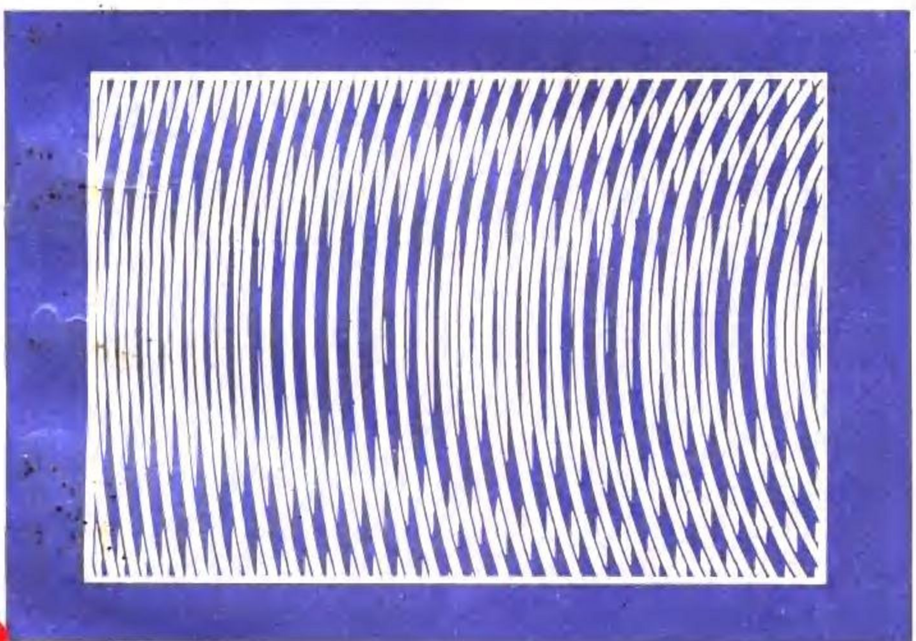
大学数学教程

第二册

王巧玲 等



南京大学出版社

大学数学教程

第二册

韩继昌　王巧玲　罗亚平
范克新　曹祥炎　王芳贵

南京大学出版社

1997·南京

大学数学教程

第二册

王巧玲 等

*

南京大学出版社出版

（南京大学校内　邮政编码：210093）

江苏省新华书店发行　　丹阳市兴华印刷厂印刷

*

开本 850×1168　1/32　印张 17.125　字数 445 千

1997 年 2 月第 1 版　　1997 年 2 月第 1 次印刷

印数 1—2000

ISBN 7-305-02991-2/O·209

定价：21.50 元

序

高等数学教材琳琅满目，其中优秀教材也数量众多．但随着现代科学技术的飞速发展，大量现代数学的思想、方法、内容已渗透到各学科的理论与应用的研究之中，而且也渗透到许多基础理论（非数学）专业的本科与研究生课程中．南京大学基础学科教学强化部，作为基础性人才培养基地，为使学生有良好的科学素质和深厚的业务基础，以适应各学科之间日益渗透的发展趋势，要求在不增加太多学时的前提下，在传统高等数学中适当引进现代数学知识，为本科生后续物理课程提供深厚的数学基础．为提高学生的数学修养并使之受到现代数学思维的熏陶，我们编写了这套教材．内容有微积分、空间解析几何、线性代数、常微分方程、距离、算子与泛函、变分法、积分方程、群论、张量与外代数、微分流形等共20章，分三册出版．教材大纲在1990年由编者与强化部孙景李、卢德馨（二位物理学教授）共同制订，并经数学系黄正中教授等十位专家评审修改后确定．全套教材已在强化部、天文系使用5次，第1～14章为全体强化部学生的必修内容，分三学期讲授，总学时270；第15～20章为物理专业的必选课，用90学时讲授．

在编写时注意如下几点：

1．选材．内容取材贯彻少而精原则．传统高等数学的内容按教委（89）教高司字101号“综合大学本科物理专业高等数学课程教学基本要求”；第14章“距离空间”则作为传统高等数学的延续和拓宽，它为学生从高等数学过渡到现代数学的学习架了一座桥．

2．加强数学修养训练，概念叙述准确而严谨．注意加强逻辑非、“无穷小量”阶的估计、极限理论等训练　还将数直线上极限理论拓宽到距离空间的完备性、紧性．加强集合论基础知识，例如可

列集、基数，并引进流形上的微积分。大胆删去了传统高等数学中一些烦琐而用处不大的证明，在第 14～20 章中略去了一些很长或技巧性很高的证明。

3. 结构编排。全书统一处理分析、几何、代数等多学科中的概念、方法、理论。各部分之间有很强的连续性，前后呼应，使之成为比较有机的整体，同时各学科内容又相对集中。

4. 例题与习题。加强传统性计算训练。全书配备了大量启发性、典型性例题，并注意一题多解。每节后面都配有习题，在每册之后附有答案或提示。

5. 力求深入浅出，少而精，在推理证明中尽力做到层次清楚，基本思路突出。

6. 书中有部分内容用小字排印或打 * 号，在教学中可酌情选讲。

参加编写工作的有韩继昌、王巧玲、罗亚平、范克新、曹祥炎、王芳贵等六位同志。作者都是长期从事教学工作的中老年教师，不仅有丰富的教学经验，而且注意了解国内外高等数学的教学动态及有关专业的教学要求。在编写过程中每章都由二人以上讨论定稿，由韩继昌教授统稿。因此，本书是集体智慧的结晶。

强化部作为国家教委基础科学研究和教学人才培养基地从专项基金中拨款，并向学校教材出版资助金申请了款项，使本书得以顺利出版。感谢强化部领导卢德馨、桑志芹同志的鼎力支持。在编写过程中得到了黄正中、卢德馨、孙景李、唐述钊、许绍溥、姜东平、朱乃谦、金宁等同志的帮助，在此一并致谢。

限于水平，不妥之处在所难免，敬请读者和使用本教材的教师批评指教。

编　者

1996 年 9 月

目　录

7. 常数项级数和广义积分

8　函数项级数和含参变量的积分

10. 向量分析

11 简单常微分方程的解法

12. 常微分方程

13. 线性空间 线性变换与欧几里得空间

常数项级数和广义积分 7

§7.1 广义积分的概念和运算

第 3 章所讨论的定积分有两个限制：

(1) 积分区间$[a,b]$是有限的；

(2) 被积函数 f 在$[a,b]$上是有界的．现在取消这两个限制后，把定积分推广为无穷区间上的积分和无界函数的积分，统称为**广义积分**．

1．无穷区间上的广义积分

定义 1 （无穷区间上的广义积分（简称无穷积分）） 设函数 f 在$[a,+\infty)$上定义，任取 $b>a$，若 f 在$[a,b]$上都可积，且极限

$$I=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

存在有限，则称无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$**收敛**，其积分值为 I，记作

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

否则称为**发散**．

类似可定义

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

对于$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$，则将它分为两个积分

$$\int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x \quad 和 \quad \int_c^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x,$$

如果这两个积分都收敛，则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

否则**发散**。

广义牛顿-莱布尼兹公式　设函数 f 在 $[a, +\infty)$ 上连续，且存在原函数 F，则

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a),$$

即

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{a}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

当极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 存在有限时，无穷积分 $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，不存在时则发散。

其它也有类似的公式。

例 1　计算下列无穷积分。

(1) $\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$，　　　(2) $\int_{-\infty}^{0} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解　(1) $$\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{1}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

(2) $$\int_{-\infty}^{0} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{-\infty}^{0} = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}.$$

以上积分的几何意义是代表图 7.1 中带斜线区域的面积。

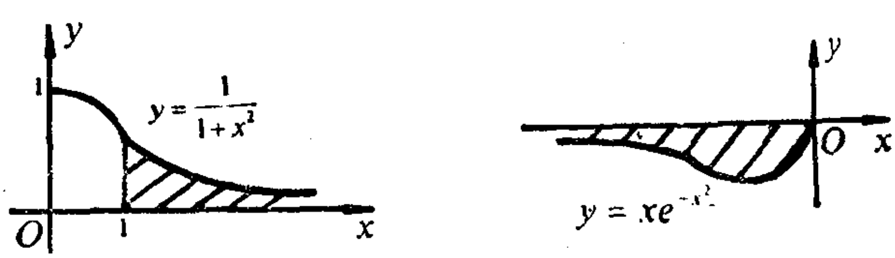


图　7.1

例 2　判别 $\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 的敛散性。

解 当 $p=1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|\Big|_1^{+\infty}=+\infty$，发散，

当 $p\neq 1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^{+\infty}=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, 当p>1时，收敛。\\ -\infty, 当p<1时，发散。\end{cases}$

综合得积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛且等于 $\frac{1}{p-1}$，当 $p\leqslant 1$ 时发散。

2. 无界函数的积分

考虑积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.3}$$

若点 $c\in[a,b]$ 是函数 f 的无穷间断点，即 $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=+\infty$，则称 $x=c$ 是积分(1.3)的奇点，先考虑积分(1.3)只有一个奇点的情况。

定义 2（无界函数的广义积分）

(1) $x=b$ 是唯一奇点，即 f 在 $[a,b-\delta]$ $(\delta>0)$ 上可积，$\lim\limits_{x\to b^-}|f(x)|=+\infty$，如果极限

$$I=\lim_{\delta\to 0^+}\int_a^{b-\delta}f(x)\mathrm{d}x \tag{1.4}$$

存在有限，则称无界函数的积分(1.4)**收敛**，其积分值为 I，记作

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to 0^+}\int_a^{b-\delta}f(x)\mathrm{d}x,$$

否则称积分(1.4)**发散**。

(2) $x=a$ 是唯一奇点，即 f 在 $[a+\delta,b]$ $(\delta>0)$ 上可积，$\lim\limits_{x\to a^+}|f(x)|=+\infty$，如果极限

$$I=\lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x \tag{1.5}$$

存在有限，则称积分(1.5)收敛，其积分值为 I，记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

否则称积分(1.5)**发散**.

(3) $x=c\in(a,b)$是唯一奇点，则将积分(1.3)分为两个积分

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \quad 和 \quad \int_c^b f(x)\mathrm{d}x,$$

如果这两个积分都收敛，则称积分(1,3)收敛，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

否则发散.

对于 f 在$[a,b]$上的奇点多于一个的情形，则可将积分(1.3)分成几个积分，使得每一个积分都是(1)或(2)的形式，只有当所有这些积分都收敛时，原积分才收敛，否则发散.

广义牛顿-莱布尼兹公式 若在$[a,b)$上函数 f 连续且存在原函数 F，b 是 f 的无穷间断点，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to 0^+}\int_a^{b-\delta}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to 0^+}F(b-\delta)-F(a)$$

$$=F(b-0)-F(a)=F(x)\Big|_a^{b-0},$$

因此，若 $F(b-0)$ 不存在，则积分发散，若 $F(b-0)=F(b)$，即 F 在$[a,b]$上连续，则积分收敛，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

所以，若原函数 F在$[a,b]$上连续，则不管 f 在$[a,b]$上有几个奇点，积分收敛，且可用牛顿-莱布尼兹公式计算积分值.

例 3 判别下列积分的敛散性.

(1) $\displaystyle\int_1^2\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$，　(2) $\displaystyle\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$，　(3) $\displaystyle\int_{-1}^8\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}$.

解 (1) $x=1$ 是唯一奇点，则

$$\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x^2-1}\,\Big|_{1+0}^{2}=\sqrt{3}-0=\sqrt{3}.$$

(2) $x=1$ 是唯一奇点，则

$$\int_0^2 \frac{dx}{1-x}=\int_0^1 \frac{dx}{1-x}+\int_1^2 \frac{dx}{1-x},$$

而积分

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x}=[-\ln|1-x|]_0^{1-0}=+\infty \quad 发散,$$

$$\therefore \quad \int_0^2 \frac{dx}{1-x} \ 发散.$$

(3) $x=0$ 是唯一奇点，而 $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 的原函数 $F(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 在$[-1,8]$上连续，故积分收敛，且

$$\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_{-1}^{8}=\frac{12}{2}-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}.$$

例 3 积分(1)的几何意义是代表图 7.2(a) 中带斜线区域的面积，积分(3)则表示图 7.2(b) 中带斜线区域 x 轴上、下方面积之差。

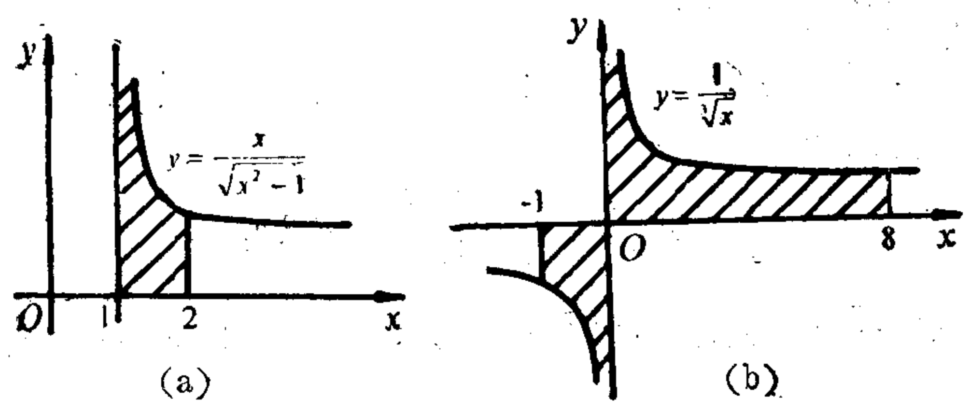


图 7.2

注意，在计算广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 时，必须找出奇点，例如，在例 3(2)，若没有看出奇点将得到错误的结果

$$\int_0^2 \frac{dx}{1-x}=[-\ln|1-x|]_0^2=0.$$

例 4 讨论下列积分的敛散性。

(1) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\lambda}$，　　　　(2) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\lambda}$　$(a<b)$.

解　(1) 当 $\lambda \leqslant 0$ 时，积分是常义的，存在；当 $\lambda>0$ 时，$x=b$ 是唯一奇点，若 $\lambda \neq 1$，则

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\lambda}=\frac{-1}{1-\lambda}(b-x)^{1-\lambda}\Big|_a^{b-0}$$

$$=\begin{cases}\frac{(b-a)^\lambda}{1-\lambda}, & \text{当 } \lambda<1 \text{ 时，收敛，} \\ \infty, & \text{当 } \lambda>1 \text{ 时，发散.}\end{cases}$$

当 $\lambda=1$ 时，

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{b-x}=-\ln|b-x|\Big|_a^{b-0}=+\infty\text{，发散.}$$

综合：当 $\lambda<1$ 时，$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\lambda}=\frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}$，收敛；当 $\lambda \geqslant 1$ 时积分发散.

(2) 讨论类似(1)，得到的结果同(1).

注 1　收敛的广义积分具有定积分的简单性质，换元积分法与分部积分法也成立.

注 2　两类广义积分通过适当的变换可互相转化，例如对以 b 为奇点的积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\delta \to 0^+}\int_a^{b-\delta} f(x)\mathrm{d}x,$$

作代换 $x=b-\frac{1}{t}$，则当 $x=b-\delta$ 时，$t=\frac{1}{\delta} \to +\infty\ (\delta \to 0^+)$，当 $x=a$ 时，$t=\frac{1}{b-a}$，得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\delta \to 0^+}\int_a^{b-\delta} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\delta \to 0^+}\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\delta}} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

$$=\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty}\frac{1}{t^2}f\left(b-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

例 5　计算广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.