機率過程

赫尔，波特　等著

曉園出版社
世界图书出版公司

機率過程

原著者 Hoel • Port • Stone
譯著者 詹 世 煌

曉 園 出 版 社
世界图书出版公司
北京 • 广州 • 上海 • 西安
1992

内 容 简 介

本书论述了机率过程理论中的某些重要课题，这些课题在科学技术的各个领域中有很大应用价值。本书对大学的数学、物理等专业的学生是一本很好的参考书。

机率过程

赫尔、波特等著

詹世煌　　译著

*

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京重印

北京朝阳门内大街 137 号

通州印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

1992 年 10 月第一版　　开本 711×1245　1/24

1992 年 10 月第一次印刷　　印张：9

ISBN:7－5062－1318－4/T・4

定价：7.30 元 W$_B$9201/17

目　　錄

第一章　馬可夫鏈

第二章　一馬可夫鏈的定常分配

第三章　馬可夫純跳躍過程

第四章　二階過程

第五章　連續性，積分和二階過程之微分

第一章

馬可夫鏈

考慮一可為有限數狀態或可數無限數狀態的系統，令$\mathscr{S}$表狀態的集合，我們可設$\mathscr{S}$為整數的一個子集合，則集合$\mathscr{S}$稱為此系統的狀態空間(state space)。設我們在不連續時點$n=0,1,2,\cdots$觀察此系統，並令X_n表在時間n時的系統狀態。

由於我們感興趣者為非確定性系統，我們視$X_n, n\geq 0$，為定義在同一機率空間上的隨機變數，對此等隨機變數，除非加上其他架構，否則我們很難討論它。

最簡單的可能架構為獨立隨機變數。當此系統未來狀態之重複試行與過去和現在狀態獨立時，對該系統此將為一良好的模型。但是在實務上所見到的大部份系統，即使此系統之過去和現在的狀態不能唯一地決定未來的狀態，其亦會影響之。

有很多系統具有已知現在狀態下，過去的狀態不對未來狀態有任何影響的性質，此性質稱為**馬可夫性質** (Markov property)，而具有此性質之系統稱為**馬可夫鏈** (Markov chains)。馬可夫性質的精確定義為，對在$\mathscr{S}$中所取之每一非負整數n和數$x_0,\ldots,x_{n+1}$，具有

$$(1)\quad P(X_{n+1}=x_{n+1}\mid X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n)=P(X_{n+1}=x_{n+1}\mid X_n=x_n)$$

此條件機率$P(X_{n+1}=y\mid X_n=x)$稱為此鏈之**遷移機率** (transition probabilities)。本書中，我們將研究有定常 (stationary)遷移機率，即$P(X_{n+1}=y\mid X_n=x)$與n獨立,的馬可夫鏈。從現在開始，當我們說$X_n, n\geq 0$，構成一馬可夫鏈時，我們意謂這些隨機變數滿足馬可夫性質且具有定常遷移機率。

此等馬可夫鏈之所以值得研究可從兩點來說明。第一，其理論豐富，且大部份可以基本的方式來說明；第二，實務上所見到的系統中，有很多

可以馬可夫鏈來配模型，故馬可夫鏈有很多有用的應用。

為有助於以後將討論之一般結果的了解，我們先自僅有二狀態的馬可夫鏈講起。

1-1 二狀態馬可夫鏈

為說明二狀態馬可夫鏈，考慮在任一特定日開始時，一機器為故障或可操作的情形。設此機器若在第 n 日開始時故障，其能成功修復且在第（$n+1$）日開始時為可操作狀態的機率為 p；再設若此機器在第 n 日開始時處於可操作狀態，而後發生故障，而不能在第（$n+1$）日開始時開工的機率為 q；最後，令 $\pi_0(0)$ 表期初，即在第 0 日開始時，故障的機率。

令狀態 0 對應於機器故障，而狀態 1 對應於機器可操作，X_n 表在時間 n 時機器狀態的隨機變數，則依上述

$$P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) = p,$$

$$P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1) = q,$$

且

$$P(X_0 = 0) = \pi_0(0).$$

由於僅有兩個狀態 0 和 1，故可得

$$P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) = 1 - p,$$

$$P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1) = 1 - q,$$

而期初時在狀態 1 的機率 $\pi_0(1)$ 為

$$\pi_0(1) = P(X_0 = 1) = 1 - \pi_0(0).$$

由此等情報，我們可很容易地求得 $P(X_n = 0)$ 和 $P(X_n = 1)$。我們知

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0) &= P(X_n = 0 \text{ 且 } X_{n+1} = 0) + P(X_n = 1 \text{ 且 } X_{n+1} = 0) \\ &= P(X_n = 0)P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) \\ &\quad + P(X_n = 1)P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1) \\ &= (1 - p)P(X_n = 0) + qP(X_n = 1) \\ &= (1 - p)P(X_n = 0) + q(1 - P(X_n = 0)) \\ &= (1 - p - q)P(X_n = 0) + q. \end{aligned}$$

現在$P(X_0=0)=\pi_0(0)$，故

$$P(X_1=0)=(1-p-q)\pi_0(0)+q$$

且

$$\begin{aligned}P(X_2=0)&=(1-p-q)P(X_1=0)+q\\&=(1-p-q)^2\pi_0(0)+q[1+(1-p-q)].\end{aligned}$$

重複此步驟n次，我們可得

$$(2)\qquad P(X_n=0)=(1-p-q)^n\pi_0(0)+q\sum_{j=0}^{n-1}(1-p-q)^j.$$

在$p=q=0$時，顯然對所有的n

$$P(X_n=0)=\pi_0(0)\qquad 且\qquad P(X_n=1)=\pi_0(1).$$

現在設$p+q>0$，則由有限幾何級數和的公式

$$\sum_{j=0}^{n-1}(1-p-q)^j=\frac{1-(1-p-q)^n}{p+q}.$$

故由 (2) 得

$$(3)\qquad P(X_n=0)=\frac{q}{p+q}+(1-p-q)^n\left(\pi_0(0)-\frac{q}{p+q}\right),$$

因而

$$(4)\qquad P(X_n=1)=\frac{p}{p+q}+(1-p-q)^n\left(\pi_0(1)-\frac{p}{p+q}\right).$$

設p和q既不均爲零，亦不均爲1，則$0<p+q<2$，此隱含$|1-p-q|<1$。在此情形下，令 (3) 和 (4) 中的$n\to\infty$，得

$$(5)\qquad \lim_{n\to\infty}P(X_n=0)=\frac{q}{p+q}\qquad 和\qquad \lim_{n\to\infty}P(X_n=1)=\frac{p}{p+q}.$$

我們亦可以其他方法來求得機率$q/(p+q)$和$p/(p+q)$。設我們欲取$\pi_0(0)$和$\pi_0(1)$以使$P(X_n=0)$和$P(X_n=1)$獨立於n，則由 (3) 和 (4) 知，欲達此我們應取

$$\pi_0(0)=\frac{q}{p+q}\qquad 和\qquad \pi_0(1)=\frac{p}{p+q}.$$

故我們看出，若X_n，$n \geq 0$，具有期初分配

$$P(X_0 = 0) = \frac{q}{p+q} \quad \text{且} \quad P(X_0 = 1) = \frac{p}{p+q},$$

則對所有的 n

$$P(X_n = 0) = \frac{q}{p+q} \quad \text{且} \quad P(X_n = 1) = \frac{p}{p+q}.$$

由於並未眞正地說X_n，$n \geq 0$， 是否可設爲滿足馬可夫性質，因此上述對機器的敍述模糊而不眞切。現在我們設其並不具有此馬可夫性質，我們可用此一增加的情報來求得X_0，X_1，…，X_n的聯合分配。

例如，令$n=2$，且令 x_0 ， x_1 和 x_2 皆等於 0 或 1 ，則

$$\begin{aligned} &P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \text{且 } X_2 = x_2) \\ &\quad = P(X_0 = x_0 \text{ 且 } X_1 = x_1)P(X_2 = x_2 \mid X_0 = x_0 \text{ 且 } X_1 = x_1) \\ &\quad = P(X_0 = x_0)P(X_1 = x_1 \mid X_0 = x_0)P(X_2 = x_2 \mid X_0 = x_0 \text{ 且 } X_1 = x_1). \end{aligned}$$

現在$P(X_0 = x_0)$ 和 $P(X_1 = x_1 | X_0 = x_0)$ 由 p，q 和 $\pi_0(0)$ 決定；但由於不具有馬可夫性質，我們不能求得以 p，q 和 $\pi_0(0)$ 表示的 $P(X_2 = x_2 | X_0 = x_0, X_1 = x_1)$。但若此馬可夫性質滿足，則

$$P(X_2 = x_2 \mid X_0 = x_0 \text{ 且 } X_1 = x_1) = P(X_2 = x_2 \mid X_1 = x_1),$$

而此由 p 和 q 決定。在此情況下

$$\begin{aligned} &P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \text{且 } X_2 = x_2) \\ &\qquad = P(X_0 = x_0)P(X_1 = x_1 \mid X_0 = x_0)P(X_2 = x_2 \mid X_1 = x_1). \end{aligned}$$

例如

$$\begin{aligned} &P(X_0 = 0, X_1 = 1, \text{且 } X_2 = 0) \\ &\qquad = P(X_0 = 0)P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0)P(X_2 = 0 \mid X_1 = 1) \\ &\qquad = \pi_0(0)pq. \end{aligned}$$

讀者可檢驗下表中其他X_0，X_1 和X_2 之聯合分配的值。

x_0	x_1	x_2	$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1,$ 且 $X_2 = x_2)$
0	0	0	$\pi_0(0)(1-p)^2$
0	0	1	$\pi_0(0)(1-p)p$
0	1	0	$\pi_0(0)pq$
0	1	1	$\pi_0(0)p(1-q)$
1	0	0	$(1-\pi_0(0))q(1-p)$
1	0	1	$(1-\pi_0(0))qp$
1	1	0	$(1-\pi_0(0))(1-q)q$
1	1	1	$(1-\pi_0(0))(1-q)^2$

1-2　遷移函數和期初分配

令 X_n，$n \geq 0$，爲有狀態空間 $\mathscr{S}$（現在去除二狀態之限制）的一馬可夫鏈，由下式

(6) $$P(x, y) = P(X_1 = y \mid X_0 = x), \qquad x, y \in \mathscr{S},$$

所定義之函數 $P(x,y)$，$x \in \mathscr{S}$ 和 $y \in \mathscr{S}$，稱爲此鏈之**遷移函數** (the transition function)，其滿足

(7) $$P(x, y) \geq 0, \qquad x, y \in \mathscr{S},$$

且

(8) $$\sum_y P(x, y) = 1, \qquad x \in \mathscr{S}.$$

由於此馬可夫鏈有定常機率，故

(9) $$P(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = P(x, y), \qquad n \geq 1.$$

由馬可夫性質得

(10) $$P(X_{n+1} = y \mid X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) = P(x, y).$$

換句話說，若此馬可夫鏈在時間 n 時處於狀態 x，則不管過去它如何抵達 x，在次一步驟其處於狀態 y 的機率爲 $P(x,y)$，基於此一理由，數 $P(x,y)$ 稱爲此馬可夫鏈之**一步遷移機率** (one-step transition probabilities)

定義如

(11) $$\pi_0(x) = P(X_0 = x), \qquad x \in \mathscr{S},$$

的函數 $\pi_0(x)$，$x \in \mathscr{S}$，稱爲此鏈之**期初分配** (initial distribution)，它滿足

(12) $$\pi_0(x) \geq 0, \qquad x \in \mathscr{S},$$

和

(13) $$\sum_x \pi_0(x) = 1.$$

X_0 ,…, X_n 的聯合分配可很容易地表爲遷移函數和期初分配的形式。例如

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1) = P(X_0 = x_0)P(X_1 = x_1 \mid X_0 = x_0)$$
$$= \pi_0(x_0)P(x_0, x_1).$$

而

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2) & \\ &= P(X_0 = x_0, X_1 = x_1)P(X_2 = x_2 \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1) \\ &= \pi_0(x_0)P(x_0, x_1)P(X_2 = x_2 \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1). \end{aligned}$$

由於 X_n ，$n \geq 0$ ，滿足馬可夫性質，且具有定常遷移機率，故

$$\begin{aligned} P(X_2 = x_2 \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1) &= P(X_2 = x_2 \mid X_1 = x_1) \\ &= P(X_1 = x_2 \mid X_0 = x_1) \\ &= P(x_1, x_2). \end{aligned}$$

因而

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \pi_0(x_0)P(x_0, x_1)P(x_1, x_2).$$

由歸納法，我們可得

(14) $$P(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = \pi_0(x_0)P(x_0, x_1) \cdots P(x_{n-1}, x_n).$$

若將我們上述定義的順序倒置，則可方便不少。我們說，若函數 $P(x, y)$ ，$x \in \mathscr{S}$ 且 $y \in \mathscr{S}$ ，滿足 (7) 和 (8) ，則其爲一**遷移函數** (transition function) ；若 $\pi_0(x)$ ，$x \in \mathscr{S}$ ，滿足 (12) 和 (13) ，則稱其爲一**期初分配** (initial distribution) 。我們可證得，在已知任意遷移函數 P 和任意期初分配 π_0 下，有一機率空間和定義在此空間而滿足 (14) 的隨機變數 X_n ，$n \geq 0$ 。我們不難證明這些隨機變數構成一有遷移函數 P 和期初分配 π_0 的馬可夫鏈。

讀者可能會爲某些我們已討論的條件機率沒良好定義而困擾。例如，若

$$P(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = 0.$$

則 (1) 之左式沒有定義。對此一難題，我們可很容易地解決。定義遷移函數和期初分配的方程式 (7),(8),(12) 和 (13) 皆有定義，且說明 $X_0, \cdots, X_n$ 聯合分配之方程式 (14) 亦有定義。我們不難證明若 (14) 滿足，則在方程式中的條件機率有定義時，(1),(6),(9) 和 (10) 亦滿足，對以後我們將得之其他包含條件機率的方程式，此性質亦成立。

不久我們即可知道馬可夫鏈的遷移函數在描述此馬可夫鏈的性質時，比期初分配扮演著更重要的角色。基於此一理由，我們通常同時研究有一已知遷移函數之所有馬可夫鏈。事實上，我們拘泥於用"遷移函數 P 之一馬可夫鏈"，其實際意義即具有該遷移函數之所有馬可夫鏈族。

1-3 例　示

本節我們將扼要地敍述一些馬可夫鏈的有趣例子，這些例子在以後將會進一步地加以討論。

例 1　隨機步　令 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 爲有同一密度 f 之獨立整數值隨機變數。令 X_0 爲與 ξ_i's 獨立之一整數值隨機變數，且 $X_n = X_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$，則序列 X_n，$n \geq 0$，稱爲一隨機步 (random walk)。此爲一馬可夫鏈，其狀態空間爲整數，而遷移函數爲

$$P(x, y) = f(y - x).$$

爲驗證此點，令 π_0 表 X_0 的分配，則

$$\begin{aligned}
P(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) \\
&= P(X_0 = x_0, \xi_1 = x_1 - x_0, \ldots, \xi_n = x_n - x_{n-1}) \\
&= P(X_0 = x_0)P(\xi_1 = x_1 - x_0) \cdots P(\xi_n = x_n - x_{n-1}) \\
&= \pi_0(x_0) f(x_1 - x_0) \cdots f(x_n - x_{n-1}) \\
&= \pi_0(x_0) P(x_0, x_1) \cdots P(x_{n-1}, x_n),
\end{aligned}$$

故滿足 (14)。

設一"分子"隨整數變動，而服從馬可夫鏈。當此分子在 x 上時，不管它如何抵此 x，其以機率 $f(y-x)$ 跳至狀態 y。

現在考慮一簡單隨機步 (simple random walk)，其 $f(1)=p$，$f(-1)=q$ 且 $f(0)=r$ 的特例，在此 p，q 和 r 爲非負，且和爲一。其遷移函數爲

$$P(x, y) = \begin{cases} p, & y = x + 1, \\ q, & y = x - 1, \\ r, & y = x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

令一分子依此一隨機步運行。若在某一觀察時點下，此一分子位於狀態 x，則下一觀察時點，它將以機率 p 跳至狀態 $x+1$，以機率 q 至狀態 $x-1$，而以機率 r 停在原來的狀態 x。

例 2 Ehrenfest 鏈 下列爲熱或二分開個體間氣體分子對流的一個簡單模型。設我們有二盒，分別標號爲 1 和 2，且有標號爲 1，2，…，d 的 d 個球。開始時盒 1 中有某些球，而其餘諸球置於盒 2 中。自 1，2，…，d 中隨機取一整數，而後標號爲此整數之球自它所在之盒移至另一盒中，重複執行此獨立試行無數次。令 X_n 表 n 次試行後盒 1 中之球數，則 X_n，$n \geq 0$，爲在 $\mathscr{S} = \{0, 1, 2, \cdots, d\}$ 上之一馬可夫鏈。

此馬可夫鏈的遷移函數可很容易求得。設在時間 t 時，盒 1 中有 x 球，則在第（$n+1$）次試行時所抽取之球將自盒 1 移至盒 2 的機率爲 x/d。在此情形下，於時間 $n+1$ 時，盒 1 中有 $x-1$ 個球；同樣地，在第（$n+1$）次試行時所抽取之球將自盒 2 移至盒 1 的機率爲 $(d-x)/d$，因而在時間 $n+1$ 時，盒 1 中有 $x+1$ 個球。故此馬可夫鏈的遷移函數爲

$$P(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x}{d}, & y = x - 1, \\ 1 - \dfrac{x}{d}, & y = x + 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

注意，此 Ehrenfest 鏈在一次遷移時，僅可自狀態 x 以正的機率移至狀態 $x-1$ 或 $x+1$。

若一馬可夫鏈的狀態 a 具有 $P(a, a) = 1$，或若對 $y \neq a$，$P(a, y) = 0$，則稱爲吸收狀態 (absorbing state)。下例用此一定義。

例 3 賭徒破產鏈（Gambler's ruin chain） 設一賭徒期初有某金額的資金，且與莊家做一系列一次一美元的賭局。設每局中他贏和輸的機率分

別爲 p 和 $q=1-p$，且若他沒錢，則他破產，且以後他所擁有的資金皆爲零。令 X_n，$n\geq 0$，表此賭徒在時間 n 的資金，則此爲一馬可夫鏈，0 爲其吸收狀態，且對 $x\geq 1$

$$P(x,y)=\begin{cases} q, & y=x-1, \\ p, & y=x+1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{15}$$

此鏈稱爲在 $\mathscr{S}=\{0,1,2,\cdots\}$ 上之一**賭徒破產鏈** (gambler's ruin chain)。我們可設若此賭徒的資金增至 d 元，則他不再賭來修正此鏈，在此情形下，0 和 d 皆爲吸收狀態，且對 $x=1,\cdots,d-1$，(15) 式成立。

對後一鏈的另一解釋爲，我們可視二賭徒彼此間做一連串的一元賭博，且此二賭徒的總資金爲 d 元。設任一局賭賽中，第一位賭徒贏的機率爲 p，而第二位贏的機率爲 $q=1-p$，且此二賭徒直到其中之一破產方停止彼此間的賽局。令 X_n 表在時間 n 時第一位賭徒的資金，則 X_n，$n\geq 0$，爲在 $\{0,1,\cdots,d\}$ 的一賭徒破產鏈。

例 4　生死鏈 (Birth and death chain)　考慮在 $\mathscr{S}=\{0,1,2,\cdots\}$ 或在 $\mathscr{S}=\{0,1,\cdots,d\}$ 上的一馬可夫鏈。若此鏈自 x 開始，下一次將在 $x-1$，x 或 $x+1$，則其遷移函數爲

$$P(x,y)=\begin{cases} q_x, & y=x-1, \\ r_x, & y=x, \\ p_x, & y=x+1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

在此 p_x，q_x 和 r_x 爲使 $p_x+q_x+r_x=1$ 的非負數。Ehrenfest 鏈和上述之二種賭徒破產鏈爲**生死鏈** (birth and death chains) 之例。此地用"生死"這種字眼，乃脫胎於此鏈之狀態應用於表某種生命系統之人口數之故。在此等應用中，自狀態 x 至狀態 $x+1$ 的遷移對應於一"出生"，而自狀態 x 至狀態 $x-1$ 的遷移對應一"死亡"。

在第三章，我們將討論**生死過程** (birth and death processes)。此等過程除了可在絕對時間發生跳躍以代整數時間上的跳躍外，其與生死鏈相似。在大部份應用中，第三章所討論的模型較用生死鏈所得者合實際。

例 5　等候鏈 (Queueing chain)　考慮一超級市場付款櫃台的服務設施。人們於不同的時間抵達此設施，而至接受服務。已抵達此設施但尚未接受服務的顧客構成一等候線，對此等系統有很多種模型可加以描述，此地我們僅考慮一非常簡單且有點不合實況的模型；其他則待第三章再討論。

令時間以我們最方便的方式來衡量（例如：分）。設在任意所予時期之初，若有任何顧客等候服務，則在該段時期內恰有一顧客將被服務，且若在一時期之初沒有顧客等待服務，則在該時期內沒有人被服務。令 ζ_n 表在第 n 時期內抵達之新顧客數，設 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots$ 爲有同一密度 f 之獨立非負整數值隨機變數。

令 X_0 表期初時所有之顧客數，且對 $n \geq 1$，令 X_n 表第 n 期期末時的顧客數。若 $X_n = 0$，則 $X_{n+1} = \zeta_{n+1}$；若 $X_n \geq 1$，則 $X_{n+1} = X_n + \zeta_{n+1} - 1$。則由 ζ_n，$n \geq 1$，之假設，不難得到 X_n，$n \geq 0$，爲一馬可夫鏈，其狀態空間爲非負整數，而遷移函數 P 爲

$$P(0, y) = f(y)$$

和

$$P(x, y) = f(y - x + 1), \qquad x \geq 1.$$

例 6　分枝鏈 (Branching chain)　考慮如中子或細菌等能衍生同型新分子的分子。最初之分子的集合視爲第 0 代，而由第 n 代所衍生之分子稱爲屬於第（$n+1$）代，令 X_n，$n \geq 0$，表第 n 代中的分子數。

在上述敍述中並不必同一代中的各種分子皆同爲新分子，事實上，在一所予之時間，各代之分子可共存。

一典型之例如圖 1 所示：開始時有一分子，由其得二分子，故 $X_0 = 1$ 而 $X_1 = 2$。第一代中的一分子衍生三分子，而另一分子衍生一分子，故 $X_2 = 4$。由圖 1 知 $X_3 = 2$。由於第三代的分子中無一衍生得新分子，因而 $X_4 = 0$，且因而對所有 $n \geq 4$，$X_n = 0$。換句話說，第 0 代中的期初分子經過三代後消失。

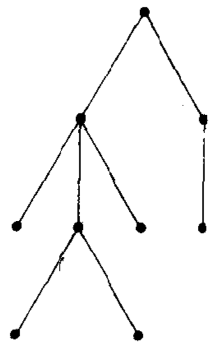

圖 1

為建立此系統為一馬可夫鏈，設每一分子在下一代中衍生 ξ 個分子，在此 ξ 為有密度 f 之一非負整數值隨機變數。我們設各代中各分子所衍生的個數，係依密度 f 獨立地抽取。

在此等假設下，X_n，$n\geq 0$，構成一狀態空間為非負整數的馬可夫鏈，其狀態 0 為一吸收狀態，因若在一所予代中無分子，則次一代亦將無任何分子。對 $x\geq 1$

$$P(x, y) = P(\xi_1 + \cdots + \xi_x = y),$$

在此 $\xi_1, \cdots, \xi_x$ 為有同一密度 f 之獨立隨機變數。在特殊情形下，$P(1, y) = f(y)$，$y\geq 0$。

若一分子衍生 $\xi = 0$ 個分子，其意謂此分子消失或死亡。設一分子衍生 ξ 個分子，而後此等分子復衍生其他分子；但經過 n 代後，期初分子所衍生之所有後代死亡或消失（見圖 1），我們稱此種事件為原先分子的後代最後消滅（extinct）。分枝鏈的一個有趣問題，為對以一單一分子開始的分枝鏈計算其終將消滅的機率 ρ；或計算由狀態 1 開始的分枝鏈，其終將為狀態 0 吸收的機率。一旦我們求得 ρ，我們可很容易地求得一由 x 個分子開始的分枝鏈，此等原先分子每一分子的後代終將消滅的機率。事實上，由於每一分子衍生新分子的行為假設為獨立，故所求之機率為 ρ^x。

分枝鏈原先用於決定某人所生之男孩終將"消失"的機率，基於此一目的，僅男孩方包含於各代中。

例 7　考慮一含有 d 個子單位的基因，在此 d 為某正整數，且每一子

單位的形式不是正常就是突變種。考慮一細胞，其有一基因，其中m個子單位爲突變種，另$d-m$個子單位爲正常。在此細胞分解成兩個子細胞前，此基因複製，因而其衍生之子細胞中的基因中有d個子單位，此d個子單位係隨機自$2m$個突變種子單位和$2(d-m)$個正常子單位中以隨機方式取得者。設一已知基因其後代之衍生係服從如上之固定形式，令X_0表期初狀態時出現之突變種子單位數；且令X_n，$n\geq 1$，爲第n次後代基因中出現之個數，則X_n，$n\geq 0$，爲在$\mathscr{S}=\{0,1,2,\cdots,d\}$上的一馬可夫鏈，且

$$P(x,y)=\frac{\binom{2x}{y}\binom{2d-2x}{d-y}}{\binom{2d}{d}}.$$

對此鏈而言，狀態 0 和d爲吸收狀態。

1–4 遷移函數之計算

令X_n，$n\geq 0$，爲一在$\mathscr{S}$上有遷移函數P的馬可夫鏈。本節我們將證明各種條件機率如何可以P來表示，我們亦將定義此馬可夫鏈的n步遷移函數。

首先由下列公式開始

$$(16)\qquad P(X_{n+1}=x_{n+1},\ldots,X_{n+m}=x_{n+m}\mid X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n)$$
$$=P(x_n,x_{n+1})\cdots P(x_{n+m-1},x_{n+m}).$$

欲證明 (16)，將此方程式之左式寫成

$$\frac{P(X_0=x_0,\ldots,X_{n+m}=x_{n+m})}{P(X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n)}$$

由 (14)，此比率等於

$$\frac{\pi_0(x_0)P(x_0,x_1)\cdots P(x_{n+m-1},x_{n+m})}{\pi_0(x_0)P(x_0,x_1)\cdots P(x_{n-1},x_n)},$$

此即 (16) 之右式

爲方便起見，可將 (16) 式寫成