模糊数学与模糊优化

方述诚　汪定伟 著

科学出版社

模糊数学与模糊优化

方述诚　汪定伟　著

科学出版社

1997

内 容 简 介

模糊数学的方法在自动控制、模式识别、医疗诊断、人工智能等许多领域中有着广泛的应用；而模糊优化在区域发展规划、资源分配、交通与通讯网络计划、生产计划与调度等众多领域中的应用前景广阔．近年来，模糊控制的成功带来了模糊优化的研究热潮．为了给广大学习、研究及应用模糊优化的读者提供一本入门读物，本书对模糊优化及其必要的模糊数学的基础进行了系统介绍．

全书共分十一章．第一至六章阐述了模糊集合的基本概念，对模糊算术、模糊分析、模糊关系与模糊图，以及模糊概率与模糊测度作了由浅入深的介绍．第七至十一章以模糊线性规划为主干，对不同类型的模糊线性规划、非线性规划以及整数规划展开了讨论；还对可能性规划和模糊分类问题进行了探讨．

从写作特点上看，本书除重视数学概念外，更强调模糊优化的计算方法和应用，便于读者学习或作为工具书使用．

本书可以作为模糊优化的入门读物．对于运筹学、工业工程与系统工程，以及模糊数学等领域的研究人员、研究生和从事应用工作的技术人员是一本极好的教材和参考书．

图书在版编目(CIP)数据

模糊数学与模糊优化/方述诚，汪定伟著．—北京：科学出版社，1997.8

ISBN 7-03-005829-1

Ⅰ．模… Ⅱ．①方… ②汪… Ⅲ．①模糊数学②模糊控制：最佳控制 Ⅳ．TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 25680 号

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1997 年 10 月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1997 年 10 月第一次印刷 印张：10 3/8

印数：1—2 150 字数：234 000

定价：18.00 元

前　　言

自从 Zadeh 教授 1965 年提出模糊集合的理论以来，模糊数学的方法在自动控制、模式识别、医疗诊断、人工智能等许多领域中获得了广泛的应用．特别是模糊控制技术，不用精确的测量数据，能适应恶劣环境，成本低廉．这些优点使之在工业应用中取得了惊人的成功．模糊控制主要面向简单的工业控制系统．而在区域发展规划、资源分配、交通与通讯网络计划、生产计划与调度等众多领域中，模糊优化有着更加广阔的应用．因此，模糊控制的成功势必带来模糊优化的研究热潮，专家们预测下一个十年将是模糊优化获得辉煌成功的时代．目前，美国、欧洲的许多学者都在从事模糊优化的研究工作．我国的科研人员，特别值得一提的是台湾的科研人员也在积极开展这项研究．

继 80 年代初，汪培庄的《模糊集合论及其应用》一书出版后，国内开展了比较广泛的模糊数学的研究，取得了许多研究成果．模糊数学、模糊控制、模糊信息论等书籍出版了不少．虽然有些书中有模糊优化的章节，但至今未出版一本专门的模糊优化的书籍．

近年来，国内对模糊优化的研究日趋活跃．为了给广大学习、研究及应用模糊优化的读者提供一本入门读物，本书对模糊优化及其必要的模糊数学的基础进行了系统介绍．

全书共分十一章．第一至六章阐述了模糊集合的基本概念，对模糊算术、模糊分析、模糊关系与模糊图，以及模糊概率

与模糊测度作了由浅入深的介绍．第七至十一章以模糊线性规划为主干，对不同类型的模糊线性规划、非线性规划以及整数规划展开了讨论；还对可能性规划和模糊分类问题进行了探讨．

从写作特点上看，本书除重视数学概念外，更强调模糊优化的计算方法和应用，便于读者学习或作为工具书使用．

本书可以作为模糊优化的入门读物．对于运筹学、工业工程与系统工程，以及模糊数学等领域的研究人员、研究生和从事应用工作的技术人员是一本极好的教材和参考书．

本书是以美国北卡罗来纳州立大学运筹学部主任，美籍华裔学者方述诚(Shu-Cherng Fang)教授的“模糊优化”课程的讲义为蓝本重新编写的．该课程是为了适应对模糊优化日益增加的需求而开设的．在国内外讲授多次，获得了广泛的好评．讲稿曾请台湾清华大学的王小幡教授审阅修改．中文稿是由方述诚与汪定伟共同讨论大纲后，由汪定伟执笔撰写的．成稿后方述诚对全书作了校阅．

在本书的写作与出版中，得到了东北大学、美国北卡罗来纳州立大学同行，以及科学出版社的编审人员的支持和帮助，在此表示谢意．此外，还要特别感谢中国国家自然科学基金委员会和美国北卡罗来纳州立大学 Walter Clark 基金会的资助．

作者

1996 年 3 月

目　录

第一章　导　　言

1.1　模糊集理论的产生与发展

传统数学用精确性的、确定性的数学概念来描述客观世界．在精确性与确定性的前提下，传统数学建立了一套严谨而完善的公理体系．然而，由于客观世界的多样性和复杂性，很多事物难以用精确的、确定的概念来描述．某些事件的发生与发展是随机的，比如硬币抛掷落下后的朝向；某些事物特征的语言描述是模糊的，比如对人体胖瘦高矮的描述．对于这些情况，传统数学便无能为力了．

为了描述事件发生与变化的随机性，产生并发展了统计数学；而为了描述事物特征的模糊性而产生发展起来了模糊集理论和模糊数学．

1962 年，美国加利福尼亚大学的 L. A. Zadeh 教授在一次国际学术会议上作了“从电路理论到系统理论”的报告，首次谈到模糊性的观念．稍后在 1965 年，他又发表了著名的论文“模糊集合”．在这篇论文中，Zadeh 教授明确提出了模糊性的问题，给出了模糊概念的定量描述方法．模糊数学从此诞生了．

模糊数学在其诞生后的三十余年中发展十分迅速．学习、研究并应用模糊数学的人越来越多，模糊数学的理论由此日臻完善，其应用也日益广泛．

据不完全统计，每年发表的有关模糊数学的论文，1965

年只有两篇,1970 年有 25 篇,至 1979 年已超过了 1500 篇. 1973 年召开的"参数控制与模式识别会议"成为第一个以模糊数学为主题的国际学术会议. 1978 年,第一份以模糊数学为主干的学术期刊《模糊集与系统》(Fuzzy Sets and Systems)创刊了. 至今,单是英文出版的学术期刊中就有三十多种经常刊登与模糊数学相关的论文.

从应用的情况看,模糊数学已在图像识别、语言处理、自动控制、故障诊断、信息检索、人工智能以及医学、生物学、社会学及心理学等许多学科和领域中获得了广泛的应用. 特别值得一提的是近年来,空调器、电冰箱、洗衣机等家用电器中也广泛采用了模糊控制技术. 可以说,模糊数学已进入了普通百姓的家庭.

1.2 研究模糊集理论的意义

模糊集理论是描述客观世界的有力工具. 我们知道,许多事物或概念相互之间的界限是不清晰的. 在对这类事物进行观察和操作时,"非此即彼"的绝对法则很难奏效. 比如,高速与中速之间,高个子与中等身材之间,都很难找出明确的分界. 传统数学中,一切概念都是基于确定性与精确性的原则来定义的. 因此,传统数学无法提供描述边界不清晰的事物及其关系的方法. 进而,以传统数学为基础的所有学科也不能解决各自面向的这种类型的问题.

模糊集理论的产生为描述这类边界不清的事物提供了一套有效的方法,使人类从此有了以结构化、公式化的手段处理这类事物的能力,能够在模糊环境中解决问题,做出正确决策. 进而,将模糊数学应用到各个学科中,就能够解决各式各

样的这类问题.

从某种意义上讲,人类本身就是基于模糊集理论活动的.人的眼、耳和鼻是模糊观察器.它们在不完全精确测量的基础上,分辨东西的大小,声音的高低以及气味的香臭.人的大脑则是基于模糊规则的推理机和决策器.大脑的思维、判断、推理多数情况下都是基于非量化的、或是不精确的观测和规则作出的.正是这种处理模糊信息的能力,使人类能够辨认潦草的字体,理解含混不清的语言.使高性能的计算机和语音识别系统愧不能及.也正是这种处理模糊信息的能力,使人类可以从杂乱无章的信息中抽取出有用的信息,总结出规律,作出正确的决策.这种能力对于领导人和高层管理人员来说尤其显得重要.

人类的这种处理模糊信息的能力是当今任何基于传统数学理论的计算机所无法比拟的.而模糊集理论则为研究、模仿人类的这种能力提供了理论基础.

1.3 集合的概念及基本符号

一般而言,一个概念可以从三个方面描述:

1) 内涵:用概念内在特征来描述概念.

2) 外延:用符合概念的全体元素来描述概念.

3) 结构:用该概念与其他概念的相互关系来描述该概念.

因素(factor)用来描述概念的内在特性;而集合则用来描述元素属于概念的程度.

为了弄清结构中的一个概念,可以分别从内涵和外延的角度来描述它.为了搞清概念的内涵,需要描述概念的内在

特性，于是产生了因素分析的方法，进而产生了因素空间的理论．而要弄清概念的外延，则要表达元素对概念的属性，于是产生了集合论．由于元素对概念的属性常常是模糊不清的，这样便产生了模糊集合理论．以上对概念的认识过程可以用图 1.1 来表示．

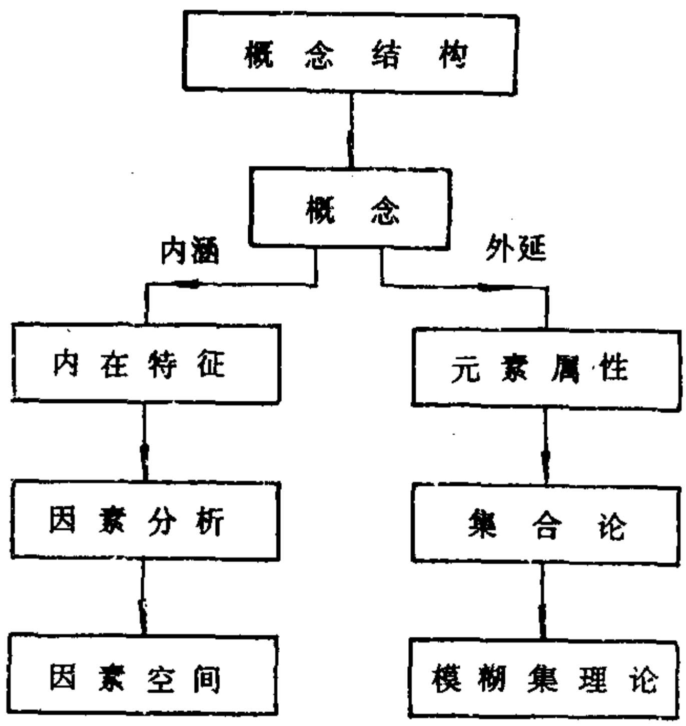

图 1.1　概念的认知过程

所谓集合是符合某个概念的所有元素的全体，集合就是概念的外延．

设 $A(x)$ 是元素 x 对概念 A 的属性，则

$$A=\{x\mid x\in X,\ A(x)\text{成立}\} \tag{1.1}$$

即是一个集合．即，集合 A 是概念 A 的外延．这里，X 为给定的一个论域，或称为全集．

若 X 是给定的全集，那么

$$P(X)=\{A \mid A\subseteq X\} \tag{1.2}$$

为 X 上的幂集．幂集是全集中所有可能的子集构成的集合．

给定集合 $A\in P(X)$，定义 A 的特征函数(Characteristic Function)为如下映射：

$$\chi_A: X\rightarrow\{0,1\}$$

对于 X 中的一个元素 x，有

$$\chi_A=\begin{cases}1, & 若\ x\in A\\ 0, & 若\ x\notin A\end{cases} \tag{1.3}$$

那么集合 A 可以用下式表示：

$$A=\{x\in X \mid \chi_A(x)=1\} \tag{1.4}$$

这里，特征函数 $\chi_A(x)$ 用来表示元素 x 对于集合 A 的隶属程度．于是，集合 A 可以用元素 x 及其对 A 的隶属度组成的有序对来表示，即

$$(x,\chi_A(x))\longleftrightarrow A,\ \forall\ x\in X$$

一般集合的运算实质上是全集中所有元素的隶属度的运算的组合，例如

(1) 集合的并

$$A\cup B=\{x \mid x\in A\ 或\ x\in B\} \tag{1.5}$$

其实是

$$\chi_{A\cup B}(x)=\max\{\chi_A(x),\chi_B(x)\},\forall\ x\in X \tag{1.6}$$

(2) 集合的交

$$A\cap B=\{x \mid x\in A\ 且\ x\in B\} \tag{1.7}$$

其实是

$$\chi_{A\cap B}(x)=\min\{\chi_A(x),\chi_B(x)\},\forall\ x\in X \tag{1.8}$$

（3）集合的补

$$A^C=\{x\mid x\notin A\} \tag{1.9}$$

其实是

$$\chi_{A^C}(x)=1-\chi_A(x),\ \forall\ x\in X \tag{1.10}$$

集合运算和二值逻辑运算是一一对应的见表 1.1. 二者本质上是完全一致的.

表 1.1　集合运算与逻辑运算的对照

集合运算	逻辑运算
$P(x)$	$F(v)$
$\cup$	max
$\cap$	min
c(取补)	—(取否)
X	1
ϕ	0
$\subseteq$	$\Rightarrow$

模糊集理论是传统集合论的扩展. 定义元素 x 在模糊集 $\tilde{A}$ 中的隶属函数 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 为全集 X 到实数区间$[0,1]$上的一个映射，即

$$\mu_{\tilde{A}}(x):X\to[0,1]$$

那么

$$\tilde{A}=\{(x,\mu_A(x))\mid x\in X\} \tag{1.11}$$

即为 X 中的一个模糊集.

模糊集的运算也可以用其元素的隶属函数的运算来表示.如

(1) 模糊集的并为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cup \underset{\sim}{B}}(x)=\max(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)),\forall\ x\in X$$
$$=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\vee \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

(2) 模糊集的交为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cap \underset{\sim}{B}}(x)=\min(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)),\forall\ x\in X$$
$$=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

(3) 模糊集的补为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}^c}(x)=1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\forall\ x\in X$$

由于 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 可以在 $[0,1]$ 区间内取任意值,所以模糊集的运算对应于一种多值的逻辑运算.

1.4 模糊集理论在决策中的作用

人的大脑的决策过程是一种模糊决策.这种模糊决策过程是通过将概念扩展为模糊集,再经过模糊集的运算来实现的.得到的决策还应由原来的概念进行验证.以上决策过程如图 1.2 所示.

例 1 要组织一个好的篮球队,我们对于队员的标准有如下概念:

概念 1:身高远在 5 英尺以上;

概念 2:有很高的投篮命中率;

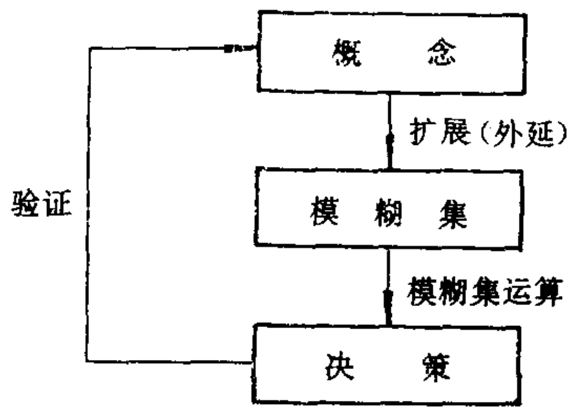

图 1.2　模糊决策的过程

概念 3:年薪不要超过 5 万美元太多;

概念 4:能和队友相互配合.

按照以上概念,得到了如下 4 个模糊集:

$$\widetilde{A}_1=\{\text{身高远高于 5 英尺的选手}\}$$

$$\widetilde{A}_2=\{\text{投篮命中率高的选手}\}$$

$$\widetilde{A}_3=\{\text{年薪不超过 5 万美元太多的选手}\}$$

$$\widetilde{A}_4=\{\text{能与其他人配合的选手}\}$$

对以上模糊集作交运算,就可知道每个候选队员对这个"好球队"的隶属程度,由此便可得到挑选队员的决策,即

$$\text{决策}=\widetilde{A}_1\cap\widetilde{A}_2\cap\widetilde{A}_3\cap\widetilde{A}_4$$

最后再按原来的好队员的概念对决策进行验证.结果发现还有其他概念,比如"跑得快","跳得高"需要加以考虑.那么加上这两个新的模糊集 $\widetilde{A}_5$ 和 $\widetilde{A}_6$,重新作决策

$$\text{决策}=\widetilde{A}_1\cap\widetilde{A}_2\cap\widetilde{A}_3\cap\widetilde{A}_4\cap\widetilde{A}_5\cap\widetilde{A}_6$$

再对得到的决策进行验证.如此反复,直到组成一个满意的球队为止.