出新的假设，逐步修改完善模型，使问题得到更好的解决．

学习本书只需要一般的高等数学知识，有少数几个模型要用到有关微分方程稳定性和差分法的基础知识，这在章末作为一节专门介绍．有些模型要用到统计和图论的有关知识，本书都尽可能在书中先作简要介绍，以帮助读者理解书中内容．凡涉及太深奥的数学知识的模型，本书不予采用．每章末附有适量的习题，以帮助读者掌握建立模型的方法和技巧．少数习题的深入解决可参阅书末的有关文献．附录中还选编了美国大学生数学模型竞赛题（1985—1996 年）和 1992 年全国大学生数学建模联赛试题及 1993—1995 年全国大学生数学模型竞赛题．读者从这些竞赛题中可以对数学模型应用的广泛性，以及对学生想象力的培养，解决问题能力的培养窥视一斑．

本书第一、二、三、四、五、十章及附录由任善强编写．第六、七、八、九章由雷鸣编写．在本书的编写过程中，曾得到原清华大学应用数学系主任、中国工业与应用数学学会理事长肖树铁教授，美国加利福尼亚综合技术大学范新亚教授的帮助，作者在此一并表示谢意．

数学模型作为一门新课程，其内容和方法在国内外均不很成熟，教材内容的取舍不易掌握，编写难度很大．加之作者水平所限，书中定有许多错误和不足之处，恳切地期望读者提出批评指正，以便进一步修改．

编著者

1996 年 3 月

目　录

第一章 引 言

随着现代化科学技术的迅猛发展,要求人们在解决各类实际问题时更加精确化和定量化,特别是在计算机的普及和广泛应用的今天,数学更深入地渗透到各种科学技术领域．数学模型正是从定性和定量的角度去分析和解决所遇到的实际问题,为人们解决实际问题提供一种数学方法,一种思维方式,因此越来越受到人们的重视．一个重点工程要上,地址选择在何处为好?在战争还没有消灭的今天,武器的发展是大型化还是提高精度?人口众多,已成为全球性的大问题,如何制定一个国家的人口政策?为什么发射卫星一般采用三级火箭?……所有这些都需要建立数学模型加以论证,为决策者提供理论依据．

本章先介绍两个生动的应用实例,让读者对此有所体会,然后介绍数学模型的一些基本概念和建立模型的方法．

§1 发射卫星为什么用三级火箭

朋友,当你坐在电视机前观看奥运会精彩的比赛实况时,你可曾想到是通过什么手段把画面瞬间从比赛现场传到世界各地呢?是通讯卫星．卫星靠什么送入太空轨道的呢?在航天飞机问世之前,靠的是三级火箭．那么为什么要用三级火箭,而不用一级、二级或四级火箭呢?

下面通过运载火箭的数学模型来论证三级火箭的设计是最优的．

建立数学模型很关键的一步是确定什么是主要因素,什么是次要因素．火箭是一个非常复杂的系统,它必须具有高效能的发动机,牢固的结构,低的空气阻力等等．显而易见,对火箭发动机的主要要求是必须具有强大的推力使火箭加速到足够大的速度,因为如果火箭最末一级燃料用完时速度太低的话,卫星就会从空中掉回地面．下面从卫星的速度这个因素着手,看看为了使卫星在预定的轨道上围绕地球飞行,火箭的最终速度应该是多少?

一、火箭速度

把问题理想化:假设地球为密度均匀分布的球体,卫星以地球引力作为向心力绕地球作平面圆周运动,如图1.1所示．

设地球半径为 R,地球中心为 O,曲线 C 为地球表面,曲线 C' 为卫星轨道,C' 的半径为 r,卫星质量为 m．

假设地球为密度均匀分布的球体,则可把地球的质量看成集中在球心．由牛顿第二定律,地球对卫星的引力为

$$G = K\frac{m}{r^2} \tag{1.1}$$

K 为引力常数．为定出常数 K,把卫星放在地球表面．则由(1.1)式得

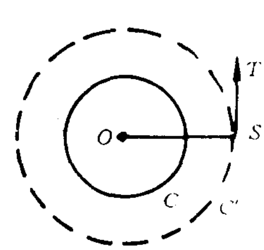


图 1.1

$$mg = K\frac{m}{R^2}$$

$$K = gR^2 \tag{1.2}$$

其中 g 为地球表面的重力加速度．

将(1.2)代入(1.1)得地球对卫星的引力

$$G = K\frac{m}{r^2} = gR^2\cdot\frac{m}{r^2} = mg\left(\frac{R}{r}\right)^2 \tag{1.3}$$

卫星以地球引力作为向心力绕地球作圆周运动，其向心加速度为

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

向心力为

$$ma_n = m\frac{v^2}{r} = mg\frac{R^2}{r^2}$$

得

$$v^2 = g\frac{R^2}{r} \tag{1.4}$$

取 $g = 9.81\text{m/s}^2$，$R = 6400\text{km}$，又取卫星离地面高度为600km，则 $r = 6400 + 600 = 7000\text{km}$ 所以

$$v = R\left(\frac{g}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 7.6\text{km/s} \tag{1.5}$$

即是要把卫星送入离地面600km高的轨道，火箭的末速度至少要7.6km/s.

(读者应注意到，在把问题理想化时，所作假设与实际有较大差别，但这并不会影响所计算的结果，因为并不是要精确计算卫星的速度是多少，而是要推出火箭的末速度至少要多少？)

下面的工作就是计算火箭的速度，看它的末速度能否达到7.6km/s.

二、火箭速度的计算

要计算火箭的速度，必须懂得火箭的基本结构和工作的基本原理．

火箭的简单模型是由一台火箭发动机和一个燃料仓组成，燃料在发动机中燃烧，产生大量的气体从火箭的末端喷出．这种向后喷出的气体产生一个使火箭向前运动的推力．为了在一定的时间内使火箭的最后速度达到7.6km/s，那末推动火箭向前的力应该是多少？这个力又依赖哪些因素呢？

火箭飞行时要受到重力和空气阻力的影响，由于地球的公转和自转，火箭升空后作曲线运动．这样考虑问题就复杂了，这里仍然把问题理想化．

假设火箭在喷气推进下作直线运动，不考虑重力和空气阻力的影响．

设 t 时刻火箭质量为 $m(t)$，速度为 $v(t)$. $t+\Delta t$ 时刻火箭质量为 $m(t+\Delta t)$，由 Taylor 展开式，在 Δt 这段时间内火箭质量减少

$$-\{m(t+\Delta t) - m(t)\} = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\cdot\Delta t + O(\Delta t^2) \tag{1.6}$$

这个减少的质量实际上是火箭燃料燃烧喷出的气体的质量．设喷出的气体相对于火箭运动的速度为 u(u 为常数)，则气体相对于地球运动的速度为 $v(t) - u$.

由动量守恒定律，有

$$m(t)v(t) = m(t+\Delta t)v(t+\Delta t) - \left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\Delta t\right)(v(t)-u) + O(\Delta t^2) \tag{1.7}$$

即 t 时刻火箭动量等于 $(t+\Delta t)$ 时刻火箭动量加上 $(t+\Delta t)$ 时刻转换到气体上去的动量，如图 1.2 所示．用 Taylor 展开式展开 $m(t+\Delta t)$，代入 (1.7) 式两端同除以 Δt，并令 $\Delta t \to 0$，取极限得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}u \tag{1.8}$$

这是一个具有指导意义的式子．(1.8) 式左端表示火箭所受的推力．

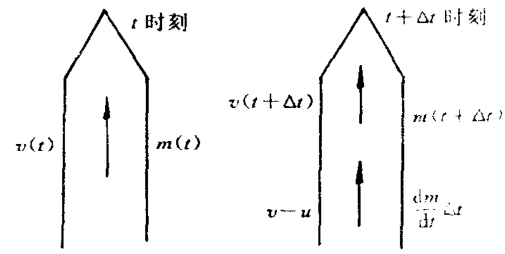


图 1.2

令
$$T = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$
得
$$T = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}u$$

即是说，推力等于燃料消耗的速度与气体相对于火箭运动速度的乘积．

将 (1.8) 式改写为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -u\frac{\mathrm{d}(\ln m)}{\mathrm{d}t}$$

u 为常数，积分上式得

$$v(t) = v_0 + u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) \tag{1.9}$$

m_0 是火箭初始质量，v_0 是 $t=0$ 时的速度，(1.9) 式的结果表明火箭速度变化仅依赖于两个因素：

(1) 喷出的气体相对于火箭的速度 u（已假定为常数）；

(2) t 时刻火箭质量 $m(t)$ 和 $t=0$ 时刻火箭质量 m_0 之比．

这就为设计火箭时提高火箭速度指出了正确的方向：

(1) 尽量提高火箭燃烧时产生的气体喷出的速度 u，这从燃料上想办法（如制造液体燃料、固体燃料、改变燃料构成成分等）．

(2) 尽量减少在 t 时刻火箭的质量，$m(t)$，以增大 $m_0/m(t)$ 的比值，从结构上想办法．

采用以上两种方法均可提高火箭的速度，为此有必要计算火箭在飞行过程中质量的变化．

三、火箭系统质量的计算

火箭系统质量由下列部分组成：

(1) 净载质量 m_P（如卫星等）；

(2) 燃料质量 m_F；

(3) 结构质量 m_S（发动机和燃料仓质量）．

首先考虑简单情形：设所有燃料全部耗尽，只剩下净载质量和结构质量 m_P+m_S．然后将燃料仓和发动机丢弃，只剩下净载体．由 (1.9) 式净载体将以速度

$$V = u\ln\left(\frac{m_0}{m_P + m_S}\right) \tag{1.10}$$

运动．

一般来说，结构质量 m_S 在 $m_S + m_F$ 中应占有一定的比例，在现有技术条件下，要使燃料仓与发动机的质量和小于所载燃料的 1/8 或 1/10 是很难做到的．设

$$m_S = \lambda(m_F + m_S) = \lambda(m_0 - m_P) \qquad (\lambda \text{ 为常数})$$

即结构质量为燃料与结构质量和的 λ 倍，代入(1.10)，得

$$v = u\ln\left(\frac{m_0}{\lambda m_0 + (1-\lambda)m_P}\right)$$

由此可以得出一个重要的结果：

对于给定的 u 值，当净载质量 $m_P = 0$ 时(即火箭不携带任何东西)，火箭所能达到的最大速度为

$$v = u\ln\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

已知目前火箭燃料的 $u = 3\text{km/s}$，如果取 $\lambda = 0.1$，则上式中

$$v \approx 7\text{km/s}$$

前面(1.5)式推出卫星要进入圆形轨道，火箭末速应为 7.6km/s，而刚才推导的火箭速度是在假定忽略空气阻力、重力、不携带任何东西的情况下，最大速度才 7km/s．由此得出，如上的单级火箭是不能用于发射卫星的．

由以上分析还可以发现，该火箭模型的缺点在于发动机必须把整个沉重的火箭加速到底，但是当燃料耗尽时，发动机加速的仅仅是一个空的燃料仓，作了许多无用功．因此，有待改进火箭的设计．

设火箭燃料燃烧的同时，不断丢弃无用部分，显然效率会高一些，如图 1.3 所示．

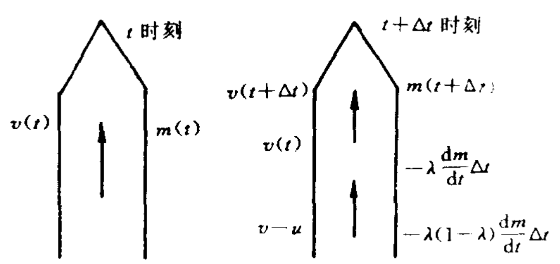


图 1.3

设在 t 到 $t + \Delta t$ 时间内，把总丢弃质量当作 1(总丢弃质量等于丢弃的结构质量加上燃烧掉的燃料质量)．

把丢弃的结构质量当作 $\lambda(0 < \lambda < 1)$，则燃烧掉的燃料质量为$(1 - \lambda)$．(当然，不可能制造这样的理想火箭．即要作到无用部分外壳连续不断地丢弃．但是，可把实际情况理想化以后，使得问题变得比较简单，在此基础上建立相应的数学模型．从而获得需要的信息．然后通过一些修正，就可以把理想过程还原到实际过程)．

在图 1.3 中，$-\lambda\dfrac{dm}{dt}\Delta t$ 表示丢弃的结构质量，$-(1-\lambda)\dfrac{dm}{dt}\Delta t$ 表示燃烧掉的燃料喷出的气体质量．

由动量守恒定律

$$m(t)v(t) = m(t+\Delta t)v(t+\Delta t) - \lambda\frac{dm}{dt}\Delta t v(t) - (1-\lambda)\frac{dm}{dt}\Delta t(v-u)$$

将 $m(t + \Delta t)$ 按(1.7)式展开代入上式，经过整理并令 $\Delta t \to 0$，取极限得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (1-\lambda)u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

积分得
$$v(t) = (1-\lambda)u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) \tag{1.11}$$

(1.11)式与(1.10)式相似,但不同的是(1.11)式表明,当火箭燃料用完时,结构质量均被扔掉,只剩下净载(如卫星).

因此,理想火箭的最终速度为

$$v = (1-\lambda)u\ln\left(\frac{m_0}{m_P}\right) \tag{1.12}$$

由上式可以看出,如果已知 u、λ、m_0、m_P,则可计算出净载物的速度．显然,在以上条件下,要求净载物速度越高,则净载物的质量就必须越小．

假定考虑空气阻力、重力等因素影响,那么理想火箭将卫星送入 600km 的轨道的最终速度应达到 10.5km/s,而不是 7.6km/s. 如果取 $\lambda = 0.1$, $u = 3$km/s,代入(1.12)式得

$$\frac{m_0}{m_P} = 50$$

即净载体是整个系统初始质量的 1/50,就是说 1t 重的卫星送入离地 600km 的轨道,需要造一个 50t 重的火箭．

四、理想过程的实际化

前面所提的理想火箭是把火箭飞行过程中燃料燃烧后结构质量的无用部分连续不断地丢弃以提高效率,显然对于实际火箭是办不到的．是否可以把结构质量逐级丢弃而用多级火箭呢?下面就来分析．

令 m_i 为第 i 级质量(燃料 + 结构),λm_i 为结构质量,$(1-\lambda)m_i$ 为燃料质量．

为简单起见,设所有各级火箭 λ 值是一样的,喷气相对速度 u 在各级也相同．

先分析三级火箭的入轨过程,初始质量为

$$m_0 = m_P + m_3 + m_2 + m_1$$

当第一级燃料用完时,剩余质量为 $m_P + m_3 + m_2 + \lambda m_1$,由(1.9)式知火箭速度为

$$v_1 = u\ln\left(\frac{m_0}{m_P + m_3 + m_2 + \lambda m_1}\right) \tag{1.13}$$

这时丢弃第一级外壳,此时火箭质量为 $m_P + m_3 + m_2$,同时第二级点火,当第二级火箭燃料用完时,所剩质量为 $m_P + m_3 + \lambda m_2$,火箭速度为

$$v_2 = v_1 + u\ln\left(\frac{m_P + m_3 + m_2}{m_P + m_3 + \lambda m_2}\right) \tag{1.14}$$

丢弃无用的第二级外壳,火箭质量为 $m_P + m_3$,同时第三级点火,当第三级火箭燃料用完时,其质量为 $m_P + \lambda m_3$,火箭速度为

$$v = v_2 + u\ln\left(\frac{m_P + m_3}{m_P + \lambda m_3}\right) \tag{1.15}$$

有关参数必须满足下列两个条件:

$$\begin{cases} m_0 = m_P + m_1 + m_2 + m_3 \\ \dfrac{v}{u} = \ln\left(\dfrac{m_0}{m_P + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right)\left(\dfrac{m_P + m_2 + m_3}{m_P + \lambda m_2 + m_3}\right)\cdot\left(\dfrac{m_P + m_3}{m_P + \lambda m_3}\right) \end{cases} \tag{1.16}$$

现在的问题是如何选择 m_1、m_2、m_3 使 m_P 最大. 由于(1.16)式复杂,问题棘手,但当引入新变数以后,问题就变简单了.

令 $a_1 = \dfrac{m_0}{m_P + m_3 + m_2}$, $a_2 = \dfrac{m_P + m_3 + m_2}{m_P + m_3}$,

$a_3 = \dfrac{m_P + m_3}{m_P}$

(1.16)式变为

$$\frac{v}{u} = \ln\left(\frac{a_1}{1 + \lambda(a_1 - 1)}\right)\left(\frac{a_2}{1 + \lambda(a_2 - 1)}\right)\left(\frac{a_3}{1 + \lambda(a_3 - 1)}\right)$$

幸运的是,上式中的 a_1, a_2, a_3 是对称的,所以当 $a_1 = a_2 = a_3$ 时, $a_1a_2a_3$ 取最小值,即 $a_1a_2a_3 = m_0/m_P$ 取最小, m_P 最大.

令 $a = a_1 = a_2 = a_3$

则有 $\dfrac{v}{u} = \ln\left(\dfrac{a}{1 + \lambda(a - 1)}\right)^3$, $\dfrac{a}{1 + \lambda(a - 1)} = \exp\left(\dfrac{v}{3u}\right)$

令 $p = \exp\left(-\dfrac{v}{3u}\right)$, 有 $a = \dfrac{1 - \lambda}{p - \lambda}$

所以最大净载质量为

$$\frac{m_0}{m_P} = \left(\frac{1 - \lambda}{p - \lambda}\right)^3$$

设 $v = 10.5\text{km/s}$, $u = 3\text{km/s}$, $\lambda = 0.1$,可得

$$\frac{m_0}{m_P} \approx 77$$

这就是说,要送1t重的卫星上天,需要制造77t重的三级火箭,与理想火箭50t重比较,二者相差很大.

下面考虑两级和四级火箭,由三级火箭的分析可以看出, m_0/m_P 的值推导过程可以适用于任何 n 级火箭,设 u 和 λ 对任何一级火箭都相同,则

$$\frac{m_0}{m_P} = \left(\frac{1 - \lambda}{p - \lambda}\right)^n, \quad p = \exp\left(-\frac{v}{nu}\right)$$

作为检验,如果令 $n \to \infty$,那么它将与我们先前在第三段中讨论的理想火箭结果一致(理想情形是假定火箭在其飞行过程中,无用部分外壳要连续不断地丢弃). 在理想情形时

$$\frac{m_0}{m_P} = \exp\left(\frac{v}{(1 - \lambda)u}\right)$$

如果 u, v, λ 与前相同,卫星重1t,则火箭级数与质量之间的关系为

级数 n:	1	2	3	4	5	…	∞
质量(t):	—	149	77	65	60	…	50

由此可见,用三级火箭代替二级火箭是值得的. 虽然多了一级,但火箭质量几乎减少了一

半．而用四级火箭代替三级火箭时，重量减轻不大，但被四级火箭的复杂性及额外还要制造一个发动机和燃料仓的费用所抵消，因而得不偿失．考虑安全及费用等因素，在以上条件下三级火箭的设计是最优的．

五、火箭结构的优化设计

设
$$w_1 = m_P + m_n + \cdots + m_2 + m_1$$
$$w_2 = m_P + m_n + \cdots + m_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$w_n = m_P + m_n$$
$$w_{n+1} = m_P$$

将(1.16)式用于 n 级火箭情形，有

$$\frac{v_n}{u} = \ln\left(\frac{w_1}{w_2 + \lambda m_1} \cdot \frac{w_2}{w_3 + \lambda m_2} \cdots \frac{w_n}{w_{n+1} + \lambda m_n}\right) \tag{1.17}$$

记 $a_1 = \dfrac{w_1}{w_2}, a_2 = \dfrac{w_2}{w_3}, \cdots, a_n = \dfrac{w_n}{w_{n+1}}$，则(1.17)式为

$$\begin{aligned}\frac{v_n}{u} &= \ln\left[\frac{\frac{w_1}{w_2}}{\lambda(\frac{w_1}{w_2} - 1) + 1} \cdots\cdots \frac{\frac{w_n}{w_{n+1}}}{\lambda(\frac{w_n}{w_{n+1}} - 1) + 1}\right] \\ &= \ln\left(\frac{a_1}{1 + \lambda(a_1 - 1)}\right)\left(\frac{a_2}{1 + \lambda(a_2 - 1)}\right)\cdots\cdots\left(\frac{a_n}{1 + \lambda(a_n - 1)}\right)\end{aligned} \tag{1.18}$$

又 $\dfrac{w_1}{w_{n+1}} = \dfrac{w_1}{w_2} \cdot \dfrac{w_2}{w_3} \cdots \dfrac{w_n}{w_{n+1}} = a_1 a_2 \cdots a_n$．问题变为 v_n 在一定的条件下，求 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得 $\dfrac{w_1}{w_{n+1}}$(即$\dfrac{m_0}{m_P}$)最小，即解问题

$$\min\{a_1 a_2 \cdots a_n\}$$
$$s.t. \quad \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{[1 + \lambda(a_1 - 1)][1 + \lambda(a_2 - 1)]\cdots[1 + \lambda(a_n - 1)]} = C \tag{1.19}$$

或等价于求解无约束极值问题

$$\min\left\{a_1 a_2 \cdots a_n - \alpha\left[\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{[1 + \lambda(a_1 - 1)]\cdots[1 + \lambda(a_n - 1)]} - C\right]\right\}$$

由此可解出最优结构设计时应满足

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

在这里不再讨论火箭发动机的设计以及实用火箭应该考虑的一些复杂因素，有兴趣的读者请参阅参考文献[1]．读者通过三级火箭模型的学习可以看到，文中多处作出假设以使问题简化，这是很必要的．这是因为实际问题非常复杂，只有作出必要的假设以使问题简化后，才能建立相应的模型，得出所需结果．从这里可以体会到实际问题的简化是解决问题的关键．

§2　人口增长数学模型

当今人类面临的五大问题：(1) 人口问题；(2) 工业化的资金问题；(3) 粮食问题；(4) 不可

再生的资源问题;(5) 环境污染问题(即生态平衡问题). 人口问题名列榜首 . 一些发展中国家的出生率过高,众多的人口使国家背上沉重的包袱,人均粮食不足,人均资源不足,工业化资金有限,生态平衡被严重破坏等等,都与人口太多有关 . 而欧洲一些发达国家(如法国、德国等)人口增长率为零甚至为负,造成人口老龄化,劳动力短缺,也是不容忽视的问题 . 建立人口增长的数学模型,用以描述人口增长过程,通过分析对人口增长进行预测,制定相应的人口政策以控制人口增长,于国于民均有利 .

人口模型的研究始于 1798 年 Malthus《人口论》的出版,书中提出了著名的影响深远的 Malthus 人口模型 . 1838 年 P.F.Verhust 对 Malthus 模型进行了修正, 得出了 Logistic 模型, G.V.yule 于 1924 年引入概率观点对人口问题进行了研究,各种比较精细的人口模型则是在 20 世纪 40 年代后建立起来的 . 按龄离散人口模型由 P.H.Leslie 在 1945 年完成 . 现代按龄连续型人口模型在 1959 年由 Van.H.Fpoerster 提出 . 近年来我国学者为了解决我国人口迅猛增长问题,作了大量调查研究,建立了不少人口模型,为国家制定相应的人口政策提供依据 .

影响人口增长的因素很多:人口的基数,出生率和死亡率的高低,人口男女比例大小,人口年龄组成情况,工农业生产水平的高低,营养条件,医疗水平,人口素质,环境污染情况 . 另外还涉及到各民族的风俗习惯,传统观念,自然灾害,战争,人口迁移等等 . 对人口增减有很大影响 .

如果一开始把众多因素都考虑,则无从下手 . 先把问题简化,只考虑影响人口增长的主要因素 —— 增长率(出生率减去死亡率) 及人口基数 . 其余因素的影响暂不考虑,建立一个较粗的数学模型 . 在这个模型的基础上逐步考虑次要因素的影响,进而建立与实际情况更加吻合的人口模型 .

人口的增长过程可用微分方程来描述 . 初看起来,人口增长是不能用微分方程来描述的,因为人口总数是按整数变化的而不是时间的可微函数 . 然而,如果总数很大时,可以近似认为它是时间的连续函数,甚至是可微函数 .(即离散变量连续化处理,这一点初学者应很好地理解和掌握 .)

设 $N(t), r(t,N(t))$ 表示 t 时刻人口总数和增长率,假设只考虑增长率,其他因素的影响暂不考虑 . 则在 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内人口总数增长为

$$N(t+\Delta t) - N(t) = r(t,N)N(t)\Delta t$$

两端同除以 Δt,并令 $\Delta t \to 0$,有

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = r(t,N)N(t) \tag{1.20}$$

模型(1.20)看似简单,其实由于出生率 $r(t,N)$ 的不确定性,给(1.20)的求解带来困难 . 下面将逐步深入地讨论模型(1.20).

一、Malthus 模型

英国人口统计学家 Malthus(1766—1834) 在担任牧师期间,查看了教堂 100 多年人口出生统计资料,他发现这样一个现象,即人口出生率是一个常数 . 于是在 1798 年《人口原理》一书中,提出了闻名于世的 Malthus 人口模型 .

该模型是在(1.20) 式中令 $r(t,N) = r$(常数),得

$$
\begin{cases} \dfrac{dN(t)}{dt} = rN(t) \\ N(t)\Big|_{t=t_0} = N_0 \end{cases} \tag{1.21}
$$

其解为

$$
N(t) = N_0 e^{r(t-t_0)} \tag{1.22}
$$

(1.21)是一个线性方程,称为 Malthus 人口模型．即人口以 e^r 为公比,按几何级数增加．下面检验 Malthus 模型与实际情况是否吻合．

据估计 1961 年全世界人口总数为 3.06×10^9,而在此之前的 10 年人口按每年 2% 的速率增长．因此

$$
t_0 = 1961, \quad N_0 = 3.06\times10^9, \quad r = 0.02
$$

于是

$$
N(t) = 3.06\times10^9 e^{0.02(t-1961)} \tag{1.23}
$$

这个公式非常准确地反映了在 1700—1994 年期间世界估计人口总数．因为在这期间地球上的人口大约每隔 35 年增加一倍,而上述方程断定每隔 34.6 年增加一倍．证明如下:

设在 $T = t - t_0$ 时间段内地球上的人口增加一倍．即当 $t = t_0$ 时,$N_0 = 3.06\times10^9 e^{0.02\times0} = 3.06\times10^9$

当 $T = t - t_0$ 时,$2N_0 = 3.09\times10^9 e^{0.02T}$

两式相比,得

$$
e^{0.02T} = 2
$$

两端取对数,得 $0.02T = \ln2$

即 $T = 50\ln2 \approx 34.6$

再考察 Malthus 人口模型是否符合未来的实际情况．由(1.23)可以推出到2510年世界人口总数将是 2×10^{14} 人(如果将全世界所有陆地,海洋面积均算在内的话,每人平均仅有 $0.864m^2$(9.3平方英尺)),到2635年将为 1.8×10^{15} 人(每人平均仅有 $0.093m^2$(1平方英尺)),而到2670年将是 3.6×10^{15} 人(36万亿)．显然,这些数字说明 Malthus 人口模型对长期预测是不正确的．

二、Logistic 模型

Malthus 模型为什么只符合人口的过去而不能用来预测未来人口总数呢?究其原因,我们发现,只要人口总数不太大时,人口总数增长的线性数学模型(即 Malthus 模型)是正确的,但当人口总数非常大时,地球上的各种资源,环境条件等因素对人口增长的限制作用将越来越显著．如果当人口总数较小时,人口增长率可以看作常数的话,那末当人口增加到一定数量后,这个增长率就要随人口的增加而减小．因此,应该对 Malthus 模型中关于人口增长率为常数这一假设作一修改．我们在线性方程(1.21)的右端加上一项"$-KN^2$".(对于一般的生物,这一项称为竞争项,单位时间内两个成员相遇次数的统计平均值与 N^2 成正比)．此时方程(1.21)式变成

$$
\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN - KN^2 \\ N\Big|_{t=t_0} = N_0 \end{cases} \tag{1.24}
$$