

# 精算学基础

第一卷

# 复利数学

李晓林 编著



JINGSUANXUE JICHU

中国财政经济出版社

精算学基础

第一卷

复利数学

李晓林 编著

中国财政经济出版社

## 图书在版编目 (CIP) 数据

精算学基础 第1卷: 复利数学/李晓林编著. - 北京:  
中国财政经济出版社, 1999. 5

ISBN 7-5005-4215-1

I. 精… II. 李… III. ①经济数学-计算方法②利息-  
计算方法 IV. F224. 0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 17431 号

中国财政经济出版社出版

URL: <http://www.cfeph.com>

E-mail: cfeph@ drc.gov.cn

(版权所有 翻印必究)

社址: 北京东城大佛寺东街 8 号 邮政编码: 100010

发行处电话: 64033095 财经书店电话: 64033436

北京财经印刷厂印刷 各地新华书店经销

850×1168 毫米 32 开 8.625 印张 203 000 字

1999 年 6 月第 1 版 1999 年 6 月北京第 1 次印刷

印数: 1—3 000 定价: 22.00 元

ISBN 7-5005-4215-1/F·3824

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

**感谢**

**英国鹰星人寿保险有限公司——苏黎世  
金融服务集团成员对此书的出版给予的  
资助及大力支持！**

**作 者**

**谨对此书的出版表示衷心的祝贺！**

**英国鹰星人寿保险有限公司——苏黎世金融服务集团成员**

## 序

“精算”是近年来才被中国人慢慢熟悉起来的一个新概念，并把它和人寿保险联系在一起。事实上“精算”的概念在西方发达国家要更加广泛，它不仅是保险企业对风险和成本进行评估测算的重要方法，也是现代管理科学的重要组成部分，对决策进行定量分析的重要工具。

本书作者李晓林同志是一位十分难得的精算方面的专家，他虽然年轻，却在数学和人寿保险知识方面具有专长，并在教学研究和国际学术交流过程中，不断更新。他凭借自身的执着和勤奋，利用几年的时间，独立完成了这部三卷本、共80多万字的专著。该书囊括了大量的精算数学知识，并与保险精算实践有机地结合在一起，它的出版对促进我国精算学和人寿保险精算数学理论的研究，具有很重要的意义。

中国的寿险业方兴未艾，发展前景十分广阔，但同时专业人才的需求十分迫切，亟待解决的问题也很多。我感到十分欣慰，有李晓林这样的同志，能花几年的时间对精算学进行深入的探讨与研究。我衷心地希望

有更多的同志加入到人寿保险理论研究的行列中来，同时借鉴西方的先进经验，密切联系实际，多做一些好文章，多著一些好书，为推动中国人寿保险业的发展作出自己的一份贡献。

吴中平

1999年2月

# 目 录

绪 论	( 1 )
第一章 利率与基本复利函数	( 13 )
§ 1 利息	( 13 )
§ 2 现金流量	( 16 )
§ 3 利率、终值与现值	( 24 )
§ 4 利息力	( 29 )
§ 5 现金流量的现值	( 32 )
§ 6 固定利率	( 37 )
§ 7 名义利率与名义贴现率	( 40 )
§ 8 价值方程和交易收益率	( 43 )
第二章 确定年金	( 47 )
§ 1 确定年金的终值和现值	( 47 )
§ 2 通用摊销表	( 56 )
§ 3 用年金偿还贷款	( 58 )
§ 4 支付频率高于每单位时间 1 次的年金 ( 每年 支付多次)	( 59 )
§ 5 支付频率低于每单位时间 1 次的年金 ( 多年 支付 1 次)	( 63 )

---

§ 6	连续年金与变动年金 .....	( 65 )
§ 7	$n$ 不是整数时, $a_{\overline{n} }^{(m)}$ 的定义 .....	( 69 )
<b>第三章</b>	<b>收益分析</b> .....	( 73 )
§ 1	净现金流量 .....	( 73 )
§ 2	净现值和收益率 .....	( 75 )
§ 3	两个投资项目的比较 .....	( 82 )
§ 4	不同的贷款和借款利率 .....	( 84 )
§ 5	通货膨胀的影响 .....	( 90 )
§ 6	测度投资绩效 .....	( 95 )
<b>第四章</b>	<b>资本赎回保单</b> .....	( 101 )
§ 1	资本赎回保单 .....	( 101 )
§ 2	资本赎回保单利润的实现 .....	( 114 )
§ 3	用资本赎回保单偿还借入资本 .....	( 119 )
<b>第五章</b>	<b>债券定价</b> .....	( 123 )
§ 1	证券概述 .....	( 123 )
§ 2	梅克汉姆公式 .....	( 133 )
§ 3	偿还期与收益 .....	( 143 )
§ 4	在两个利息日间的价值 .....	( 153 )
<b>第六章</b>	<b>资本利得税</b> .....	( 161 )
§ 1	资本利得税的概念 .....	( 161 )
§ 2	资本利得税情况下债券估价 .....	( 162 )
§ 3	在有资本利得税的情况下求收益率 .....	( 169 )
§ 4	可选择的偿还日期 .....	( 172 )



---

§ 5 以资本损失抵减资本利得 .....	(175)
<b>第七章 随机利率模型简介</b> .....	(178)
§ 1 引例 .....	(178)
§ 2 相互独立的年收益率 .....	(180)
§ 3 模拟方法 .....	(185)
§ 4 非独立的年收益率 .....	(194)
<b>后 记</b> .....	(265)

---

## 绪 论

---

早在上一个世纪，世界上的那些老牌的保险公司就已经把精算师摆在非常权威的位置上。他们在强调自己雄厚实力的时候常常这样说：“本公司拥有多少多少名精算师”，而不去说有多少资金。因为经营者们已经清楚，对风险的把握程度直接决定着保险业的信誉。不以精算为前提的任何一个关于投资、保险、就业、社会保障、福利等方面的分析报告，是谈不上信誉的。从那时起，拥有多少精算师，就已经成为衡量一个保险公司实力的重要标志了。

精算，它的概念是很难界定的。一般的说法是，利用数学、经济学、数理统计、人寿险、非人寿险、人口学、养老基金、投资等理论，对金融、投资等行业中的风险问题提出数量化意见，使未来价值的可能性数量化。精算工作主要是由精算师承担的。通常，在一些国家精算行业的业务报告中是这样描述精算师的作用的：“在给金融投资等问题提供专家的、恰如其分的解答方面，尤其是解释不确定的未来事件方面，发挥精算行业的作用并提高它的声誉”（——摘自英国精算行业业务报告）。

这里，重要的是“尤其是解释不确定的未来事件”。这是一种同不确定性打交道的能力，正是这种能力标志着精算师作为一个具有重要作用的独立的职业。

精算工作面对的是许多“金融”问题。从非常简单的问题，如确定在一项抵押下每月的投资是多少，到非常复杂的问题，如管理一项大的养老基金。这些问题，都可以通过精算中的一个很重要的内容——利息理论——找到恰如其分的答案。

精算工作的对象是“不确定性”。说明金融行为不确定性的一个很好的例子就是保险合同。在投保自行车盗窃险时，一辆超豪华的山地车的拥有者，与一辆普通的旧车车主相比较，应交多少保费呢？哪一辆将被偷是不确定的，但是研究一下这两种车过去被盗窃的规律，精算师就可以为每一种确定一个合适的保费。解决这种问题的主要工具是数学的一个分支叫做概率论。

精算工作是针对“未来的”不确定性。例如，个人养老基金问题，这是一笔很大的资产。它为特定的一些人提供将来的养老金。这笔基金也许必须为那些现在还很年轻的人提供退休养老金。这些养老金也许在40年中没有开始，于是，也许在领取者的有生之年要继续支付下一个40年。所以，养老基金的管理者们必须考察下面两种情况：一是这些资产在40年或更长的时间里的价值是什么，二是养老金领取者生存并领取养老金的时间多长。精算师的工作，就是把这些不确定事件的可能性数量化。

在各国，绝大多数精算师工作于工商业中。最普遍地，他们在既能盈利又有风险的企业。例如，保险公司，它关照着人们的风险，作为回报，它接收保费。所以它拥有巨额的资产。重要的不是这资产的大小，而是怎样依靠专家来经营和管理这笔资产。这就是它需要精算师的原因。精算师受雇于保险公司后，处理人寿保险、年金及其他诸如汽车保险等各类普通保险的有关数量分析问题，其工作包括设计和评估保单和公司的各类证券投资。部分精算师是在顾问公司和咨询公司工作，他们为一些小型的保险公司提供参谋和咨询。如世界上第一家人寿保险公司——英国的

EndwerdR.Mores, 正是因为 1762 年就设立了精算机构, 以致在很长的时间里, 其业务一直处于领先地位。

精算师还工作于政府部门。政府的失业保障、养老保障、医疗保障等各种社会保障方案都是在精算师对社会各种政治、经济因素分析和预测的基础上制定的。政府还通过精算师来监督保险公司等多种行业。

此外, 在咨询公司、证券公司、大型企业及人口统计等部门, 精算师都显示了不可替代的作用。

## 二

精算师常常必须对将来要发生的事件作出估计(预测)。例如:

——估计一笔养老基金作为特殊的资产在未来的 10 年中的利率;

——估计每 100000 套同一类型的房屋在下一年将被火灾毁坏的房屋数;

——估计已经到具体的保险公司参加了人身保险的人中有多少将在未来 10 年中死亡;

——估计未来 10 年的通货膨胀率, 进而估计一个具体的正在营运的公司支出方面受到的影响;

——就一笔对政府发行的 8 年债券的投资而言, 估计它的可兑现的现金流量的增值情况;

——就一项由一家大公司发行的权益股, 估计它的可兑现的现金流量的增值;

.....

很明显, 第一个问题就是要弄清“过去告诉了我们什么”? 如果我们肯去研究过去 40 年的通货膨胀率, 或是研究过去 10 年

中被火烧掉的房屋的比例或者一系列类似的数据，那就可以具备那种能力——把未来的基本情况准确地设计出来。例如，如果我们发现在过去的每一年里，在年初的所有房屋的 9% 将在这一年底以前被烧掉，我们就可以预言出在保险公司投保了的这类房屋中将有 9% 会在这一年中被烧掉，就能对责任的成本做出确定的预告。

然而，很多的情况是，我们不能精确地知道在给定的那一年中会有 9% 的房屋被烧，但是能知道整个比例在年复一年地上下波动。它可能在 6% ~ 12% 变化。于是，通过对过去资料的分析 and 计算之后，也许我们可以说，平均起来，投保的房屋在未来一年中将有 9% 的房屋被烧毁，但可能高出 3% 或低出 3%。根据不同的情况，在计算之后可能会得到不同的平均值。

针对这种情况，通过对过去的研究，我们可以作出两个对未来的报告：

- 按你预期，平均会有百分之几的房屋被烧；
- 实际的结果与我们预期的平均数的偏差幅度有多少。

这两个报告都很重要。第一个报告——预期的平均值——肯定是关于未来事件的报告，但正是第二个报告——对不确定性的预测——是关于不确定的未来事件的报告，对于准确地设计未来的基本情况显得更为重要，也正是精算师的工作之一。这涉及到怎样更科学地使用概率论与数理统计理论。

同样地，我们可以研究通货膨胀率在过去的情况，做一份报告，不仅说明在未来最可能发生的情况，而且说明实际的结果可能会有多大的不同。

我们再考虑精算师工作的一个例子，这是针对某一个已知年龄的人在将来有生之年中获得具体保险金的不确定性。一个典型的人寿保险合同是在死亡之前——比如说 20 年内——支付一笔

钱。于是，这笔钱要支付的概率就是这人在 20 年内死亡的概率。

不同的人会死于不同的年龄，但是，通过对很多人死亡的年龄研究之后，精算师就能估计出同样年龄的一大群人中有多少会在 20 年之内死亡，或者在另一个期间内死亡。对于给定了年龄的一组人，计算他们的生命平均起来将在多少年内结束是能够做到的，这就是“生命的平均期望值”。这些数据对决策工作是至关重要的。

同样，通过研究过去通货膨胀率变动的方式，你可以判断未来最可能发生的情况以及实际情况和预期有多大偏差。

### 三

在实践中一些风险是经济方面的，或者说是可以用货币衡量的，如支付汽车维修费用的风险性。如果一个司机向一家保险公司支付了保费，那么他就将这种经济方面的风险转移给该公司，于是将不再面临有关费用的不确定性，其费用就是支付给保险人的保费。现在是保险公司面临着这个司机将撞车的风险，它将不确定它的费用支出情况。

当然，没有保险公司会对不能用货币衡量的风险进行赔偿。保险人可以支付司机的汽车修理费用，但如果他的身体受伤了，钱可能就很难起到安慰效果，精算师讨论风险时通常指的是财务风险。

保险公司之所以能够承担起这种经济方面的风险，是因为它承担了大量的相似风险。显然，一部分司机会在明天发生车祸，因为所有人都不发生车祸是很不寻常的，所有人明天都发生了车祸也是不可能的。

如果投保司机的数量很大，保险公司就能有一定把握地估计出它的成本，可能它可以从过去的经验中推出每年发生车祸的司

机的比例不会小于 35% 也不会大于 95%。那么投保的司机之中能发生车祸的人数就可以在这些界限中估计出来。保险公司就能够把所有这些车祸的预期费用平均摊在投保的所有司机身上。

一般来说，保险公司承保的风险个体数量越大，发生事故并且索赔的人的比例就会越确定。在本书的下一卷《风险统计模型》中我们将更精确地得出这个重要的结论。

一个司机投保汽车险所支付的保费看上去可能很高，但至少他能够支付。但一旦他的车发生严重车祸而他又必须自己支付损失的话，可能就难以支付了。慎重考虑之后，一个司机可能更愿意支付一个确定的数量不大的费用，而不愿支付一个不确定的但可能是毁灭性的费用。

在这个过程中，精算师的工作就是在保险公司接受了大量司机投保时，估计出公司所承担的风险，并由过去的经验推定费用大小。对过去了解越多，也就能够更好地测算将来的费用。可能费用仍是不确定的，但它能够降低不确定性的程度。

在寿险、养老金和投资中，精算师的工作是将过去的风险的不确定性进行量化，以估计出与将来相似风险有关的不确定性。精算师们还研究类似股市崩溃险之类的金融风险。

精算师不仅是量化风险，还能设计方法经营或控制风险。例如，精算师可以：

1. 向寿险公司建议应该采用的保费水平，以确保身体状况良好的人和身体状况不好的人都能支付合适的寿险保费。
2. 向保险人建议最好的投资方式，以保护公司不受通货膨胀的影响。
3. 向保险人或养老金提供者建议应当写入协议中的有关条款，以保证保险人或养老金提供者不要承担他本身并不愿承担的风险。

其他行业也会对承担风险的商业的成功经验作出重要贡献。然而，精算师将估测未来整体蓝图所必须的数学技巧和经济知识结合起来。因此，一些国家的立法要求在对寿险公司及养老金基金进行监管的过程中必须有精算师的参与。

一般说来，为保险业服务的精算师其主要职能包括以下几个方面：

收集整理人的出生、死亡、婚姻、就业、退休、意外事故、自然灾害等一系列事件发生频率的一些经验统计资料，研究利率、保单失效率、费用率以及竞争环境等动态因素，以制定各险种的费率；

根据收集的资料编制全国的及地区性的不同行业、不同类别的生命表、病伤频率表、人均收入增长率；

计算法定责任准备金、支付准备金和各种累积金；

根据经济环境的变化趋势，为保险投资决策提供各种数量化预测指标，如投资的回报率、资产的增长率；

分析保险公司年度利润及其来源，提供有效保单按盈余分布红利的数据；

根据保险环境的变化和要求，以及地区性特点，参与研究和设计新险种；

参与公司的计划、销售、投资、财务等经营管理决策，参与公司各种年度报表的编制，例如：财务状况报表、所得税报告、经营状况报告、呈送保险监管部门的其他定期报表等；

协助其他职能部门根据经验统计资料研究各种险种的效益与费率的调整，以适应竞争环境的要求，并编制内部使用的各种报告。



## 四

在保险合同中，涉及到的风险和不确定性往往要持续很长的时间，精算师常常要研究一个较长时期内的种种变化。例如：

——寿险合同可能有 10 年、20 年、30 年或更长的期限。精算师关心的是在这些保险期限中被保险人死亡的风险。

——养老金基金可能会有义务对一个 20 岁的青年支付未来几十年的养老金。它要确保将基金进行投资，并在需要的时候立即供款。但是投资所能获得的未来利息收入是不确定的。在决定养老金的金额时，精算师必须对一个较长时间内的这种不确定的利息做出估计。

——一个设计未来几十年人口模型的人口工作者必须考虑到以后 30 到 40 年间出生、死亡、结婚、离婚等等的变化，包括随着社会的发展这些变量的变化。

这种长期性的概念在精算工作中是十分重要的。

首先，当精算师对未来做预测时采用各种技巧所描述的是长期性变化而不仅仅是短期变化。例如，投资分析家最感兴趣是下个月某公司股票的价格，希望能够迅速获利。而精算师可能更注意股票在较长时期内的价格变动，看看它能不能作为养老金基金采用的投资对象以应付多年后养老金的支付。

其次，精算师总是超越近期的形势，测算出任何特定的经济行为的最终结果。例如，在给寿险公司就发行某种特定类型储蓄计划的效果提建议时，精算师会警告有关的长期风险。精算师会看到在近期效果有利的情况下可能会出现的不利的长期效果。公司也许最关心的是现在该做什么决定，而精算师考虑的是这些决定在遥远的未来意味着什么。

第三，精算师调查过去时必须考虑过去很长一段时间以预测