数学物理方法

下册

陆全康编

上海科学技术出版社

数学物理方法

（下 册）

陆全康 编

O211/45/0
北京师范大学藏书
1036122
图书馆

上海科学技术出版社

数学物理方法

（下 册）

陆 全 康 编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 无锡县人民印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 10.125 字数 232,600

1982 年 7 月第 1 版 1982 年 7 月第 1 次印刷

印数 1—17,400

统一书号：13119·1003 定价：（科五）1.15 元

内 容 提 要

本书根据全国理科大学物理类专业数学物理方法的教育大纲以及参考了工科院校有关专业的教育大纲编写的.分上、下两册，上册为复变函数导论，阐述了复变函数的基本性质及其应用；下册为数理方程和特殊函数，比较系统地介绍了物理和工程技术上的常用解法.

本书可作为综合性大学、高等师范院校、工业大学、电视大学有关专业的教学用书或参考书，也可供中学数学和物理教师以及自学者阅读.

目　录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第十五章　边值问题的格林函数

第十六章　勒让德多项式和球函数

第十七章　贝塞耳函数

J31/45/04

第九章

数学物理方程的导出和定解问题

数学物理方程(简称数理方程)通常是指从物理问题导出的函数方程,主要指偏微分方程和积分方程.本书限于讨论二阶线性偏微分方程,处理问题的步骤为:(i)把物理问题归结成数学上的定解问题,具体说来就是化成偏微分方程和定解条件(包括初始条件和边界条件);(ii)解定解问题,这就是求得满足方程和定解条件的解;(iii)对求得的解作适当的物理解释.

连续物质的运动变化,例如弦或杆的振动、粒子浓度分布、温度分布或电磁场的变化规律,都可用偏微分方程来表述.这里导出几个常见的偏微分方程,它们是:(1)弦振动方程,(2)杆振动方程,(3)扩散方程,(4)热传导方程,(5)静电场方程和(6)波传播方程.

§1. 振动方程

本节讨论(1)弦的横振动,(2)杆的纵振动.

弦的横振动方程

一根完全柔软的弦,平衡时沿着一条直线绷紧,取这条直线为 X 轴,而以坐标 x 标志弦的各点.设弦的密度(单位长

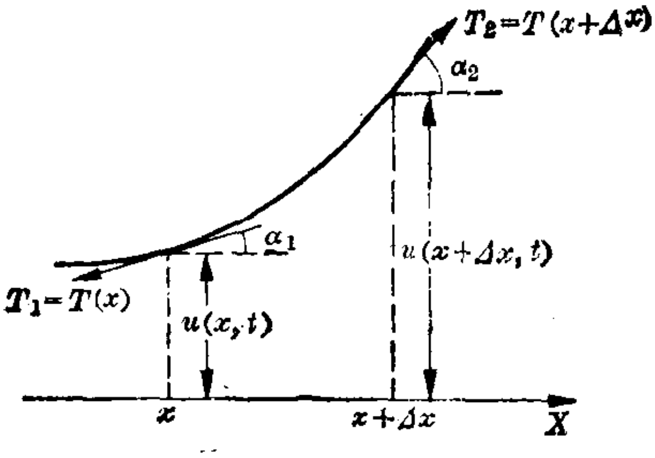

图 9.1

度的质量)为 ρ_0.

当弦作横向运动时，以 $u(x,t)$ 表示弦的 x 点在 t 时刻沿垂直于 X 方向的位移. 由于假定弦是完全柔软的，弦上任一点的张力总沿着弦的切线方向(参看图 9.1).

对于弦的小振动，可设倾角 α 很小，具体地说，假定

$$\sin\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\cdots$$

$$=\alpha\left(1-\frac{\alpha^2}{3!}+\frac{\alpha^4}{5!}-\cdots\right)\simeq\alpha, \tag{1.1}$$

$$\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\cdots\simeq 1. \tag{1.2}$$

在(1.1)与(1.2)中，采用的近似为略去 $o(\alpha^2)$ 项，即 α 的平方与平方以上的项与 1 相比就可略去. 同样

$$\operatorname{tg}\alpha=\alpha[1-o(\alpha^2)]\simeq\alpha. \tag{1.3}$$

在这个近似下，(i)弦的伸长可以略去：

$$ds=[(dx)^2+(du)^2]^{1/2}=dx\left[1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$=dx[1+(\operatorname{tg}\alpha)^2]^{\frac{1}{2}}\simeq dx[1+\alpha^2]^{\frac{1}{2}}\simeq dx; \tag{1.4}$$

(ii)张力是常数：

如图 9.1 所示，由于弦沿 X 方向无运动，

$$T_2\cos\alpha_2=T_1\cos\alpha_1. \tag{1.5}$$

于是，由(1.2)，即可得出

$$T_2=T_1=T. \tag{1.6}$$

考察横坐标为$[x, x+\Delta x]$的一小段弦的运动，根据牛顿定律，运动方程为

$$T\sin\alpha_2 - T\sin\alpha_1 = \rho_0 \Delta x \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \tag{1.7}$$

式中$\bar{u}$表示这一小段弦的平均位移.

在现在的近似下，

$$\sin\alpha_1 \simeq \operatorname{tg}\alpha_1 = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x, \tag{1.8}$$

$$\sin\alpha_2 \simeq \operatorname{tg}\alpha_2 = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}. \tag{1.9}$$

由泰勒展开

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_x \Delta x + o[(\Delta x)^2], \tag{1.10}$$

将(1.8)～(1.10)代入(1.7)后得

$$T\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_x \Delta x + To[(\Delta x)^2] = \rho_0 \Delta x \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}, \tag{1.11}$$

约去Δx后，

$$T\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_x + To[(\Delta x)] = \rho_0 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}. \tag{1.12}$$

令$\Delta x \to 0$，则$\bar{u} \to u$. 于是

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1.13}$$

这就是弦的横振动方程. 方程(1.13)还可改写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.14}$$

其中

$$a \equiv \sqrt{\frac{T}{\rho_0}}. \tag{1.15}$$

方程(1.13)是线性方程，只包含u_{xx}和u_{tt}的一次项，如果不作小振动假设(1.1)～(1.3)，得到的方程将包含高次项，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

即方程是非线性的.

若弦还受到外力的作用，设单位长度所受的外力为 $F(x, t)$，力的方向总垂直于 X 轴，那么依上述类似的推导可得到弦的强迫横振动方程为

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x, t)=\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.16}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x, t), \tag{1.17}$$

式中 $f(x, t)=F(x, t)/\rho_0$ 代表单位质量的弦所受的外力.

杆的纵振动方程

一均匀细杆，只要其中任一小段有纵向运动时，必然会使它的两个邻段受到压缩或伸长. 邻段的压缩或伸长又使其自己的邻段被压缩或伸长. 这样，任一小段的纵振动就会传播到整个杆.

现在来推导细杆的纵振动方程. 杆的纵振动问题所研究的是杆上各点的纵向位移 $u(x, t)$.

把平衡时的细杆（即未发生振动的细杆）分成许多小段. 在下面的推导中，作如下的简化假定：杆只作小振动，可应用胡克（Hooke）定律，并略去由于杆的伸缩所引起的质量密度 ρ 的变化.

以 $\bar{u}(x, t)$ 表示图 9.2 所示小段的质心位移，小段的质量为 $\rho A\Delta x$，A 是细杆的横截面积，由牛顿定律得出运动方程为

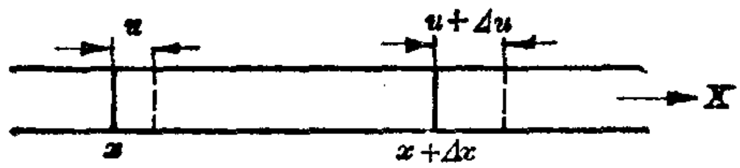

图 9.2

$$\rho A\,\Delta x\,\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}=[P(x+\Delta x,\ t)-P(x,\ t)]A, \qquad (1.18)$$

其中 $P(x,\ t)$是在 x 点的截面上于 t 时刻沿 X 轴方向所受到的应力．令 $\Delta x\to 0$, 则 $\bar{u}\to u$ 和

$$\frac{P(x+\Delta x,\ t)-P(x,\ t)}{\Delta x}\to\frac{\partial P}{\partial x}. \qquad (1.19)$$

于是，(1.8)化成

$$\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial P}{\partial x}. \qquad (1.20)$$

根据胡克定律　若略去垂直于杆长方向的形变，则应力和相对伸长成正比，即

$$P=E\,\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (1.21)$$

其中比例系数 E 称为杨氏模量．E. 杨氏模量

对于细杆，不考虑垂直方向的形变，且对于均匀细杆，E 是常量．

将(1.21)代入(1.20)后得出杆的纵振动方程：

$$\rho\,\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2}=E\,\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}. \qquad (1.22)$$

(1.22)还可改写成

$$\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}, \qquad (1.23)$$

其中 $a\equiv\sqrt{E/\rho}$ 是常量．

方程 (1.23) 与方程(1.14)形式上完全一样，当然其中 u 与 a 代表的物理量是不同的．

§2. 扩散方程和热传导方程

本节讨论 (1) 扩散方程，(2) 热传导方程．

扩散方程

单位体积中的粒子数称作浓度，由于浓度的不均匀，物质从浓度大的地方向浓度小的地方转移，这种现象称作扩散.

描述扩散有两个基本定律，一个是粒子数守恒定律，另一个是关于扩散规律的斐克(Fick)定律.

当无粒子源存在时，在空间某固定区域内粒子的减少数显然等于通过表面流出的粒子数.

考察该固定区域界面上的一块小面积 dS，设粒子的宏观速度为 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$，其垂直于小面积的分量为 $v_n(\boldsymbol{r}, t)$，那么在 dt 时间内通过 dS 面的粒子数为(参看图 9.3)：

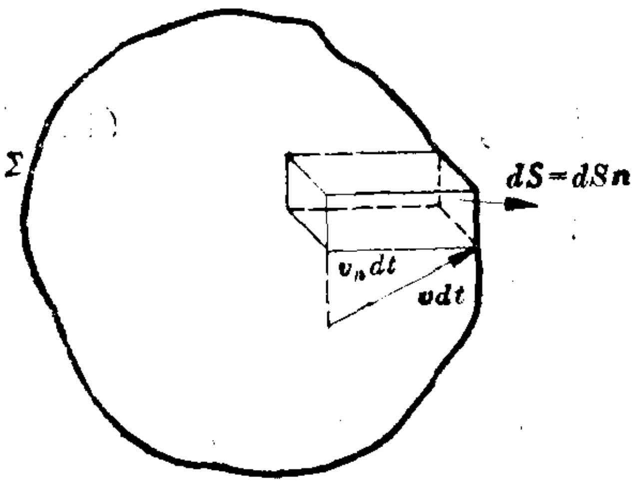

图 9.3

$$u(\boldsymbol{r}, t)v_n(\boldsymbol{r}, t)dt\,dS, \tag{2.1}$$

这里 $u(\boldsymbol{r}, t)$ 为粒子浓度.

在单位时间 $(dt=1)$ 内，流出固定区域表面的粒子数为

$$\oiint_{\Sigma} u\,v_n\,dS = \oiint_{\Sigma} u\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}, \tag{2.2}$$

这里利用了 $v_n\,dS=\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}$.

单位时间内在固定区域中粒子减少的数目为

$$-\frac{d}{dt}\iiint_V u(\boldsymbol{r}, t)dV = -\iiint_V \frac{\partial u(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}dV, \tag{2.3}$$

式中 V 表示区域的体积.

令(2.2)与(2.3)相等，得出

$$\oiint_{\Sigma} u\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} = -\iiint_V \frac{\partial u}{\partial t}dV. \tag{2.4}$$

由微积分学中的高斯定律,

$$\oiint_{\Sigma} u\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_{V}\nabla\cdot(u\boldsymbol{v})\,dV. \tag{2.5}$$

把(2.5)代入(2.4),并移项,得到

$$\iiint_{V}\left[\nabla\cdot(u\boldsymbol{v})+\frac{\partial u}{\partial t}\right]dV=0. \tag{2.6}$$

由于空间中的固定区域 V 是任意选取的,所以

$$\nabla\cdot(u\boldsymbol{v})+\frac{\partial u}{\partial t}=0. \tag{2.7}$$

方程(2.7)称作连续性方程,它表示无粒子源情况下的粒子数守恒.

斐克定律　粒子流量 $u\boldsymbol{v}$ 与浓度梯度的负值 $-\nabla u$ 成正比,其比例系数 D 称为扩散系数,即

$$u\boldsymbol{v}=-D\nabla u. \tag{2.8}$$

将(2.8)代入(2.7)并假定 D 为常量,这就得出

$$-D\nabla^2 u+\frac{\partial u}{\partial t}=0, \tag{2.9}$$

这里利用了 $\nabla\cdot\nabla u=\nabla^2 u$, ∇^2 为拉普拉斯算符. 方程(2.9)称作扩散方程. 方程(2.9)还可写成

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\nabla^2 u, \tag{2.10}$$

其中 $a^2\equiv D$.

热传导方程

与粒子从浓度大的区域向浓度低的区域扩散类似,热量从温度高的地方流向温度低的地方,这种现象称为热传导.

描述固体的热传导有两个基本定律,一个是能量守恒定律,另一个是关于热传导的傅里叶(Fourier)定律.

设单位体积的能量(即能量密度)为 $q(\boldsymbol{r}, t)$. 当无热源

存在时，只要把方程(2.7)中的 u 改成 q 就得到表示能量守恒定律的方程:

$$\nabla\cdot q\boldsymbol{v}+\frac{\partial q}{\partial t}=0. \tag{2.11}$$

傅里叶定律 能量流量 $q\boldsymbol{v}$ 与温度梯度的负值 $-\nabla u$ 成正比，其比例系数 $\varkappa$ 称为导热系数，即

$$q\boldsymbol{v}=-\varkappa\nabla u, \tag{2.12}$$

式中 $u(\boldsymbol{r},t)$ 为温度.

将(2.12)代入(2.11)，并设 $\varkappa$ 为常量，得到

$$-\varkappa\nabla^2 u+\frac{\partial q}{\partial t}=0. \tag{2.13}$$

根据比热 c 的定义

$$\rho c=\frac{\Delta q}{\Delta u}\qquad(\rho\text{ 是质量密度}), \tag{2.14}$$

于是由(2.14)，得到

$$\frac{\partial q}{\partial t}=\rho c\,\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{2.15}$$

将(2.15)代入(2.14)，得到

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\nabla^2 u, \tag{2.16}$$

其中 $a^2\equiv\varkappa/\rho c$.

(2.16)称作热传导方程，它的形式与扩散方程(2.10)一样.

§3. 拉普拉斯方程

本节讨论 (1) 稳定浓度和稳定温度分布符合的方程，(2)静电势的方程.

稳定浓度分布和稳定温度分布

扩散过程如果达到稳定状态，浓度的空间分布不再随时间变动，此时

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0, \tag{3.1}$$

方程(2.10)化成

$$\nabla^2 u=0. \tag{3.2}$$

方程(3.2)称作*拉普拉斯方程*，它描述稳定的浓度分布。

热传导过程如果达到稳定状态，温度的空间分布不再随时间变动，此时同样有(3.1)，将(3.1)代入(2.16)，方程(2.16)化成

$$\nabla^2 u=0. \tag{3.3}$$

方程(3.3)同样是拉普拉斯方程，它描述稳定的温度分布。

静电场方程

根据电磁学，若电场强度为 $\boldsymbol{E}$，电荷密度为 ρ 和介电系数为 ϵ，则静电场强度 $\boldsymbol{E}$ 满足如下的两个方程：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0, \tag{3.4}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\epsilon. \tag{3.5}$$

由(3.4)，得到

$$\boldsymbol{E}=-\nabla u, \tag{3.6}$$

式中 u 为静电势。将(3.6)代入(3.5)，得到

$$\nabla^2 u=-\frac{\rho}{\epsilon}. \tag{3.7}$$

方程(3.7)称作*泊松方程*。在无电荷的区域，(3.7)化成

$$\nabla^2 u=0. \tag{3.8}$$

这同样是拉普拉斯方程，它描述无电荷区域的电势分布。电荷密度 ρ 是静电场的源，方程(3.7)中右端的非齐次项 $-\rho/\epsilon$ 是源项。泊松方程(3.7)又可称作*非齐次的拉普拉斯方程*。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com