微积分证明方法初析

贾建华 王克芬 编著

南开大学出版社

微积分证明方法初析

贾建华
王克芬
编著

南开大学出版社

内容提要

本书对一元函数微积分中一些基本的、有启发性的典型证明方法进行了比较系统地整理。在证明安排上，由浅入深、有易有难。有些例题采用多种方法证明，并举出适当的反例以加深对基本概念的理解。每节还都配备了适当数量的练习题。

本书可做为初学或复习微积分的读者的参考书，也可供讲授或辅导微积分课的教师参考之用。

微积分证明方法初析

贾建华 王克芬 编著

南开大学出版社出版

(天津八里台南开大学校内)

新华书店天津发行所发行

河北省邮电印刷厂印刷

1989年8月第1版 1989年8月第1次印刷

开本：787×1092 1/32 印张：9.375

字数：215千 印数：1—4,500

ISBN7-310-00099-4/O·19 定价：1.70元

前 言

微积分学是理、工、农、医等学科所需要的一门基础课。并且，随着自然科学与社会科学的相互渗透，如今，它也已成为某些社会科学的必修课题。学好这门课，不仅在于会用书本上的公式进行计算，更重要的是能掌握它的基本原理和基本概念，以及灵活运用基本原理和概念进行严格地数学证明，而这也正是学习微积分这门课的难点。笔者整理这本《微积分证明方法初析》，主观上就是希望能对初学微积分的读者在加强解题技巧和提高逻辑推理能力方面有所帮助。同时，对准备报考研究生的读者可作为复习资料之用。

在本书的选材过程中，笔者尽量考虑了有关资料中一些比较巧妙的、有启发性的典型例题。在证明方法上力图做到由浅入深、详细论证和解答，并且有些例题的证明是经过多年的教学实践反复修改而成的，使之尽量符合学生的思维特点和方法，以便对证明易于接受和理解，起到触类旁通的作用。此外，考虑到学生的思想方法及思维能力的差异，有些例题则给出了多种证明方法，这些证明有些是较直观和容易理解的，有些则是带有一定启发性和技巧性而不易想到的方法，目的是为了使学生不仅学会了证明命题的方法，而且通过证明命题，在思想方法上有所启示和收获，以便提高逻辑推理能力。考虑到对于一些概念的理解上，学生容易出现一些问题，整理本书时对一些典型例题均做了必要的说明，并举出了适当的反例以加深对基本概念的理解和开阔学生的思路。为了加强读者独立解

题能力，本书每节都配备了适当数量的练习题目，希望读者能独立地加以证明。

本书只整理了微积分学的一元函数部分，因为多元函数部分的证明方法基本上与一元函数是大同小异的，只要很好地掌握了一元函数的证明思路，一般多元函数的证明则是不会遇到太大困难的。

在整理本书的过程中，曾多次请教过定光桂教授。也得到一些同事们的热情鼓励和帮助，在此一并致谢。

由于水平所限，本书缺点错误在所难免，敬请读者批评指正。

贾建华　王克芬

1987年2月

目 录

第一章　数列的极限

§1.1　数列极限的定义及实数理论

基础理论

1.　数列极限的定义

如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在正整数N，使得当$n>N$时，总有

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

则称数列$\{x_n\}$有极限a（或称$\{x_n\}$收敛于a），记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \quad (\text{或}\ x_n\to a \quad (n\to\infty))$$

如果对于任意给定的$M>0$，总存在正整数N，使得当$n>N$时，总有

$$|x_n|>M$$

则称数列$\{x_n\}$趋向于无穷，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty \quad (\text{或}\ x_n\to\infty \quad (n\to\infty))$$

如果对于任意给定的$M>0$，总存在正整数N，使得当$n>N$时，总有

$$x_n>M\ (\text{或} x_n<-M)$$

则称数列$\{x_n\}$趋向于正（或负）无穷，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty \quad (\text{或} \lim_{n\to\infty} x_n=-\infty)$$

2. 阿基米德（Archimedes）公理

若 $\varepsilon>0$ 和 $M>0$ 是任意两个正实数，则存在正整数 N，使 $N\varepsilon>M$。

3. 有理数和无理数在实数系中的稠密性

任何两个相异的实数之间既存在有理数，也存在无理数。

4. 公理

任何有上界的实数集必有上确界。

利用定义证明数列 $\{x_n\}$ 的极限是 a，一般要掌握两个要点：一是将数列 $\{|x_n-a|\}$ 的各项（或 $n>N$ 时的各项）适当放大，使之成为一个较简单的数列；二是要保证放大后的数列仍是无穷小量，也就是放大后的数列其极限为零。

例 1 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^a}=0$ （其中 $a>0$）。

证 因为 $e>2$，所以对任意的正整数 n，有

$$e^n>(1+1)^n\geqslant 1+n>n$$

两边取对数得

$$n>\ln n$$

$0<a\leq 1$ 或 $a>1$

故

$$\left|\frac{\ln n}{n^a}\right|=\frac{\ln n}{n^a}=\frac{\frac{1}{a}\ln n^a}{n^a}$$

$$<\frac{\frac{1}{a}\ln([n^a]^{①}+1)}{n^a}\to\neq 0$$

① $[a]$ 表示不超过数 a 的最大整数。例如 $[3.5]=3$，$[0.5]=0$，$[-2.5]=-3$，$[\sqrt{5}]=2$。

$$
\leqslant \frac{\frac{4}{\alpha}\ln(2[n^{\alpha/2}])}{n^{\alpha}}
$$

$$
< \frac{\frac{4}{\alpha}\cdot 2[n^{\alpha/2}]}{n^{\alpha}}
$$

$$
\leqslant \frac{\frac{4}{\alpha}\cdot n^{\alpha/2}}{n^{\alpha}}
$$

$$
= \frac{4}{\alpha n^{\alpha/2}}
$$

因此，对任意给定的$\varepsilon>0$，令 $N=\left[\left(\frac{4}{\alpha\varepsilon}\right)^{2/\alpha}\right]+1$， 则当 $n>N$时

$$
\left|\frac{\ln n}{n^{\alpha}}\right| < \frac{4}{\alpha n^{\frac{\alpha}{2}}} < \frac{4}{\alpha\left(\frac{4}{\alpha\varepsilon}\right)^{\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{2}}} = \varepsilon
$$

于是

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}} = 0
$$

例2 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

证 令 $\sqrt[n]{n}=1+\lambda_n$ $(n\geqslant 2,\ \lambda_n>0)$，则

$$
\begin{aligned}
n &= (1+\lambda_n)^n \\
&\geqslant 1+n\lambda_n+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2 \\
&> 1+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2
\end{aligned}
$$

所以 $$\lambda_n^2<\frac{2(n-1)}{n(n-1)}=\frac{2}{n}$$

故 $$\lambda_n<\sqrt{\frac{2}{n}}$$

从而对任意给定的 $\varepsilon>0$，令 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right]+1$，则当 $n>N$ 时

$$|\sqrt[n]{n}-1|=\sqrt[n]{n}-1=\lambda_n<\sqrt{\frac{2}{n}}<\varepsilon$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

上面讲到用数列极限的定义直接证明某数列的极限是 a 的方法。但我们经常遇到如下的问题：已知数列 $\{x_n\}$ 的极限是 a，证明另一个由 $\{x_n\}$ 所确定的数列 $\{y_n\}$ 的极限是 b。这类问题一般仍是反复运用数列极限定义进行证明。具体方法如下：由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 知，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$。再根据已知条件推得存在正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时 $|y_n-b|<\varepsilon$ 成立，从而命题得证。

例3 设 $x_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$，若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}=a$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=a$ （a 有限或正无穷）。

证 分三种情形证明。

（1） 设 $0<a<+\infty$。由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}=a$，故对任给

的 $\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<a$), 必存在正整数 N_1, 当 $n>N_1$ 时

$$\left|\frac{x_n}{x_{n-1}}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

即
$$a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_n}{x_{n-1}}<a+\frac{\varepsilon}{2}$$

所以

$$a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_{N_1+1}}{x_{N_1}}<a+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_{N_1+2}}{x_{N_1+1}}<a+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_n}{x_{n-1}}<a+\frac{\varepsilon}{2}$$

故
$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N_1}$$

$$<\frac{x_{N_1+1}}{x_{N_1}}\cdot\frac{x_{N_1+2}}{x_{N_1+1}}\cdot\cdots\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}$$

$$<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N_1}$$

从而

$$\left[\frac{x_{N_1}}{\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_1}}\right]^{1/n}\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\sqrt[n]{x_n}$$

$$<\left[\frac{x_{N_1}}{\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_1}}\right]^{1/n}\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x_{N_1}}{\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_1}}\right]^{1/n}\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)=a-\frac{\varepsilon}{2}>a-\varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x_{N_1}}{\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_1}}\right]^{1/n}\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)=a+\frac{\varepsilon}{2}<a+\varepsilon$$

故存在正整数 N_2，使得当 $n>N_2$ 时

$$\left[\frac{x_{N_1}}{\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_1}}\right]^{1/n}\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)>a-\varepsilon$$

及

$$\left[\frac{x_{N_1}}{\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_1}}\right]^{1/n}\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)<a+\varepsilon$$

-不宜省去

同时成立

令 $N=\max(N_1,N_2)$，则当 $n>N$ 时

$$a-\varepsilon<\sqrt[n]{x_n}<a+\varepsilon$$

即
$$|\sqrt[n]{x_n}-a|<\varepsilon$$

因此
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=a\text{。}$$

（2） 设 $a=+\infty$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{x_{n-1}}=+\infty$，所以对任给的 $M>0$，存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，有

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}>2M$$

所以
$$\frac{x_{N_1+1}}{x_{N_1}}>2M$$

$$\frac{x_{N_1+2}}{x_{N_1+1}}>2M$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}>2M$$

故

$$\frac{x_n}{x_{N_1}}=\frac{x_{N_1+1}}{x_{N_1}}\cdot\frac{x_{N_1+2}}{x_{N_1+1}}\cdot\cdots\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}$$
$$<(2M)^{n-N_1}$$

从而

$$\sqrt[n]{x_n}>2M\left[\frac{x_{N_1}}{(2M)^{N_1}}\right]^{1/n}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} 2M\left[\frac{x_{N_1}}{(2M)^{N_1}}\right]^{1/n}=2M>M$$

所以存在正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时

$$2M\left[\frac{x_{N_1}}{(2M)^{N_1}}\right]^{1/n}>M$$

不能去掉.

令 $N=\max(N_1,\ N_2)$，则当 $n>N$ 时

$$\sqrt[n]{x_n}>2M\left[\frac{x_{N_1}}{(2M)^{N_1}}\right]^{1/n}>M$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=+\infty$。

（3） 设 $a=0$。令 $y_n=\frac{1}{x_n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{x_n}{x_{n-1}}}=+\infty$$

由(2)得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{y_n}=+\infty$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{y_n}}=0$$

必须指出，本命题的逆命题不成立。例如$x_n=2+(-1)^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}$不存在。

例 4 设 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，且存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$\{y_n\}$ 严格单增，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$（$a$ 有限或正负无穷），则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$。

在证明例 4 之前，先证明一个引理：如果

$$\alpha<\frac{a_1}{b_1}<\beta,\quad \alpha<\frac{a_2}{b_2}<\beta,\quad \cdots,\quad \alpha<\frac{a_n}{b_n}<\beta$$

其中b_1，b_2，$\cdots$，$b_n>0$，则

$$\alpha<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}<\beta$$

证 因为 $\alpha<\frac{a_k}{b_k}<\beta\,(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，所以

$$\alpha b_k<a_k<\beta b_k$$

故

$$\alpha(b_1+b_2+\cdots+b_n)<a_1+a_2+\cdots+a_n$$
$$<\beta(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

从而 $$\alpha<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}<\beta$$

下面对例 4 进行证明。

证 分三种情形证明。

（1） 设 a 有限。不妨设 $n\geqslant 1$ 时，$\{y_n\}$ 严格单增。因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$$

所以对任给的 $\varepsilon>0$．存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时

$$a-\varepsilon<\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}<a+\varepsilon$$

由于

$$\frac{x_n-x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}$$

$$=\frac{(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_{N_1+1}-x_{N_1})}{(y_n-y_{n-1})+(y_{n-1}-y_{n-2})+\cdots+(y_{N_1+1}-y_{N_1})}$$

故由引理得

$$a-\varepsilon<\frac{x_n-x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}<a+\varepsilon$$

即 $$\left|\frac{x_n-x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}-a\right|<\varepsilon$$

而

$$\frac{x_n}{y_n}=\frac{x_n}{y_n}-\frac{x_n-x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}+\frac{x_n-x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}$$

$$=\frac{x_n-x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}+\frac{x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}-\frac{x_ny_{N_1}}{y_n(y_n-y_{N_1})}$$

$$=\frac{x_n-x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}+\frac{x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}$$

$$-\frac{(x_n-x_{N_1})y_{N_1}}{y_n(y_n-y_{N_1})}-\frac{x_{N_1}y_{N_1}}{y_n(y_n-y_{N_1})}$$

又
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n-x_{N_1})y_{N_1}}{y_n(y_n-y_{N_1})}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{N_1}y_{N_1}}{y_n(y_n-y_{N_1})}=0$$

所以存在正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时

$$\left|\frac{x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{(x_n-x_{N_1})y_{N_1}}{y_n(y_n-y_{N_1})}\right|<\varepsilon$$

及
$$\left|\frac{x_{N_1}y_{N_1}}{y_n(y_n-y_{N_1})}\right|<\varepsilon$$

同时成立。

令 $N=\max(N_1, N_2)$，则当 $n>N$ 时

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right| &\leqslant \left|\frac{x_n-x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}-a\right|+\left|\frac{x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}\right| \\ &\quad+\left|\frac{(x_n-x_{N_1})y_{N_1}}{y_n(y_n-y_{N_1})}\right|+\left|\frac{x_{N_1}y_{N_1}}{y_n(y_n-y_{N_1})}\right| \\ &<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=4\varepsilon\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$。