

解析函数边值问题

路见可 编著

上海科学技术出版社



JIE XI HAN SHU BIAN ZHI WEN TI

072857

解析函数边值问题

路 见 可



科工委书证802 2 0035811 6

67115/05



上海科学技术出版社

解析函数边值问题

路 见 可

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 江苏扬中印刷厂印刷

开本 $850 \times 1156 \frac{1}{32}$ 印张 14.5 字数 379,000

1987 年 2 月第 1 版 1987 年 2 月第 1 次印刷

印数: 1—4,600

统一书号: 13119·1400 定价: 3.20 元

前 言

解析函数的边值问题是复变函数论中极为重要的分支之一。由于许多力学的、物理学的、工程技术中的实际问题往往可化为这类问题或者化为奇异积分方程，而后者又与这类问题有着紧密的联系，所以它有着广泛的应用。以 Н. И. Мусхелишвили 为首的苏联学派，在这方面做出了许多杰出的工作，并以其专著[42]闻名于世。Ф. Д. Гахов 的专著[36]也总结了这方面的工作。在我国，从五十年代起也有不少同志关心和从事这方面的研究工作，并进行与此有关的一些其他方面的工作，如数学弹性力学，广义解析函数及其在偏微分方程中的应用等。

上面提到的两本专著内容丰富，但篇幅过大，不便于初学。本书的目的之一就是力图以较少的篇幅将读者带进这一领域中，因此取材尽量选择作者认为最基本的内容。另一方面，书中也适当地收入作者以及有关同志在这方面的某些工作。

由于设想的读者对象不只限于数学工作者，也包括广大的科技工作者，因此本书要求的预备知识只限于数学分析、线性代数和复变函数。此外，还用到了有关 Fredholm 积分方程的知识，已列入附录中。

由于着眼于实际的需要，因此一些定理的条件并不要求放得很宽，这样既可使论证简洁又无损于应用。但在所给条件下，则力求论证严谨，说理清楚；而对某些直观上很明显易于接受的事实则略而不证，对要用到的离主题较远的某些结果则仅指出参考文献而不加证明，以省篇幅。

书末所附参考文献也只列入本书所直接涉及的，因此并不是完备的。前述两专著中可找到极丰富的文献资料，

[2] 前 言

本书原稿曾在武汉大学数学系高年级学生和研究生中试用过. 我的同事们, 特别是林玉波教授, 以及阅读过原稿的同志们, 曾提出了不少很好的意见, 使书稿有很多改进, 作者在此表示衷心的感谢.

由于作者学识所限, 书中缺点错误在所难免, 尚祈广大读者不吝指正.

路见可

1984 年 6 月于武汉大学

目 录

前言

第一章 Cauchy 型积分	1
§ 1 Cauchy 型积分的意义	1
1.1 Cauchy 型积分的定义(1), 1.2 分区全纯函数(4).	
§ 2 Plemelj 公式	6
2.1 Cauchy 主值积分(6), 2.2 曲线上弧长与弦长的关系(9),	
2.3 Hölder 条件(13), 2.4 Cauchy 主值积分存在的一个充分条件(18), 2.5 Plemelj 公式(19).	
§ 3 Cauchy 型积分边值的性质	24
3.1 Привалов 定理(24), 3.2 Cauchy 型积分边值的导数(31).	
§ 4 核密度中含有参数的 Cauchy 主值积分和积分换序问题	32
4.1 核密度带参数的 Cauchy 主值积分(32), 4.2 积分换序问题(38), 4.3 Cauchy 主值积分反演公式(44).	
§ 5 无穷直线上的 Cauchy 型积分	48
5.1 H 类(48), 5.2 实轴上的 Cauchy 型积分及其性质(49).	
§ 6 解析函数边值的条件	53
6.1 全纯函数边值的条件(53), 6.2 亚纯函数边值的条件(56).	
§ 7 高阶奇异积分和留数定理的推广	58
7.1 Cauchy 定理的推广(58), 7.2 高阶奇异积分(61), 7.3 留数定理的推广(66).	
第二章 封闭曲线情况下的基本边值问题	74
§ 1 引言	74
1.1 Riemann 边值问题的提法(74), 1.2 跳跃问题及其解法(75).	
§ 2 齐次 Riemann 边值问题	77
2.1 齐次 R 问题与指标概念(77), 2.2 齐次 R 问题的解法——简	

[2] 目 录

单情况(78), 2.3 典则函数(80), 2.4 齐次 R 问题的解法——
一般情况(81).

§ 3 非齐次 Riemann 边值问题.....83

3.1 非齐次 R 问题的求解(83), 3.2 相联 R 问题 (85).

§ 4 无穷曲线上的 Riemann 边值问题.....87

4.1 实轴上的 R 问题(87), 4.2 几点说明(91).

§ 5 非正则型的 Riemann 边值问题.....92

5.1 齐次问题(92), 5.2 非齐次问题(94).

§ 6 Hilbert 边值问题.....96

6.1 问题的提法 (96), 6.2 单位圆内的函数在圆外的对称扩张(97),
6.3 单位圆的 H 问题(99), 6.4 半平面中的 H 问题(105).

§ 7 复合边值问题.....109

7.1 复合边值问题的提法与转化(109), 7.2 RH问题的求解(112).

§ 8 周期边值问题115

8.1 周期 Riemann 边值问题的提法与转化(115), 8.2 齐次 PR问
题(118), 8.3 非齐次 PR问题(123), 8.4 周期 Hilbert 问题(128).

§ 9 双周期 Riemann 边值问题134

9.1 椭圆函数(134), 9.2 双周期 Riemann 边值问题的提法与跳
跃问题的解法(136), 9.3 一般 DR 边值问题的解法(139).

§ 10 双准周期的 Riemann 边值问题.....143

10.1 双准周期解析函数(143), 10.2 加法双准周期的 R 问题(145),
10.3 乘法双准周期的 R 问题(146).

第三章 封闭曲线情况下的奇异积分方程152

§ 1 Cauchy 核的奇异积分方程和奇异算子.....152

1.1 一般概念(152), 1.2 奇异算子的性质(154).

§ 2 特征方程及其相联方程的解法.....156

2.1 特征方程的解法(156), 2.2 特征方程的相联方程的解
法(159), 2.3 特征方程的 Noether 定理(161).

§ 3 奇异积分方程的正则化及一般的 Noether 定理.....162

3.1 奇异积分方程的正则化(162), 3.2 Noether 定理(164).

§ 4 含周期核的奇异积分方程.....166

4.1 Hilbert 核的奇异积分方程(166), 4.2 含 ζ 函数核的奇异积

分方程(173).

- § 5 一类奇异积分方程的直接解法.....178
 5.1 引言(178), 5.2 求解的一般方法(180), 5.3 $a(z) \pm b(z)$ 无相同零点的正则型情况(185), 5.4 $a(z) \pm b(z)$ 无相同零点的非正则型情况(188), 5.5 $a(z) \pm b(z)$ 有相同零点的情况(196), 5.6 一些应用(202).

第四章 一般情况下的边值问题206

- § 1 Cauchy 型积分在端点附近的性质.....206
 1.1 核密度属 H 类的情况(206), 1.2 H^* 类函数(209), 1.3 核密度属 H^* 类时 Cauchy 型积分的性质(212), 1.4 核密度属 H^* 类时 Cauchy 主值积分的性质(217), 1.5 积分路径具有结点的情况(219).
 § 2 一般 Riemann 边值问题221
 2.1 开口弧段上的 R 问题(221), 2.2 带结点曲线上的 R 问题(227), 2.3 相联 R 问题(230), 2.4 几种重要特殊情况(231).
 § 3 间断系数的 Hilbert 边值问题.....236
 3.1 单位圆情况(236), 3.2 半平面情况(238).
 § 4 其它边值问题.....243
 4.1 一般复合边值问题(243), 4.2 一般的 PR 问题(246), 4.3 开口弧段的 DR 问题(251), 4.4 开口弧段的 QR 问题(261).

第五章 一般情况下的奇异积分方程272

- § 1 特征方程及其相联方程.....272
 1.1 特征方程(272), 1.2 相联方程(275), 1.3 一般 Cauchy 主值积分的反演(277).
 § 2 完全奇异积分方程.....279
 2.1 正则化问题(279), 2.2 正则化方程的讨论(282), 2.3 一般情况下的 Noether 定理(285).
 § 3 一般带周期核的奇异积分方程.....292
 3.1 曲线带结点的 Hilbert 核奇异积分方程(292), 3.2 一般 Hilbert 核积分的反演(294), 3.3 实轴上的 Hilbert 核积分的反演(305), 3.4 修改的反演问题(310), 3.5 开口弧段上带 ζ 函数核的奇异积分方程(319),

[4] 目 录

§ 4 方程具一阶奇异性解的情况.....	323
4.1 Fredholm 方程情况 (323), 4.2 Cauchy 核奇异方程情况(326), 4.3 特征方程及其相联方程的解(328).	
第六章 函数组的边值问题与奇异积分方程组	334
§ 1 函数组的 Riemann 边值问题	334
1.1 一些记号与名称(334), 1.2 齐次 R 问题化为 Fredholm 方程(336), 1.3 齐次 R 问题的典则解组(339), 1.4 齐次 R 问题的一般解与指标(346), 1.5 函数组的相联齐次 R 问题(350), 1.6 函数组的非齐次 R 问题(353).	
§ 2 函数组的 Hilbert 边值问题和复合边值问题.....	356
2.1 典则矩阵的一般表示(356), 2.2 函数组的齐次 H 问题(358), 2.3 函数组的非齐次 H 问题(364), 2.4 函数组的 RH 问题(365).	
§ 3 奇异积分方程组.....	367
3.1 特征奇异积分方程组(367), 3.2 特征方程的相联方程(371), 3.3 完全奇异积分方程组及其正则化(373), 3.4 奇异积分方程组的 Noether 定理(377).	
§ 4 某些直接有效解法.....	381
4.1 有理系数矩阵的 R 问题(381), 4.2 核与系数具解析性的奇异积分方程组(384), 4.3 解析核密度的奇异积分的反演(387).	
第七章 其它问题	389
§ 1 与某些分式线性变换群相联系的边值问题与奇异积分方程.....	389
1.1 分式线性变换群(389), 1.2 与有限分式线性变换群有关的 Riemann 边值问题(392), 1.3 与有限分式线性变换群有关的奇异积分方程(396).	
§ 2 带位移的边值问题和奇异积分方程.....	401
2.1 带位移的 Riemann 边值问题(401), 2.2 保角粘合定理以及 S R 问题转化为 R 问题(409), 2.3 其他带位移的边值问题(415), 2.4 带位移的奇异积分方程(424).	
§ 3 卷积型线性方程组.....	426
3.1 Laurent 变换(426), 3.2 (A)型方程组(427), 3.3 (B)型方程组(428).	
§ 4 Cauchy 主值积分的近似计算	430

4.1 一个原则性方法 (430), 4.2 Gauss-Chebyshev 型求积公式 (432), 4.3 用分段线性函数逼近 Cauchy 主值积分 (435).

附录 有关 Fredholm 积分方程的结果438

1. Fredholm 定理 (438), 2. 预解核 (440), 3. 推广 (442).

参考文献443

索引446

第一章

Cauchy 型积分

§1 Cauchy 型积分的意义

1.1 Cauchy 型积分的定义

解析函数边值问题中最重要的工具之一就是Cauchy型积分。我们来说明其定义。

设 $L = \sum_{j=1}^n L_j$ 是复平面中一组互不相交的光滑（或分段光滑）曲线 $L_1, \dots, L_n$ （开口或封闭）的集合（图1-1）。在每一 L_j 上取定一指向为正向，记作 L_j^+ ，从而 L 也取定了正向 $L^+ = \sum_{j=1}^n L_j^+$ ；它们的反向称作负向，分别记作 L_j^- 和 L^- 。

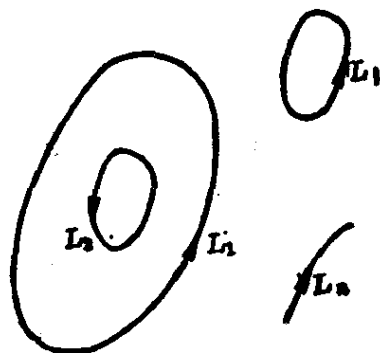


图 1-1

以后正向常常略去“+”这一上标，分别简记为 L_j 和 L 。

定义 1.1.1 设 $f(t)$ 为定义在 L 上的复函数，则称

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad z \in L, \quad (1.1)$$

是以 $f(t)$ 为核密度的 Cauchy 型积分，只要此积分存在。

如无特别声明，我们恒认为 $f(t)$ 在 L 上有界可积^①。于是 Cauchy 型积分(1.1)对平面上任何 $z \in L$ 都有意义，包括 $z = \infty$ 在内；且容易验证， $F(\infty) = 0$ 。亦即， $F(z)$ 定义在除 L 以外的整个扩充平面上。

当所有 L_j 都是封闭曲线，且 L 的正侧（即 L 的正向的左侧）围成一有界区域 D 时，Cauchy 型积分(1.1)与通常所说的区域 D

^① 如 $f(t)$ 无界，则认为其在 Riemann 意义下绝对可积。

的边界 L 上的 Cauchy 积分不同. 后者的定义是: 如果 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 内全纯 (即单值解析), 在 $\bar{D} = D + L$ 上连续, 则

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt, z \in L$$

叫做 $f(t)$ 在 L 上的 Cauchy 积分, 且有 Cauchy 积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt, z \in D. \quad (1.2)$$

Cauchy 型积分 (1.1) 与这里的差别在于: (1.1) 中的 $f(t)$ 只是定义在 L 上, 而并不知道它是否为 D 中某全纯函数连续延拓到 L 上的边值 (或即极限值), 即不知道是否存在着 D 中的全纯函数 $f(z)$, 使得

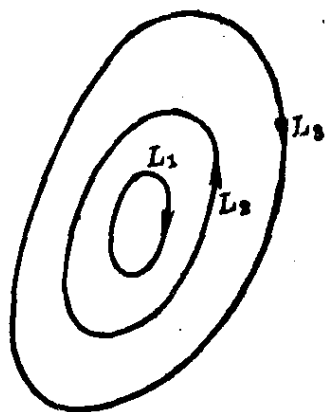
$$f(t) = \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ z \in D}} f(z),$$

当然也更谈不上 (1.2) 式是否成立.

所以, Cauchy 积分仅仅是 Cauchy 型积分的特殊情形; 而对于 (1.1), 一般也不能有

$$\lim_{\substack{z \rightarrow t \\ z \in D}} F(z) = f(t), t \in L.$$

例 1 设 $L = L_1 + L_2 + L_3$ 是一个包围着一个的三条光滑封闭曲线, 各 L_j 的正向已如图 1-2 所取. 试计算



$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{dt}{t-z}, z \in L.$$

解 显然

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} [\log(t-z)]_L \\ = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2\pi} [\arg(t-z)]_{L_j},$$

图 1-2

这里 (以及以后) $[\dots]_L$ 表示当 t 沿 L 的正向环行一周时方括号内 t 的连续函数值的改变量.

当 z 位于 L_1 所围的内域中时, 上式右端的三项中, 相应于 $j=1, 3$ 的两项均为 -1 , 而相应于 $j=2$ 的项为 $+1$, 因此 $F(z) = -1$. 当 z 位于 L_1 与 L_2 之间的环形区域中时, 右端相应于 $j=1$

的项为 0, 其它两项一为 +1 一为 -1, 故 $F(z)=0$. 同理, 当 z 位于 L_2 与 L_3 之间时, $F(z)=-1$; 当 z 位于 L_3 所围的外域中时, $F(z)=0$.

例 2 L 同上, 求

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t}{t-z} dt, \quad z \in L.$$

解 因

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L dt + \frac{z}{2\pi i} \int_L \frac{dt}{t-z} = \frac{z}{2\pi i} \int_L \frac{dt}{t-z},$$

故由上例知,

$$F(z) = \begin{cases} 0, & \text{当 } z \text{ 位于 } L_1, L_2 \text{ 之间或在 } L_3 \text{ 之外时;} \\ -z, & \text{其它情况.} \end{cases}$$

3 计算

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{ab}} \frac{dt}{t-z}, \quad z \in \widehat{ab},$$

这里 $\widehat{ab}$ 是一开口光滑弧段 ($a \neq b$), 且正向已取定自 a 到 b 的指向 (图 1-3).

解 显然

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi i} [\log(t-z)]_{\widehat{ab}} = \frac{1}{2\pi i} [\log(b-z) - \log(a-z)] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \log \frac{b-z}{a-z}, \end{aligned}$$

其中 $\log(t-z)$ 作为 t 的函数已在 $\widehat{ab}$ 上任意取定一连续支, 而最后右端式子中的对数可理解为 ζ 的函数 $\log \frac{b-\zeta}{a-\zeta}$ (它以 a, b 为枝点, 设平面已沿 $\widehat{ab}$ 剖开, 因此可取单值分支)

当 $\zeta = \infty$ 时取 0 值的那个分支 (因为 $F(\infty) = 0$) 在 $\zeta = z$ 处的值. 因此,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\ln \left| \frac{b-z}{a-z} \right| + i\theta \right]^{①},$$

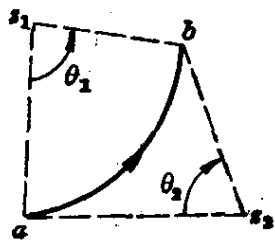


图 1-3

① 注意, 当 x 为正数时, 我们永远用 $\ln x$ 表示 x 的实对数值, 而把记号 $\log x$ 仍留给多值函数; 所以, $\log x = \ln x + 2\pi i$, $\log z = \ln |z| + i \arg z$ 等等.

其中 $\theta = \arg \frac{b-z}{a-z}$ 是 $z \rightarrow \infty$ 时 $\theta \rightarrow 0$ 的那一支. 事实上, θ 就是当 t 沿 $\widehat{ab}$ 走一遍时向量 $t-z$ 的幅角连续改变量, 即 $[\arg(t-z)]_{\widehat{ab}}$ 的值. 例如, 对于图中 z_1, z_2 , θ 分别取值 $\theta_1 > 0, \theta_2 < 0$.

此外还可看到, 当 z 在 a 或 b 附近时, $F(z)$ 有对数型的奇异性.

1.2 分区全纯函数

在 Cauchy 型积分 (1.1) 中, 取定某一点 $z \in L$, 于是可作 z 的一邻域与 L 无公共点, 在邻域中任取 $z+h$, 并令 $h \rightarrow 0$, 则用类似于对 Cauchy 积分情况时的证法, 可以证明 $F'(z)$ 存在, 且

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt, \quad z \in L; \quad (1.3)$$

更一般地, 对任何自然数 n , 将有

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt, \quad z \in L. \quad (1.3)'$$

由此可见, 当 z 不在 L 上时, 由 (1.1) 定义的 $F(z)$ 是解析的, 甚至在 $z = \infty$ 处也是如此 (请读者自证). 换句话说, 由 Cauchy 型积分 (1.1) 定义的函数 $F(z)$, 在被 L 分割的全平面的各个 (连通) 区域中, 包括 ∞ 点在内, 都是全纯的.

例如, 若 L 是一条封闭 (分段) 光滑曲线, 则 (1.1) 定义的 $F(z)$ 在 L 所围的内域与外域中分别各代表一全纯函数; 而若 L 是一条 (分段) 光滑开口弧段, 则 (1.1) 定义的 $F(z)$ 是全平面用 L 剖开后的区域中的一个全纯函数.

注意, 我们仍不知道当 z 从 L 的某侧趋于 L 上的某点 t 时, $F(z)$ 的极限值 (或称边值) 是否存在; 而这种极限值的存在性对我们来说是极端重要的.

一般地我们给出下面的定义.

定义 1.2.1 设 L 是有限条互不相交的封闭曲线的集, 它把全平面分割成有限个区域. $F(z)$ 是这样一函数, 它在每个这种区域中全纯, 在 $z = \infty$ 处至多有一极点, 且当 z 从 L 的任一确定的

侧趋于 L 上的任何点 t 时, $F(z)$ 的极限值即边值存在, 则称 $F(z)$ 是以 L 为跳跃(或间断)曲线的分区(片)全纯函数. 如果 L 中含有开口弧段, 则要求在各端点附近, $F(z)$ 有不到一阶的奇异性, 即, 若 c 为 L 的一端点, 则在 $z=c$ 附近,

$$|F(z)| \leq \frac{C}{|z-c|^\nu}, \quad 0 \leq \nu < 1, \quad C \text{ 为常数.}$$

注意, 当 z 从 L 的另一侧趋于 L 上同一点 t 时, 极限值可以不同. $F(z)$ 在某区域的边界上边值处处存在, 往往说成它可以从这个区域连续延拓到其边界上. 因此, 分区全纯函数可以从每个区域中连续延拓到边界上; 当然, 边界含有开口弧段时, 端点处例外.

如果在 $z=\infty$ 处 $F(z)$ 的 Laurent 展式为

$$F(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots, \quad a_k \neq 0,$$

则称 $F(z)$ 在 $z=\infty$ 处为 k 阶的或阶数为 k . 故 $k>0$ 时, 它以 $z=\infty$ 为 k 阶极点; $k<0$ 时, 它以 $z=\infty$ 为 $-k$ 阶零点; 而 $k=0$ 时, 表示 $F(\infty) \neq 0$ 且有限. 因此, 分区全纯函数 $F(z)$ 要求在 $z=\infty$ 处有有限阶.

当 z 从 L 的正侧即正向的左侧趋于 L 上某点 t 时(当然不是开口弧段的端点, 下同), $F(z)$ 的边值(如存在)记作 $F^+(t)$, 而当 z 从 L 的负侧即右侧趋于 t 时, 边值记为 $F^-(t)$ (图 1-4); 而把

$$\varphi(t) = F^+(t) - F^-(t)$$

称为 $F(z)$ 在 t 处的跳跃或跃度. $\varphi(t)$ 作为 t 的函数, 称为跳跃函数.

例如, 例 2 中的 $F(z)$ 为一分区全纯函数, 其跳跃函数为 $\varphi(t) = t$.

一般说来, (1.1) 中定义的 $F(z)$ 虽然在被 L 剖开的各区域中全纯, 而且

$F(\infty) = 0$ (即在 ∞ 处阶数至多为 -1), 但由于不知道 $F^\pm(t)$ 是否存在, 所以还不能断定它是否为一分区全纯函数. 在下一节中, 我们将对密度函数 $f(t)$ 加以适当条件限制, 便可证明 $F^\pm(t)$ 的确存

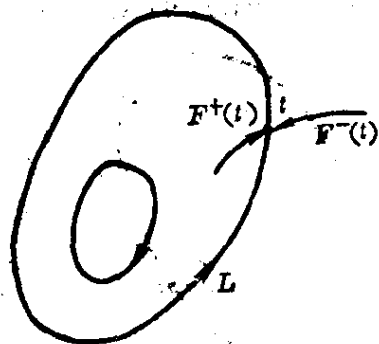


图 1-4

在, 从而 $F(z)$ 便是分区全纯函数了.

当然, 我们可以类似地定义分区亚纯(或称半纯)函数, 这里不再赘述.

习 题

1. 对于 Cauchy 型积分(1.1), 求证

$$F(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right), F'(z) = O\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \dots (z \rightarrow \infty).$$

2. 计算 Cauchy 型积分

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\operatorname{Re} t}{t-z} dt,$$

其中 L 是单位圆周 $|t|=1$, 且已取定反时针向为正向.

提示 在 L 上, $t\bar{t}=1$.

答 当 $|z| < 1$ 时, $F(z) = \frac{z}{2}$; 当 $|z| > 1$ 时, $F(z) = -\frac{1}{2z}$.

3. Cauchy 积分(1.2)是不是分区全纯函数?

§ 2 Plemelj 公 式

2.1 Cauchy 主值积分 为要解决上节中提出的边值 $F^\pm(t)$ 是否存在的问题, 即

$$\lim_{z \rightarrow t_0} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad t_0 \in L, \quad z \text{ 在 } L \text{ 正侧或负侧}, \quad (2.1)$$

是否存在的问题, 自然地就会想到要考虑积分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-t_0} dt, \quad t_0 \in L.$$

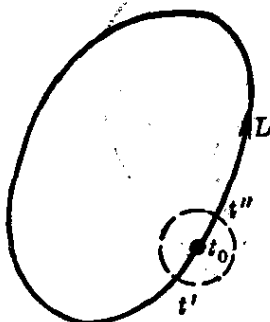


图 1-5

但很明显, 这个积分一般说来是发散的. 也就是说, 当在 L 上 t_0 的两边各任取一点 t' , t'' , 则

$$\lim_{t', t'' \rightarrow t_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L - \widehat{t't''}} \frac{f(t)}{t-t_0} dt \quad (2.2)$$

一般不存在. 然而, 与通常实域中定积分主值相类似, 如果以 t_0 为中心、充分小的正数 η 为半径作一圆周, 使它与 L 的交点恰为两个, 按 L 的正向, 一个是 t' 在 t_0 的后边, 另一个是 t'' 在 t_0 的前

边①, 以 L_η 记 $\widehat{t't''}$, 这时

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L-L_\eta} \frac{f(t)}{t-t_0} dt \quad (2.3)$$

是可能存在的(图 1-5).

例如, 如果 L 由一条光滑封闭曲线构成, $f(t) \equiv 1$, 取定 L 的反时针向为正向, 于是

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L-L_\eta} \frac{dt}{t-t_0} = \frac{1}{2\pi i} \{ \log(t'-t_0) - \log(t''-t_0) \},$$

这里 $\log(t-t_0)$ 作为 t 的函数已在 $L-L_\eta$ 上取定一(任意)连续分支. 但由于 $|t'-t_0| = |t''-t_0| = \eta$, 故上式又可写成

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L-L_\eta} \frac{dt}{t-t_0} = \frac{1}{2\pi} \{ \arg(t'-t_0) - \arg(t''-t_0) \},$$

右边 $\{\cdots\}$ 中为一角, 它等于当 t 自 t'' 沿 $L-L_\eta$ 变动到 t' 时复数 $t-t_0$ 的幅角连续改变的值, 即向量 $t''-t_0$ 到向量 $t'-t_0$ 间的夹角. 显然, 当 $\eta \rightarrow 0$ 从而 $t', t'' \rightarrow t_0$ 时, 这个角的极限值为 π . 因此,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L-L_\eta} \frac{dt}{t-t_0} = \frac{1}{2}. \quad (2.4)$$

但若 t', t'' 是 L 上 t_0 两边的任意两点, 由于 $t', t'' \rightarrow t_0$ 时, 一般 $\left| \frac{t'-t_0}{t''-t_0} \right|$ 的极限不存在, 所以 $\log \frac{t'-t_0}{t''-t_0}$ 的极限也不存在, 因此当 $f(t) \equiv 1$ 时 (2.2) 是不存在的.

一般地, 我们给出下面的定义.

定义 2.1.1 如果极限 (2.3) 存在, 则将此极限仍记为

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-t_0} dt,$$

称为 $f(t)$ 沿 L 上的 Cauchy 主值积分, $f(t)$ 称为它的核密度, 这个极限值就称为积分主值. $1/(t-t_0)$ 则称为 Cauchy 核.

注意, 如果极限 (2.2) 存在, 即上面这一积分在通常反常积分意义下收敛, 则其值当然与积分主值是一致的. 因此, 收敛的反常积分也可看作 Cauchy 主值积分. 以后遇见上面形式的积分时恒理解为 Cauchy 主值积分, 不一一声明.

① 对(分段)光滑曲线来说, 可以证明这种 η 一定存在, 证略.