高等数学

（物理类）

第一册

段炎伏　牛亚轩　刘　耀

兰州大学出版社

高 等 数 学

（物理类专业）

第一册

段炎伏 牛亚轩 刘 耀

兰州大学出版社

（甘）新登字第 08 号

高等数学（物理类）

第一册

段炎伏　牛亚轩　刘　耀

兰州大学出版社出版
兰州市天水路 216 号　电话：8883156　邮政编码：730000

甘肃省静宁印刷厂印刷

开本：850×1168　毫米 1/32　　印张：11.25

1995 年 11 月第 1 版　　1995 年 11 月第 1 次印刷

字数：276 千字　　印数：1—3000 册

ISBN 7-311-00911-1/O·114　　定价：11.50 元

前　言

根据国家教委 1989 年 11 月 15 日印发的《综合大学本科物理类专业高等数学教学基本要求》(国家教委理科数学、力学教材编审委员会高等数学编审小组 1989 年审订通过)的要求，总结由刘耀、杨凤翔等同志所编《新编高等数学》(兰州大学出版社 1988 年 8 月出版)使用以来我们教研室各位老师在教学实践中的经验和体会，参考物理类专业师生对高等数学教材的意见和建议，重新编写出这部适用于物理类各专业的《高等数学》。

从编写的主导思想来讲，力图在如下几个方面有所进取：在便于教和学的前提下，力求体系的更新，增强对物理类各专业的针对性和适用性；在不追求完整的理论体系和严格的理论推导的同时，保持理论的严谨性和结论的准确性；不用直观代替证明，但充分注意数学结论的实际背景，以加深对结论的理解，提高应用所学结论证明和解决问题的能力；在讲授基本知识的基础上，注意能力的培养和知识面的拓广，为专业课教学及进一步学习使用近代数学创造条件。

本书分三册，第一册包括极限理论、一元函数微积分学、简单常微分方程，第二册包括空间解析几何和向量代数、多元函数微积分学、场论初步、无穷级数、常微分方程(续)，第三册为线性代数。

每册基本上供一学期教学之用。书中打 * 号部分以及附录内容，可供参考，不作讲授要求。每节后所配习题，作为学生巩固所学知识用，而各章后的综合练习可供总复习时提高综合解题能力使用。

由于编者水平有限，难免有错误和不足之处，恳请批评指正。

编者

一九九五年二月于兰州大学

目　录

（第一册）

引论　微积分起源的两类基本问题

我们将要学习的高等数学这门课程，包括了数学分析、空间解析几何、常微分方程、线性代数等数学分支。它是大学本科物理类各专业的重要基础课，也是进一步学习其它数学分支的必备基础。

数学分析的内容包括一元函数微积分学、多元函数微积分学、无穷级数论和作为理论基础的极限理论。由于构成数学分析的主体是一元和多元函数微积分学，所以也称数学分析为微积分。

微积分研究的是什么样的问题？使用的是什么样的方法？它与初等数学有着怎样的联系和区别？所有这些问题，无疑是大家开始学习微积分时所关心的问题。在系统学习微积分的内容之前，我们首先通过与微积分的起源有关的两类基本问题的研讨，对大家所关心的问题给予初步的解答，并指出学好微积分这门课程应注意的几个方面的问题。

17 世纪的数学家已逐渐看出，把关于研究各种运动量与量之间相依性的大多数问题以及先前无法解决的几何问题归并起来，不外乎两类。第一类问题最典型的例子是求变速直线运动的速度问题以及在曲线上求作切线的问题，由此引导出微分学，第二类问题最典型的例子是求曲线形的面积问题，由此引导出积分学。

§1　速度问题与切线问题

一　变速直线运动的速度

物体的运动有两种，一种是快慢始终不变的匀速运动。一种是

时而快、时而慢或逐渐加快、或逐渐慢下来的变速运动，客观实际中的运动常常是变速的。匀速直线运动的速度可用物体运动所走过的路程 S 除以所用的时间 t，即 $V=S/t$ 来表示，而对于变速直线运动每一个瞬时的速度该怎样表示呢？

比如，我们已知自由落体运动的规律是

$$S=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 S 表示落体下落的路程，t 表示落体下落的相应时间，g 是重力加速度。试问，从下落开始经历 t_0 秒这个瞬时的速度是多少？

若在落体下落的整段时间内考察自由落体运动，由于其速度是随时间而变的，虽然用路程除以时间可得出这段时间内的平均速度，却不可能得出这段时间内每个瞬时的速度。但是，若在落体下落的很小一段时间内考察落体运动，用路程除以时间得出的这一小段时间内的平均速度却是很有意义的，它不仅可看作这一小段时间内每一瞬时的速度的近似值，且这一小段时间越小，近似的程度越高。

按照这种想法，为了求自由落体在时间 t_0 的瞬时速度 v_0，我们考察从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内的运动，其中 Δt 表示从 t_0 开始所经过的一小段时间。于是，在 Δt 这段时间内，落体所经历的路程是

$$\Delta S=\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2=gt_0\cdot\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2(\text{米}),$$

此式除以 Δt，可得到落体在 Δt 这段时间内的平均速度

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{gt_0\cdot\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t}=gt_0+\frac{1}{2}g\Delta t(\text{米}/\text{秒})。$$

虽然此平均速度并不是 $t=t_0$ 时落体的瞬时速度 v_0，但它不仅是 v_0 的近似值，且随着 Δt 越小，其近似于 v_0 的程度就越高。为了使近

似值过渡到精确值，我们令 Δt 无限制地接近于 0，记作 $\Delta t \to 0$。当 $\Delta t \to 0$ 时，平均速度 $\Delta S/\Delta t$ 就转化为 v_0 的精确值 gt_0 了。

对于一般的变速直线运动 $S=S(t)$，它在 $t=t_0$ 的瞬间速度就是当 $\Delta t \to 0$ 时，在 Δt 时间间隔内的平均速度

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$$

无限接近之值 $v(t_0)$。

二 曲线切线的斜率

什么是曲线的切线？这是求曲线上一点处切线的斜率时应首先回答的问题。

切线是一条直线，但它不是一条一般的直线，而是曲线的切线，只有从切线与曲线的联系中去考察。切线与曲线都通过给定点 M_0，这是它们之间的一个联系，但仅仅看到这一点是不够的，事实上，经过 M_0 点的直线无穷多，那么，过 M_0 点的哪一条直线才是过 M_0 点的曲线的切线呢？我们不妨回忆一下用直尺画出曲线的切线的过程：开始时，先把直尺放在曲线上，除了点 M_0 外，还要与曲线在另一点 M 相交，即直尺成了曲线的割线；然后，不断改变直尺的位置，当点 M 沿着曲线越靠近点 M_0 时，直尺的位置便越接近曲线在点 M_0 的切线。

根据以上分析，设曲线方程为 $y=f(x)$，其上一点 M_0 的坐标为 $(x_0,f(x_0))$，在曲线上另取一点 M，其坐标为 $(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$，则割线 M_0M 的斜率

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

当点 M 沿曲线移动并无限接近于点 M_0，即 Δx 无限接近于 0 时，割线 M_0M 也随之变化而无限趋近于切线 M_0T。于是，当 $\Delta x \to 0$ 时，割线 M_0M 的斜率 $\mathrm{tg}\varphi$ 就无限接近于切线 M_0T 的斜率 $\mathrm{tg}\alpha$。即

当 $\Delta x \to 0$ 时，切线斜率的近似值——割线 M_0M 的斜率 $\mathrm{tg}\varphi$ 就转化为切线的斜率 $\mathrm{tg}\alpha$ 了。(如图 0.1)。

例如：求抛物线 $y=x^2$ 在其上任一点 $M_0(x_0, y_0)$ 的切线斜率，我们在抛物线上另取一点 $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. 先来计算割线 M_0M 的斜率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$。因为 M_0 和 M 都是抛物线 $y=x^2$ 上的点，所以

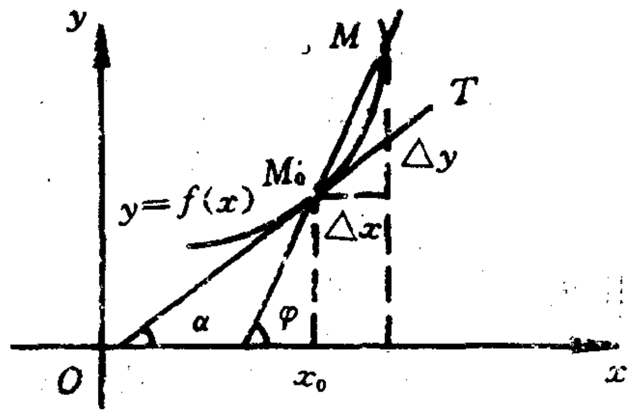

图 0.1

$$y_0 = x_0^2, \quad y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2,$$

从而 $$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2,$$

于是 $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

令 $\Delta x \to 0$，则有 $2x_0 + \Delta x \to 2x_0$。

故得抛物线 $y=x^2$ 在点 M_0 的切线斜率为 $2x_0$。

本节求变速直线运动的瞬时速度和求曲线的切线斜率问题，以及其它许多求一个量的变化率问题，虽从表面上看这些问题毫不相干，但在求解方法上却极其相似，都可先在局部计算所求量的近似值，然后通过“无限趋近”使近似值转化为精确值，对这种数量方面的共性作数学抽象，即可引出微分学的基本概念——导数。

§2 面积问题

在初等几何里，大家首先学会计算矩形、三角形和梯形等简单图形的面积，进而通过把多边形分解为有限个三角形的方法，又学

会了计算任何多边形的面积。特别，对于正多边形的面积，有公式

$$S=\frac{1}{2}lh \tag{1}$$

其中 l 是正多边形的周长，h 是边心距。

计算面积的重要性无须多说。下面让我们在讨论任意一条封闭曲线所围成的平面图形的面积之前，先追述一下在初等几何里已熟悉的求圆面积的公式 $S=\pi R^2$ 的起源。

一 圆的面积、割圆术

在初等几何里，由于圆的内接正多边形的面积可作为该圆面积的近似值，且随着多边形的边数的增加，这种近似程度就越高，于是当圆的内接正多边形的边数无限增加时，多边形面积就转化为圆的面积 $S=\pi R^2$。然而要完成这种从多边形到圆的过渡，则要求我们在观念上及思考方法上来一个突破。这里遇到的是曲与直的矛盾，用形而上学的观点看，曲就是曲，直就是直，非此即彼，互不相干；但唯物辩证法却认为，在一定的条件下，曲与直的矛盾是可以相互转化的。整个圆周是曲的，而每一小段圆弧却可近似地看成直的，即在很小一段圆弧上可以近似地以直的弦代替弧。

按照这种辩证思想，我们把圆周分成 n 个等长的小段，代替圆而先去考虑它的内接正 n 边形。根据公式(1)，这个正 n 边形的面积为

$$S_n=\frac{1}{2}l_nh_n=\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n},$$

其中 l_n 和 h_n 分别是正 n 边形的周长和边心矩，R 为圆的半径。直观上很明显，n 越大，内接正 n 边形的面积 S_n 就越近似于圆的面积 S，当 n 无限增大时，记作 $n\to\infty$，内接正 n 边形的面积 S_n 就转化为圆的面积 S。

在后面第一章中，我们称圆的面积 S 为数列 $S_n=\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n}$

的极限，到那时大家会自己证明此数列 S_n 的极限 $S=\pi R^2$。

同理，由于半径为 R 的圆内接正 n 边形的周长 $l_n = 2nR\sin\frac{\pi}{n}$，因此，此数列 l_n 的极限 $2\pi R$ 就是半径为 R 的圆的周长。

上述利用圆的内接正多边形来推算圆的周长的方法，是我国数学家刘徽早在公元三世纪的魏晋时期提出来的，称为割圆术。刘徽说："割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。"当时，刘徽通过割圆术已经求得圆周率 π 的近似值为 3.1416。

二　曲边梯形的面积

对一条封闭曲线所围成的平面图形，用初等方法是求不出它的面积的。若用两组互相垂直的直线分割它，所得到的除矩形外，不是有一条边是曲边的曲边梯形，就是曲边梯形的特例曲边三角形。因此，只要会计算曲边梯形的面积，求一般平面图形的面积也就迎刃而解了。

在坐标平面上，典型的曲边梯形就是由一条曲线 $y=f(x)$、两条平行于 y 轴的直线 $x=a$ 和 $x=b$ 以及一条与 x 轴重合的直线 $y=0$ 所围成的平面图形。由于曲边梯形的一条边是曲的，在求它的面积时，我们又遇到了曲与直的矛盾，克服这一困难的办法是：把曲边梯形先用平行于 y 轴的直线分割成许多小窄条，并把这些窄条近似地用矩形代替，这些小矩形的宽为形成各窄条的分割线间的距离，各自的高取作相应窄条曲边上任一点处的 y 值；再将各矩形条的面积加起来，就可得到曲边梯形面积的近似值；显然，当分割无限变细时，这个近似值也就无限地趋近于曲边梯形面积的真值。

例如：求由 $y=x^2$、$x=0$、$x=1$ 及 $y=0$ 所围成的曲边梯形的面积。

把区间$[0,1]$ n等分，则分点的坐标为$0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots\cdots,\frac{n-1}{n},1$。过各内分点作平行于$y$轴的直线，原曲边梯形被分割为$n$个窄条。

若以各窄条的左端点的高为高作矩形，则得原曲边梯形面积的不足近似值

$$S_n^-=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i-1}{n})^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2},$$

当各窄条无限变窄(即$n\to\infty$)时，S_n^-将无限接近于$\frac{1}{3}$；

若以各窄条的右端点的高为高作矩形，则得原曲边梯形面积的过剩近似值

$$S_n^+=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2},$$

当各窄条无限变窄(即$n\to\infty$)时，S_n^+也将无限接近于$\frac{1}{3}$。

由此可见，所求曲边梯形的面积等于$\frac{1}{3}$。

本节求曲边梯形的面积问题，以及在非匀速运动中求所经历的总路程问题和一般地求连续变量的作用的总和(如求正方形贮水池中的水对一壁的总压力)等问题，都可通过分割来求整体量，先求其局部近似值，再求和得整体近似值，最后令分割无限变细使近似值转化为精确值。对这类问题的处理方法作数学抽象，即可引出积分学的基本概念——定积分。

在上述两节中，我们列举了微积分学的两类基本问题，并作了比较详细的研讨，力求通过这些典型的例子说明微积分学研究的问题和解决问题所依据的基本观点和基本方法。为使大家掌握其特点，现小结如下：

1. 贯穿在整个讨论中的一个基本观点，就是变化的观点。用变化的观点去考察问题，从变化当中去认识事物。

例如，关于速度问题，我们在一小段时间内的平均速度的变化