张鸿庆　王　鸣　著

有限元的数学理论

科学出版社

有限元的数学理论

张鸿庆　王　鸣　著

（国家自然科学基金资助项目）

科　学　出　版　社

1991

（京）新登字092号

内容简介

本书系统地论述了有限元方法的数学理论．全书共分两个部分．第一部分介绍有限元方法发展的历史，以及必要的数学基础知识．内容包括：变分法原理与变分法、Hilbert空间、以能量为长度的几何、有限元理论的直观背景．第二部分详细介绍有限元方法的数学理论．内容包括：有限元空间、有限元的基本条件、有限元空间的基本性质和有限元方法．

本书读者范围：大专院校计算数学、工程力学专业的师生、科研人员、工程技术人员．

有限元的数学理论

张鸿庆　王　鸣　著

责任编辑　林　鹏

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1991年12月第一版　开本：850×1168　1/32

1991年12月第一次印刷　印张：12

印数：0001—2 000　字数：317 000

ISBN 7-03-002560-1/O·483

定价：13.10元

序　言

有限元方法是近一二十年来发展起来的重要方法． 近年来，有限元方法除了传统的协调元方法以外，还发展到非协调元、杂交元、混合元和拟协调元方法．本书介绍有限元的数学理论，它在拟协调元方法的基础上将上述有限元方法统一到多变量有限元理论中．此外利用我们提出的多变量有限元的逼近性、弱闭性、嵌入性和紧致性，统一地证明上述各种单元的收敛性，给出了构造有效单元的方法．

有限元方法在工程技术中有着广泛的应用．但有限元数学理论是以 Sobolev 空间理论为基础的，许多工程技术人员由于不懂泛函分析等数学基础知识，无法了解有限元数学理论的现状．为了使广大的非数学工作者能够了解有限元方法的数学基础，本书的第一部分介绍有关的基础知识和有限元理论的直观背景．与传统的数学书不同，第一部分不强调推理的严格性而采用直观性推理方法．对每个定理先根据物理的直观背景，并利用几何类比或代数类比使读者猜出这个定理的结论，然后力求用形象的方法使读者对这个定理的正确性有深刻的理解．此外还介绍了数学思想的发展过程，从科学史的观点论述一些基本思想如何影响到有限元数学理论的发展．

第二部分介绍有限元空间的构造方法、有限元的基本假设、建立在这些假设基础上的有限元空间的基本性质及其应用，以及线性微分方程的有限元收敛性．还结合拟协调元技巧给出有限元空间的构造方法，这一方法包括了协调元和非协调元方法，它们之间有本质的区别：不要求导数关系在单元上点点成立，只是在弱形式下的近似成立．对于这样的有限元空间，详细地讨论了它们的逼近性、弱闭性、嵌入性和紧致性等性质．这些性质在微分方程的有

限元方法收敛性讨论中，起着决定性的作用。我们把保证这些性质成立的条件归结为有限元的仿射连续性、尺度不变性、弱连续性、逼近性、单元秩条件和强 F-E 检验的假定。这些假定易于验证，适用范围广泛，而且具有力学意义。

由于本书在编写方法上与其它书不同，加之我们的学识有限，难免有错误和不当之处，敬请读者批评指正。

在本书的写作过程中，作者得到了唐立民教授、钱伟长教授、卞学璜教授的热情支持，应隆安教授细致地审阅了本书，并提出了不少富有建设性的意见，在此对他们表示衷心的感谢。

作　者

1991 年于北京

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

目　　录

第一章　变分原理与变分法

§1.1　变分法的起源和例子

从自然科学史来看，古人对自然规律的一个重要观点就是，大自然不做多余的事情，总是以数学上可能最好的方式安排一切．例如，光的传播路径是直线，而两点之间的距离以直线为最短，所以光线走的是最短路径．早在 Euclid 时代就已经知道，在光线反射时，入射角等于反射角；亚历山大城的数学家 Heron 证明了光线实际取的路径仍是所有可能路径中最短的路径．例如光线从 A 点出发遇到平面 CE 而反射到 B 点，则 $\angle ACD=\angle BCD$．如果在 CE 平面上任取一点 E，容易证明 $AE+BE>AC+BC$，因此光线在反射时走的路径是所有可能路径中最短的路径．根据这一点，以及哲学和美学上的考虑，便有人认为大自然总是以可能最好的方式作出安排，这个观点为许多科学家和哲学家所接受．后来人们又发现了光的折射现象，从介质 I 的 A 点到介质 II 的 B 点，光线走的不是最短距离（图 1.1.2），这些科学家和哲学家们的信仰发生了动摇．而著名数学家 Fermat 怀疑折射定律是否正确．后来他发现，由于 I 和 II 是不同介质，光线的传播速度不

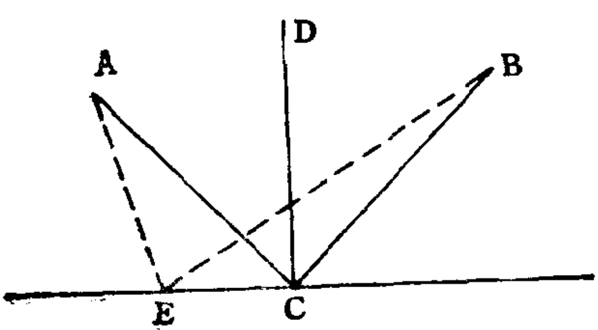

图　1.1.1

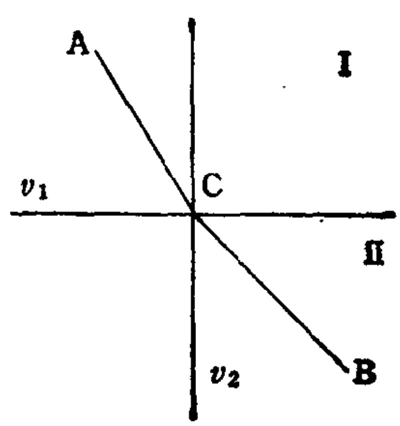

图　1.1.2

同，从A到B经过C点，虽然并非最短距离，但时间却最短。对均匀介质速度不变，最短时间与最短距离是一致的，但若速度不同，两者就不一样了。比如从A到C是步行，但C处有汽车，从C到B乘车，这样花费的时间比从A直线步行到B花费的时间还要少.因此 Fermat 提出最小时间原理，即在从A到B的所有可能的途径中，光线的实际途径是花费时间最短的途径。Fermat 不仅利用这个原理推出了光的折射定律，而且还利用这个原理解释了在均匀介质中光的传播和反射，Huygens 把这个原理推广到具有变折射率的介质上。后来 Bernoulli, Euler 和 Lagrange 创立变分法，指出从变分原理可以推出 Newton 力学。 Maupertuis 积极鼓吹最小作用量原理，认为它是宇宙的普遍原理. 以后 Hamilton 提出著名的 Hamilton 原理： 设T是体系的动能，U是体系的势能，$L=T-U$ 是体系的 Lagrange 函数，则从时刻 t_0 到时刻 t_1 的真实运动使积分 $J=\int_{t_0}^{t_1} L dt$ 取最小值。Helmholtz 把这个原理应用于一系列非力学过程。热传导理论、电动力学、量子力学、广义相对论和量子场论都可以广泛应用这个原理。

前面说过，变分原理是宇宙的基本原理之一，有限元方法也是这个原理的产物。在叙述变分原理之前，我们先扼要介绍一下变分法的基本知识. 所谓变分法就是寻求泛函极值的一门学问。为了便于理解变分问题，我们从历史上有名的几个问题讲起.

1. 最速降线问题

这个问题是 John Bernoulli 向其它数学家挑战时提出的.假设B点不在A点的垂直下方，在从A到B的所有曲线中，选择一条曲线，使得一质点沿这条曲线从A点滑到B点所用时间最短，这里摩擦和空气阻力都忽略不计. 从A到B当然直线距离最短，但速度未必最大，因此时间未必最短。 质点从A到 P，势能减少 mgy，而获得动能 $\frac{1}{2}mv^2$（这里假设初速度为零），v 是质点在P点时的

速度. 由能量守恒定律，$v=\sqrt{2gy}$，于是，

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gy},$$

此处 y 是 P 点的纵坐标.

显然

$$dt=\frac{ds}{\sqrt{2gy}}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx,$$

这里用到

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+y'^2}dx.$$

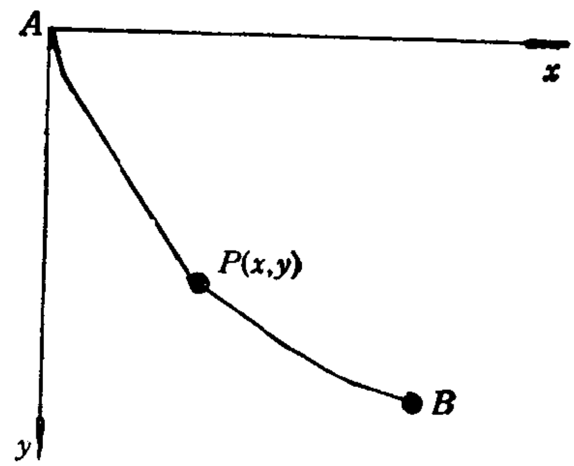

图 1.1.3

从 A 到 B 积分，设总降落时间为 T，即得

$$T=\int_0^T dt=\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx,$$

其中 x_1 是 B 点的横坐标. 最速降线问题为：在满足 $y(0)=0$，$y(x_1)=y_1$ 的一切函数 $y(x)$ 中，选出一个函数 $y(x)$，使

$$J(y)=\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx \tag{1.1.1}$$

取最小值. 注意在 (1.1.1) 中，给定一个 $y(x)$，就有一个 J 的数值与之对应，所以 J 可以看成是曲线 $y(x)$ 的函数. 这里自变量是函数或者说是曲线，这样的函数 $J(y)$ 叫做泛函. 泛函和函数不同，它的自变量是函数而不是数，它和复合函数也不同. 设

$$y=f(g(x)),$$

y 是 g 的函数，g 是 x 的函数，从而 y 是 x 的函数，即 y 是一个复合函数. 但是在 $J(y)$ 中把 y 看成一个整体，$J(y)$ 只是 y 的函数，而不是 x 的函数，只有给定 $y(x)$ 才有一个 $J(y)$ 与它对应，给定 x 的一个值，无法确定 J 的相应值，这样的函数叫做泛函. 而最速降线问题就是求形如 (1.1.1) 的泛函在条件

$$y(0)=0,\ y(x_1)=y_1$$

下的极小值，这样的问题就是变分法所要研究的问题。

2. 短程线问题

所谓短程线就是从一点到另一点的距离最短的线。显然平面上的短程线就是直线，而曲面上的短程线则可能是曲线，例如球面上的短程线是过球心的大圆，柱面上的短程线是螺旋线，植物爬蔓就是爬的短程线。一般地说，如果曲面能象柱面一样展成平面，那么在展开曲面上为直线的那些点就构成曲面上的短程线。由于多数曲面不能展成平面，所以求任意曲面的短程线并非是一个简单的问题。设 A 和 B 是曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 上给定的两点，过 A 和 B 两点的短程线就是连结 A 和 B 两点距离最短的线。设 A 点坐标为 (x_1,y_1,z_1)，B 点坐标为 (x_2,y_2,z_2)，在曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 上连结 A 和 B 的曲线的方程为 $y=y(x),z=z(x)$，则从 A 到 B 的曲线的长度为

$$L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2+z'^2}dx. \tag{1.1.2}$$

短程线问题可以叙述为：在一切满足条件

$$\begin{gathered}\varphi(x,y(x),z(x))=0,\\ y(x_1)=y_1,\ y(x_2)=y_2,\\ z(x_1)=z_1,\ z(x_2)=z_2\end{gathered} \tag{1.1.3}$$

的函数 $y=y(x)$，$z=z(x)$ 中选取一对 $y=y(x)$，$z=z(x)$，使 L 最小。

在 (1.1.2) 中 L 是 $y(x)$ 和 $z(x)$ 的函数，所以 L 也是一个泛函，短程线问题就是在条件 (1.1.3) 下求泛函 L 的极小值，这样的问题也属于变分法的研究范围。

短程线问题不仅有重要的几何意义，也有重要的物理意义. 光线在均匀介质中走的是短程线，不受外力作用的物体走的也是短程线，也就是直线. 但在 Einstein 的广义相对论中，时间和空间联系在一起，并且是有曲率的，光线走的是四维 Riemann 时空中的

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

短程线，这时的短程线已不是一条直线，这个问题也是一个变分法的问题.

3. 等周问题

所谓等周问题就是在长度一定的闭曲线中，什么曲线所围的面积最大. 这个问题在古希腊时代就知道答案是个圆. 相传古代有个叫 Dido 的公主，因为犯了过失被贬，只给她一张牛皮大小的土地. 这个公主把牛皮割成许多细条，结成一根绳子，以海岸作为一边，将绳子围成半圆形，这块土地就成了她的封地. 她在这块土地上建立了伽太基城. 可见这个问题已有悠久的历史. 这个问题的答案虽然早就有了，然而求这类问题的系统方法却是变分法产生以后的事. 假设所考虑的曲线用参数形式表示:

$$x = x(s), \quad y = y(s),$$

其中 s 是参数. 设 $x_1 = x(s_1)$, $y_1 = y(s_1)$ 是曲线上一个给定点，当 s 变化时点 (x,y) 沿着曲线移动. 由于曲线是封闭的，必存在一个 s_2 使点 $x_2 = x(s_2)$, $y_2 = y(s_2)$ 与 (x_1,y_1) 重合，因此曲线周长可表示成

$$L = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\, ds.$$

这条曲线所围成的面积为

$$R = \iint_{\Omega} dx dy,$$

其中 Ω 是这条曲线所围成的区域. 在 Green 公式

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P dx + Q dy$$

中取 $P = -\frac{y}{2}$, $Q = \frac{x}{2}$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1,$$

于是

$$R=\iint\limits_{\Omega} dxdy=\frac{1}{2}\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} xdy-ydx,$$

从而

$$R=\frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}(xy'(s)-yx'(s))ds. \tag{1.1.4}$$

等周问题就是在条件

$$x(s_1)=x(s_2),\ y(s_1)=y(s_2),$$
$$\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}ds=L \tag{1.1.5}$$

下求泛函 R 的极值，这也是变分法讨论的问题.

4. Fermat 原理

Fermat 原理指出：光通过介质的路径，与其他假想路径相比，所需的时间为最小值. 以二维空间为例，设介质的折射率为 $\mu(x,y)$，而光线通过介质的速度 $v(x,y)=\dfrac{c}{\mu(x,y)}$，其中 c 是真空中光速，是一个常数. 从原点 (0, 0) 到 (x_1, y_1) 所需时间为

$$T=\int_0^l\frac{ds}{v}=\frac{1}{c}\int_0^{x_1}\mu(x,y)\sqrt{1+(y'(x))^2}dx, \tag{1.1.6}$$

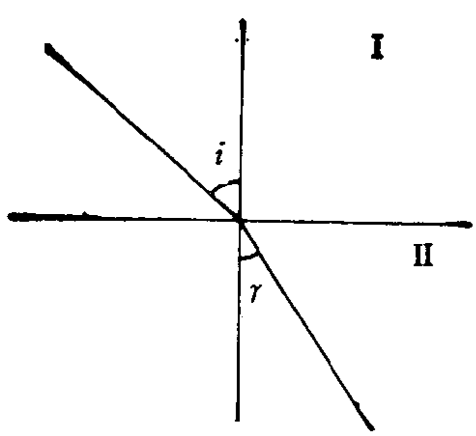

图 1.1.4

其中 $y=y(x)$ 为光线通过的路径，l 是路径的长度，Fermat 原理就是求 $y=y(x)$ 使泛函 (1.1.6) 取极小值.

取 $\dfrac{1}{c}\mu(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{2gy}}$，则 Fermat 原理与最速降线问题等价.

根据 Snell 条件

$$\frac{\sin i}{\sin\gamma}=\frac{v_1}{v_2},$$

v_i 是光在第 i 个介质中的速度。取第一介质为真空，$\frac{c}{v}=\mu$，μ 是折射率，据此可用作图方法做出最速降线。

§1.2 变分问题的解法，Euler 方程

现在我们考虑如下的问题：在满足条件

$$y(x_1)=y_1,\ y(x_2)=y_2 \tag{1.2.1}$$

的函数中求函数 $y(x)$ 使泛函

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx \tag{1.2.2}$$

取极值，我们的目的是对这类问题给出一个一般的解法。这是一个求泛函极值的问题，我们是不会解的，但是对普通函数求极值已有了一套成熟的方法。因此我们试图把不会解的问题转化成会解的问题，也就是把求泛函的极值转化成求普通函数的极值。为此我们假设 $y_0(x)$ 是要求的解，$\delta y(x)$ 满足条件

$$\delta y(x_1)=\delta y(x_2)=0,$$

则 $y(x)=y_0(x)+\varepsilon\delta y(x)$ 满足条件 (1.2.1)，将 $y(x)$ 代入 (1.2.2) 就有

$$J(y(x))=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y_0(x)+\varepsilon\delta y(x),\ y_0'(x)+\varepsilon\delta y'(x))dx, \tag{1.2.3}$$

这里 ε 是任意实数。注意在 (1.2.3) 中 $y_0(x)$ 和 $\delta y(x)$ 都是给定的函数，只有 ε 可以任意变动，因此 $J(y)$ 实际是 ε 的函数，不妨记以 $\Pi(\varepsilon)$。如果以 $\Pi(\varepsilon)$ 代替 $J(y)$，y_0 代替 $y_0(x)$，δy 代表 $\delta y(x)$，$\delta y'$ 代替 $(\delta y(x))'$，则 (1.2.3) 可以写成

$$\Pi(\varepsilon)=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y_0+\varepsilon\delta y,y_0'+\varepsilon\delta y')dx. \tag{1.2.4}$$

既然泛函 $J(y)$ 在 $y=y_0(x)$ 时取极值，那么相应的 $\Pi(\varepsilon)$ 当 $\varepsilon=0$ 时取极值。由于 ε 是普通的数，$\Pi(\varepsilon)$ 是普通的函数，所以我们已经把求泛函极值问题转化为求普通函数的极值问题。既

然当 $\varepsilon=0$ 时，$\Pi(\varepsilon)$ 取极值，那么由数学分析的知识可知

$$\Pi'(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0}=0.$$

根据复合函数求导的法则，我们有

$$\begin{aligned}\frac{d\Pi(\varepsilon)}{d\varepsilon}&=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F(x,y_0+\varepsilon\delta y,y_0'+\varepsilon\delta y')}{\partial y}\right.\\&\quad\cdot\frac{d(y_0+\varepsilon\delta y)}{d\varepsilon}+\frac{\partial F(x,y_0+\varepsilon\delta y,y_0'+\varepsilon\delta y')}{\partial y'}\\&\quad\left.\cdot\frac{d(y_0'+\varepsilon\delta y')}{d\varepsilon}\right]dx\\&=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F(x,y_0+\varepsilon\delta y,y_0'+\varepsilon\delta y')}{\partial y}\delta y\right.\\&\quad\left.+\frac{\partial F(x,y_0+\varepsilon\delta y,y_0'+\varepsilon\delta y')}{\partial y'}\delta y'\right]dx,\end{aligned}$$

在上式中令 $\varepsilon=0$，就有

$$\left.\frac{d\Pi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx, \qquad (1.2.5)$$

其中

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\left.\frac{\partial F(x,y_0+\varepsilon\delta y,y_0'+\varepsilon\delta y')}{\partial y}\right|_{\varepsilon=0},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=\left.\frac{\partial F(x,y_0+\varepsilon\delta y,y_0'+\varepsilon\delta y')}{\partial y'}\right|_{\varepsilon=0}.$$

我们把 $\left.\frac{d\Pi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ 叫做泛函 $J(y)$ 的变分，记以 δJ，泛函的变分相当于函数的导数。(1.2.5) 也可以写成

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\delta F dx=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]dx, \qquad (1.2.6)$$

其中 $y=y_0(x)$. 由于 $y_0(x)$ 是使 $J(y)$ 取极值的函数，因此

$$\delta J=0,$$

亦即

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]dx=0, \qquad (1.2.7)$$

(1.2.7) 是 $y_0(x)$ 使 $J(y)$ 取极值的必要条件。就象 x_0 使 $f(x)$ 取极值的必要条件是 $f'(x)=0$ 一样。这个过程用图表示如下：

$$
\begin{tikzcd}
y_0(x)\text{ 是 }J(y)\text{ 的极值函数} \arrow[r, dotted] \arrow[d, "y=y_0+\varepsilon\delta y" ', "\Pi(\varepsilon)=J(y_0+\varepsilon\delta y)"] & \delta J=0 \\
\varepsilon=0\text{ 使 }\Pi(\varepsilon)\text{ 取极值} \arrow[r] & \Pi'(0)=0 \arrow[u, "\text{定义 }\delta J=\Pi'(0)" ']
\end{tikzcd}
$$

设 0 是原来的问题，A 是问题的答案，S 是解题过程，T 是变换：$0\to 0^*$，T^* 是变换：$A^*\to A$，则有

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed, "S"] \arrow[d, "T" '] & A \\
0^* \arrow[r, dashed, "S^*"] & A^* \arrow[u, "T^*" ']
\end{tikzcd}
$$

因此，$S=T^*S^*T$。

例如设 S 是眼、脑、手，S^* 是感受器、控制器、效应器。T：象的重量→石头重量，S^* 是称石头，S 是称象，T^*：石头重量→象的重量，这就把称象的问题变成称石头的问题。这个原则在控制论中叫共轭控制，在方法论中叫关系反演映射原则。

(1.2.7) 不便于应用，必须加以改变，怎么变呢？我们有这样一个经验："当你不知道下一步怎么办时，就去做分部积分."分部积分是变换形式的好方法，我们不妨试一下。将(1.2.7)左端第二项分部积分就有

$$
\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}d(\delta y)=\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\delta y\bigg|_{x_1}^{x_1}
$$

$$
-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx=-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx,
$$

这里用到了条件 $\delta y(x_1)=\delta y(x_2)=0$。将上式代入 (1.2.7) 得到

$$
\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y dx=0. \qquad (1.2.8)
$$

由于 δy 是满足条件 $\delta y(x_1)=\delta y(x_2)=0$ 的任意函数，所以在区间 (x_1,x_2) 上

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0, \tag{1.2.9}$$

这里最后一步用到所谓变分法基本原理:

定理 1.2.1 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,若对任意满足

$$\varphi(a)=\varphi(b)=0$$

的函数 $\varphi(x)$,都有

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=0,$$

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处为零.

证明 用反证法. 假设 x_0 是 (a, b) 中的点，在 x_0 处 $f(x)\neq 0$，不妨设 $f(x_0)>0$，则由于 $f(x)$ 是连续函数,故存在 x_0 的一个充分小的完全包含在 $[a,b]$ 内的邻域,使得在这个邻域内 $f(x)>0$. 如果我们选择 $\varphi(x)$ 使 $\varphi(x)$ 在这个邻域内大于零,而在这个邻域外恒等于零,并且 $\varphi(x)$ 是连续函数,显然

$$\varphi(a)=\varphi(b)=0.$$

由于在小邻域上 $f(x)>0$, $\varphi(x)>0$, 且在小邻域外 $\varphi(x)=0$, 所以有

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx>0.$$

这与定理条件 $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=0$ 矛盾. 因此 $f(x_0)$ 不能大于零. 同理可证它也不能小于零,所以定理结论成立.

利用变分法基本引理及 (1.2.8) 立即推出 (1.2.9) 式. 方程 (1.2.9) 叫做 Euler 方程. 根据上面的推导可知,若在任意满足条件 (1.2.1) 的函数中，$y_0(x)$ 使泛函 $J(y)$ 取极值，则 $y_0(x)$ 是微分方程边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)=0,\\ y(x_1)=y_1,\ y(x_2)=y_2\end{cases} \tag{1.2.10}$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com