解析函数边值问题

路见可 编著

上海科学技术出版社

JIEXI HANSHU BIANZHI WENTI

解析函数边值问题

路见可

上海科学技术出版社

解析函数边值问题

路 见 可

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　江苏扬中印刷厂印刷

开本850×1156 1/32　印张14.5　字数379,000

1987年2月第1版　1987年2月第1次印刷

印数：1—4,600

统一书号：13119·1400　　定价：3.20元

前　　言

解析函数的边值问题是复变函数论中极为重要的分支之一．由于许多力学的、物理学的、工程技术中的实际问题往往可化为这类问题或者化为奇异积分方程，而后者又与这类问题有着紧密的联系，所以它有着广泛的应用．以 Н. И. Мусхелишвили 为首的苏联学派，在这方面做出了许多杰出的工作，并以其专著[42]闻名于世．Ф. Д. Гахов 的专著[36]也总结了这方面的工作．在我们国内，从五十年代起也有不少同志关心和从事这方面的研究工作，并进行与此有关的一些其他方面的工作，如数学弹性力学，广义解析函数及其在偏微分方程中的应用等．

上面提到的两本专著内容丰富，但篇幅过大，不便于初学．本书的目的之一就是力图以较少的篇幅将读者带进这一领域中，因此取材尽量选择作者认为最基本的内容．另一方面，书中也适当地收入作者以及有关同志在这方面的某些工作．

由于设想的读者对象不只限于数学工作者，也包括广大的科技工作者，因此本书要求的预备知识只限于数学分析、线性代数和复变函数．此外，还用到了一点有关 Fredholm 积分方程的知识，已列入附录中．

由于着眼于实际的需要，因此一些定理的条件并不要求放得很宽，这样既可使论证简洁又无损于应用．但在所给条件下，则力求论证严谨，说理清楚；而对某些直观上很明显易于接受的事实则略而不证，对要用到的离主题较远的某些结果则仅指出参考文献而不加证明，以省篇幅．

书末所附参考文献也只列入本书所直接涉及的，因此并不是完备的．前述两专著中可找到极丰富的文献资料．

本书原稿曾在武汉大学数学系高年级学生和研究生中试用过. 我的同事们, 特别是林玉波教授, 以及阅读过原稿的同志们, 曾提出了不少很好的意见, 使书稿有很多改进, 作者在此表示衷心的感谢.

由于作者学识所限, 书中缺点错误在所难免, 尚祈广大读者不吝指正.

路见可

1984 年 6 月于武汉大学

目　　录

第 一 章

Cauchy 型 积 分

§1 Cauchy 型积分的意义

1.1 Cauchy 型积分的定义

解析函数边值问题中最重要的工具之一就是Cauchy 型积分. 我们来说明其定义.

设 $L=\sum\limits_{j=1}^{n} L_j$ 是复平面中一组互不相交的光滑（或分段光滑）曲线 $L_1, \cdots, L_n$（开口或封闭）的集合(图 1-1). 在每一 L_j 上取定一指向为正向，记作 L_j^+，从而 L 也取定了正向 $L^+=\sum\limits_{j=1}^{n} L_j^+$；它们的反向称作负向， 分别记作 L_j^- 和 L^-. 以后正向常常略去"+"这一上标，分别简记为 L_j 和 L.

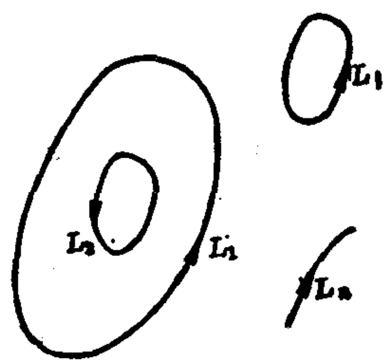

图 1-1

定义 1.1.1 设 $f(t)$ 为定义在 L 上的复函数，则称

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-z}dt, \quad z\overline{\in}L, \tag{1.1}$$

是以 $f(t)$ 为核密度的 Cauchy 型积分，只要此积分存在.

如无特别声明，我们恒认为 $f(t)$ 在 L 上有界可积①. 于是 Cauchy 型积分(1.1)对平面上任何 $z\overline{\in}L$ 都有意义，包括 $z=\infty$ 在内；且容易验证，$F(\infty)=0$. 亦即，$F(z)$ 定义在除 L 以外的整个扩充平面上.

当所有 L_j 都是封闭曲线，且 L 的正侧（即 L 的正向的左侧）围成一有界区域 D 时，Cauchy 型积分(1.1) 与通常所说的区域 D

① 如 $f(t)$ 无界，则认为其在 Riemann 意义下绝对可积.

的边界 L 上的 Cauchy 积分不同. 后者的定义是: 如果 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 内全纯(即单值解析), 在 $\bar{D}=D+L$ 上连续, 则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-z}\,dt,\ z\overline{\in} L$$

叫做 $f(t)$ 在 L 上的 Cauchy 积分, 且有 Cauchy 积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-z}\,dt,\ z\in D. \tag{1.2}$$

Cauchy 型积分(1.1)与这里的差别在于: (1.1)中的 $f(t)$ 只是定义在 L 上, 而并不知道它是否为 D 中某全纯函数连续延拓到 L 上的边值 (或即极限值), 即不知道是否存在着 D 中的全纯函数 $f(z)$, 使得

$$f(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D}} f(z),$$

当然也更谈不上(1.2)式是否成立.

所以, Cauchy 积分仅仅是 Cauchy 型积分的特殊情形; 而对于(1.1), 一般也不能有

$$\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D}} F(z)=f(t),\ t\in L.$$

例 1 设 $L=L_1+L_2+L_3$ 是一个包围着一个的三条光滑封闭曲线, 各 L_j 的正向已如图 1-2 所取. 试计算

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{dt}{t-z},\ z\overline{\in} L.$$

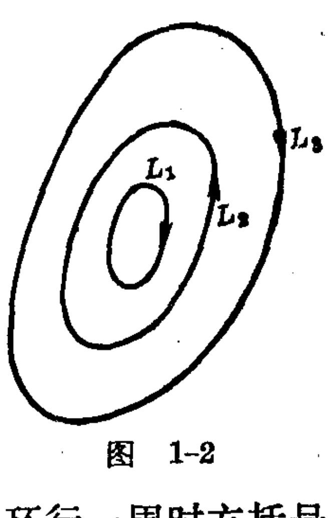

图 1-2

解 显然

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}[\log(t-z)]_L$$
$$=\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2\pi}[\arg(t-z)]_{L_j},$$

这里(以及以后)$[\cdots]_L$ 表示当 t 沿 L 的正向环行一周时方括号内 t 的连续函数值的改变量.

当 z 位于 L_1 所围的内域中时, 上式右端的三项中, 相应于 $j=1, 3$ 的两项均为 -1, 而相应于 $j=2$ 的项为 $+1$, 因此 $F(z)=-1$. 当 z 位于 L_1 与 L_2 之间的环形区域中时, 右端相应于 $j=1$

的项为 0,其它两项一为 $+1$ 一为 -1,故 $F(z)=0$. 同理,当 z 位于 L_2 与 L_3 之间时, $F(z)=-1$; 当 z 位于 L_3 所围的外域中时, $F(z)=0$.

例 2 L 同上,求

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{t}{t-z}\,dt,\ z\overline{\in}L.$$

解 因

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L dt+\frac{z}{2\pi i}\int_L \frac{dt}{t-z}=\frac{z}{2\pi i}\int_L \frac{dt}{t-z},$$

故由上例知,

$$F(z)=\begin{cases}0, \text{当 } z \text{ 位于 } L_1,\ L_2 \text{ 之间或在 } L_3 \text{ 之外时;}\\ -z, \text{其它情况.}\end{cases}$$

3 计算

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\widehat{ab}} \frac{dt}{t-z},\quad z\overline{\in}\widehat{ab},$$

这里 $\widehat{ab}$ 是一开口光滑弧段($a\neq b$),且正向已取定自 a 到 b 的指向(图 1-3).

解 显然

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}[\log(t-z)]_{\widehat{ab}}=\frac{1}{2\pi i}[\log(b-z)-\log(a-z)]$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\log\frac{b-z}{a-z},$$

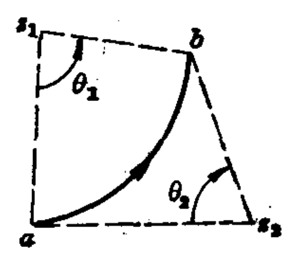

图 1-3

其中 $\log(t-z)$ 作为 t 的函数已在 $\widehat{ab}$ 上任意取定一连续支,而最后右端式子中的对数可理解为 ζ 的函数 $\log\dfrac{b-\zeta}{a-\zeta}$ (它以 a, b 为枝点,设平面已沿 $\widehat{ab}$ 剖开,因此可取单值分支)当 $\zeta=\infty$ 时取 0 值的那个分支 (因为 $F(\infty)=0$)在 $\zeta=z$ 处的值. 因此,

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\left|\frac{b-z}{a-z}\right|+i\theta\right]^{①},$$

① 注意,当 x 为正数时,我们永远用 $\ln x$ 表示 x 的实对数值,而把记号 $\log x$ 仍留给多值函数;所以,$\log x=\ln x+2n\pi i$, $\log z=\ln|z|+i\arg z$ 等等.

其中 $\theta=\arg\dfrac{b-z}{a-z}$ 是 $z\to\infty$ 时 $\theta\to 0$ 的那一支. 事实上, θ 就是当 t 沿 $\widehat{ab}$ 走一遍时向量 $t-z$ 的幅角连续改变量, 即 $[\arg(t-z)]_{\widehat{ab}}$ 的值. 例如, 对于图中 z_1, z_2, θ 分别取值 $\theta_1>0$, $\theta_2<0$.

此外还可看到, 当 z 在 a 或 b 附近时, $F(z)$ 有对数型的奇异性.

1.2 分区全纯函数

在 Cauchy 型积分(1.1)中, 取定某一点 $z\overline{\in}L$, 于是可作 z 的一邻域与 L 无公共点, 在邻域中任取 $z+h$, 并令 $h\to 0$, 则用类似于对 Cauchy 积分情况时的证法, 可以证明 $F'(z)$ 存在, 且

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)}{(t-z)^2}\,dt,\ z\overline{\in}L; \tag{1.3}$$

更一般地, 对任何自然数 n, 将有

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}\,dt,\ z\overline{\in}L. \tag{1.3$'$}$$

由此可见, 当 z 不在 L 上时, 由(1.1)定义的 $F(z)$ 是解析的, 甚至在 $z=\infty$ 处也是如此(请读者自证). 换句话说, 由 Cauchy 型积分(1.1)定义的函数 $F(z)$, 在被 L 分割的全平面的各个(连通)区域中, 包括 ∞ 点在内, 都是全纯的.

例如, 若 L 是一条封闭(分段)光滑曲线, 则(1.1)定义的 $F(z)$ 在 L 所围的内域与外域中分别各代表一全纯函数; 而若 L 是一条(分段)光滑开口弧段, 则(1.1)定义的 $F(z)$ 是全平面用 L 剖开后的区域中的一个全纯函数.

注意, 我们仍不知道当 z 从 L 的某侧趋于 L 上的某点 t 时, $F(z)$ 的极限值(或称边值)是否存在; 而这种极限值的存在性对我们来说是极端重要的.

一般地我们给出下面的定义.

定义 1.2.1 设 L 是有限条互不相交的封闭曲线的集, 它把全平面分割成有限个区域. $F(z)$ 是这样一函数, 它在每个这种区域中全纯, 在 $z=\infty$ 处至多有一极点, 且当 z 从 L 的任一确定的

侧趋于 L 上的任何点 t 时，$F(z)$ 的极限值即边值存在，则称 $F(z)$ 是以 L 为跳跃（或间断）曲线的分区（片）全纯函数. 如果 L 中含有开口弧段，则要求在各端点附近，$F(z)$ 有不到一阶的奇异性，即，若 c 为 L 的一端点，则在 $z=c$ 附近，

$$|F(z)|\leqslant\frac{C}{|z-c|^{\nu}},\ 0\leqslant\nu<1,\ C\text{ 为常数}.$$

注意，当 z 从 L 的另一侧趋于 L 上同一点 t 时，极限值可以不同. $F(z)$ 在某区域的边界上边值处处存在，往往说成它可以从这个区域连续延拓到其边界上. 因此，分区全纯函数可以从每个区域中连续延拓到边界上；当然，边界含有开口弧段时，端点处例外.

如果在 $z=\infty$ 处 $F(z)$ 的 Laurent 展式为

$$F(z)=a_kz^k+a_{k-1}z^{k-1}+\cdots,\ a_k\neq0,$$

则称 $F(z)$ 在 $z=\infty$ 处为 k 阶的或阶数为 k. 故 $k>0$ 时，它以 $z=\infty$ 为 k 阶极点；$k<0$ 时，它以 $z=\infty$ 为 $-k$ 阶零点；而 $k=0$ 时，表示 $F(\infty)\neq0$ 且有限. 因此，分区全纯函数 $F(z)$ 要求在 $z=\infty$ 处有有限阶.

当 z 从 L 的正侧即正向的左侧趋于 L 上某点 t 时（当然不是开口弧段的端点，下同），$F(z)$ 的边值（如存在）记作 $F^+(t)$，而当 z 从 L 的负侧即右侧趋于 t 时，边值记为 $F^-(t)$（图 1-4）；而把

$$\varphi(t)=F^+(t)-F^-(t)$$

称为 $F(z)$ 在 t 处的跳跃或跃度. $\varphi(t)$ 作为 t 的函数，称为跳跃函数.

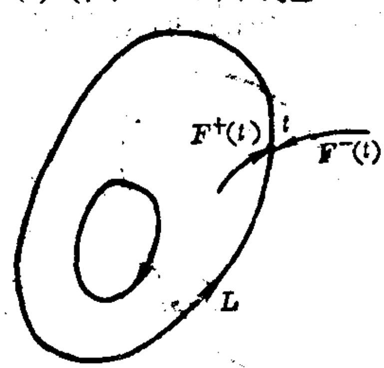

图 1-4

例如，例 2 中的 $F(z)$ 为一分区全纯函数，其跳跃函数为 $\varphi(t)=t$.

一般说来，(1.1) 中定义的 $F(z)$ 虽然在被 L 剖开的各区域中全纯，而且 $F(\infty)=0$（即在 ∞ 处阶数至多为 -1），但由于不知道 $F^\pm(t)$ 是否存在，所以还不能断定它是否为一分区全纯函数. 在下一节中，我们将对密度函数 $f(t)$ 加以适当条件限制，便可证明 $F^\pm(t)$ 的确存

在，从而 $F(z)$ 便是分区全纯函数了.

当然，我们可以类似地定义分区亚纯(或称半纯)函数，这里不再赘述.

习 题

1. 对于 Cauchy 型积分(1.1)，求证

$$F(z)=O\left(\frac{1}{|z|}\right),\ F'(z)=O\left(\frac{1}{|z|^2}\right),\ \cdots(z\to\infty).$$

2. 计算 Cauchy 型积分

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mathrm{Re}\,t}{t-z}\,dt,$$

其中 L 是单位圆周 $|t|=1$，且已取定反时针向为正向.

提示 在 L 上，$t\bar{t}=1$.

答 当 $|z|<1$ 时，$F(z)=\frac{z}{2}$；当 $|z|>1$ 时，$F(z)=-\frac{1}{2z}$.

3. Cauchy 积分(1.2)是不是分区全纯函数?

§2 Plemelj 公式

2.1 Cauchy 主值积分 为要解决上节中提出的边值 $F^{\pm}(t)$ 是否存在的问题，即

$$\lim_{z\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-z}\,dt,\ t_0\in L,\ z\text{ 在 }L\text{ 正侧或负侧},\tag{2.1}$$

是否存在的问题，自然地就会想到要考虑积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-t_0}\,dt,\ t_0\in L.$$

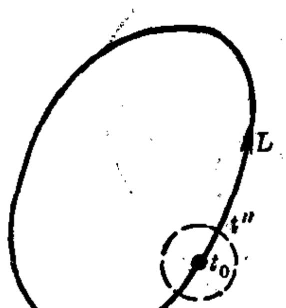

图 1-5

但很明显，这个积分一般说来是发散的. 也就是说，当在 L 上 t_0 的两边各任取一点 t'，t''，则

$$\lim_{t',t''\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{L-\widehat{t't''}}\frac{f(t)}{t-t_0}\,dt\tag{2.2}$$

一般不存在. 然而，与通常实域中定积分主值相类似，如果以 t_0 为中心、充分小的正数 η 为半径作一圆周，使它与 L 的交点恰为两个，按 L 的正向，一个是 t' 在 t_0 的后边，另一个是 t'' 在 t_0 的前

边①，以 L_η 记 $\widehat{t't''}$，这时

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{L-L_\eta}\frac{f(t)}{t-t_0}dt \tag{2.3}$$

是可能存在的(图 1-5).

例如，如果 L 由一条光滑封闭曲线构成，$f(t)\equiv 1$，取定 L 的反时针向为正向，于是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L-L_\eta}\frac{dt}{t-t_0}=\frac{1}{2\pi i}\{\log(t'-t_0)-\log(t''-t_0)\},$$

这里 $\log(t-t_0)$ 作为 t 的函数已在 $L-L_\eta$ 上取定一(任意) 连续分支. 但由于 $|t'-t_0|=|t''-t_0|=\eta$，故上式又可写成

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L-L_\eta}\frac{dt}{t-t_0}=\frac{1}{2\pi}\{\arg(t'-t_0)-\arg(t''-t_0)\},$$

右边 $\{\cdots\}$ 中为一角，它等于当 t 自 t'' 沿 $L-L_\eta$ 变动到 t' 时复数 $t-t_0$ 的幅角连续改变的值，即向量 $t''-t_0$ 到向量 $t'-t_0$ 间的夹角. 显然，当 $\eta\to 0$ 从而 t', $t''\to t_0$ 时，这个角的极限值为 π. 因此，

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{L-L_\eta}\frac{dt}{t-t_0}=\frac{1}{2}. \tag{2.4}$$

但若 t', t'' 是 L 上 t_0 两边的任意两点， 由于 t', $t''\to t_0$ 时， 一般 $\left|\frac{t'-t_0}{t''-t_0}\right|$ 的极限不存在，所以 $\log\frac{t'-t_0}{t''-t_0}$ 的极限也不存在，因此当 $f(t)\equiv 1$ 时 (2.2) 是不存在的.

一般地，我们给出下面的定义.

定义 2.1.1 如果极限(2.3)存在，则将此极限仍记为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)}{t-t_0}dt,$$

称为 $f(t)$ 沿 L 上的 Cauchy 主值积分，$f(t)$ 称为它的核密度，这个极限值就称为积分主值. $1/(t-t_0)$ 则称为 Cauchy 核.

注意，如果极限(2.2)存在，即上面这一积分在通常反常积分意义下收敛，则其值当然与积分主值是一致的. 因此，收敛的反常积分也可看作 Cauchy 主值积分. 以后遇见上面形式的积分时恒理解为 Cauchy 主值积分，不一一声明.

① 对(分段)光滑曲线来说，可以证明这种 η 一定存在，证略.