

共振荧光与超荧光

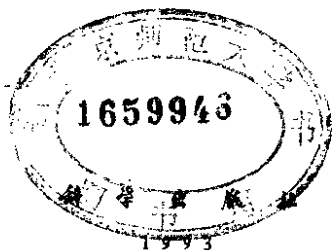
彭金生 著

科学出版社

共振荧光与超荧光

彭金生 著

JY1135116



(京)新登字 092 号

内 容 简 介

本书对量子光学的两个前沿课题共振荧光和超荧光作了专门的论述。第一章首先介绍光与原子相互作用的准经典理论和全量子理论；第二章讨论共振荧光及其发展，介绍了在激光场作用下原子系统的时间演化特性及虚光场效应；第三章着重讨论超荧光及其理论的发展，并介绍了小系统与库耦合行为的量子理论。

本书对基本理论的论述深入浅出、简明严谨、便于自学。由于做到了把具体问题与普遍性理论有机的结合，从而不仅有利于读者对共振荧光和超荧光本身有较为全面和深入的了解，而且还能由此得知处理量子光学中其他问题与更为普遍的理论方法。

本书适合于理、工科大学物理专业高年级学生、研究生以及从事理论物理和量子光学教学和研究人员参考。

共振荧光与超荧光

彭金生 著

责任编辑 巴建芬 张邦固

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1993 年 11 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1993 年 11 月第一次印刷 印张：7 1/2

印数：1-350 字数：191 000

ISBN 7-03-003682-4/O·656

定价：8.70 元

前 言

共振荧光与超荧光是当前量子光学领域中十分重要的分支。我们知道,量子光学作为一门学科,应该说是近 20 年的事。虽然光的量子理论的诞生应归功于本世纪初普朗克的量子论和爱因斯坦的量子学说,然而,理论上采用量子理论,全面而系统地研究光的产生、光的吸收、光与物质(分子、原子等)的相互作用以及光的各种非线性效应,并能从实验上加以探讨则是 60 年代产生激光以后的事。由于有了激光,许多新的光学效应能够从量子层次上揭示出来,从而形成一些不同的课题,如激光的量子理论、共振荧光、超荧光(又称超辐射)、光学双稳态、光场的相干态和压缩态、多光子过程、原子的捕获与冷却,等等。随着实验技术的提高,新的光学效应进一步被揭示出来,它们不断充实量子光学的内容,并促进量子光学理论的进一步深化和完善,不断拓展它的内涵。

我国近年来在量子光学领域的研究有了迅速的发展,在不少方面取得了引起国际量子光学界注意的成就,然而,不论是理论研究还是实验研究均起步较晚,大量的工作亟待我国科学工作者去进行。考虑到共振荧光与超荧光在量子光学理论中的重要性,特别是它对于高分辨率频谱技术、新型高功率激光器的研制以及原子超精细结构的分析技术等方面有重要的应用前景,作者将自己多年来在研究生的教学工作中的体会,结合我们近期的一些研究成果,对此课题作一专门论述,希望能起到抛砖引玉的作用。

全书共分三章。第一章首先介绍原子与电磁场相互作用的理论,在讨论了准经典模式的光学布洛赫方程以后,着重介绍全量子理论的狄克模式和 JC 模型,它们是我们处理许多光与物质相互作用效应的理论基础,此外,还介绍了光场的压缩态以及原子算符的压缩效应。第二章讨论共振荧光问题,在介绍了与强场作用的

二能级原子的理论处理，特别是在介绍了应用修饰(dress)变换技术的基本方法以后，着重讨论了共振荧光理论及其发展。本章最后一节还专门介绍了原子的周期崩塌与回复以及虚光场效应等方面的近期研究结果。第三章讨论超荧光，首先说明准经典理论虽然也能满意解释超荧光的一些基本特征，但是由于它忽略了量子涨落效应，所以未能满意解决超荧光问题，然后由狄克模式出发重点讨论了超荧光的量子理论。在介绍了密度算符及其应用以后，集中讨论了小系统与库耦合行为的量子描述，它也是研究量子光学问题的基本理论，其中较详细地介绍了密度算符的主方程、量子朗之万方程以及福克尔-普朗克方程，并结合超荧光的问题作了一些具体的讨论，以便于读者掌握量子光学中应用较为广泛的小系统与库耦合的基本理论。本章的结尾部分还较详细地介绍了超荧光拍及其量子理论处理。

为了便于读者了解和掌握本书内容，作者对量子光学的基础理论和基本方法作了深入浅出的概述；对于共振荧光与超荧光两个专题，从理论上作了系统而全面的论述，着重在研究方法上进行引导，并对当前国内外最新成果及其发展动态加以介绍，力求深入浅出、思路清晰。因此，本书适合物理专业高年级学生、研究生、教师以及从事量子光学研究和教学人员阅读，也可供从事理论物理研究的工作者参考。

当代科学技术的发展是飞速的，有关量子光学的研究也在不断深化和拓展。读者可以看出，本书论述的理论和方法是具有普适性的，而且在现阶段其内容也是具有先进性的。限于篇幅，书中省去了一些可以展开的内容，不过有兴趣的读者可参阅书中所列的参考文献。书中还可能出现一些错误和不妥之处，衷心地欢迎读者批评指正。

此书的完成，得到国家自然科学基金委员会对我的研究工作的支持，使我能较好地坚持对共振荧光与超荧光以及量子光学的其它课题不断进行探索；还得到意大利国际理论物理中心和 A. Salam 教授的支持，以及 F. Persico 教授，C. Leonardi 教授的许

多有益讨论；以及华中师范大学的支持，在此一并表示感谢。最后，还要特别感谢黄柏秀对我的研究工作的长期支持和许多帮助，以及我的学生、朋友李高翔和周鹏对完成此书的支持与协助。

彭金生

1992年3月于华中师范大学

目 录

第一章 光与原子的相互作用	1
§ 1.1 二能级原子与光学布洛赫 (Bloch) 方程.....	1
1. 二能级原子.....	1
2. 二能级原子与电磁场相互作用的哈密顿算符.....	1
3. 光学布洛赫方程.....	3
§ 1.2 电磁场的量子化.....	6
§ 1.3 描述光场的态函数.....	10
1. 光子数态.....	10
2. 光场的相干态.....	17
3. 相位算符和相位态.....	18
§ 1.4 量子力学描述的三种绘景.....	23
1. 薛定谔 (Schrödinger) 绘景.....	23
2. 海森伯 (Heisenberg) 绘景.....	24
3. 相互作用绘景.....	27
§ 1.5 原子与场相互作用的狄克 (Dicke) 模式.....	41
§ 1.6 受激原子的自发发射.....	45
§ 1.7 辐射场的压缩态与原子算符的压缩效应.....	50
1. 辐射场的压缩态.....	50
2. 压缩叠加态.....	53
3. 原子算符的压缩.....	55
参考文献.....	65
第二章 原子的共振荧光	67
§ 2.1 与强场相互作用的二能级原子系统的理论处理.....	67
1. 描述系统的哈密顿量.....	67
2. 哈密顿算符 H 的对角化方法.....	69
3. 修饰规范变换.....	71

§ 2.2 单原子共振荧光理论	75
1. 共振荧光及其实验结果	75
2. 单原子共振荧光的频谱分布	76
3. 三峰带荧光谱线的线宽	79
4. 荧光谱线的强度分布	84
§ 2.3 集合原子共振荧光理论	92
§ 2.4 三能级原子的共振荧光频谱分布	95
1. 描述在双单色场作用下三能级原子系统的哈密顿量	95
2. 与一强单色场和一弱单色场作用的三能级原子的共振荧光频谱分布	97
3. 在双强单色场作用下三能级原子的共振荧光频谱分布	103
§ 2.5 原子的周期崩塌与回复及虚光场效应	110
1. 双光子场作用下原子的周期崩塌与回复效应	110
2. 虚光场效应对原子周期崩塌和回复的影响	117
3. 虚光场对光场相位涨落的影响	124
参考文献	132
第三章 超荧光及其量子统计理论	134
§ 3.1 超荧光的准经典理论	134
1. 超荧光的基本特征	134
2. 超荧光的准经典理论	137
§ 3.2 超荧光的量子理论描述	144
1. 描述系统的海森伯运动方程	144
2. 超荧光的狄克模式	149
§ 3.3 密度算符及其应用	154
1. 密度算符及其特性	154
2. 密度算符方程的解	159
3. 约化密度算符	163
4. 密度算符实例	164
5. 用熵的最大值原理确定密度算符	170
§ 3.4 小系统与库耦合行为的量子理论	176
1. 朗之万方程	176

2. 福克尔-普朗克方程	178
3. 量子谐振子满足的主方程	185
4. 准概率分布的 P 表示	194
§ 3.5 量子朗之万方程及真空场涨落的作用	196
1. 量子谐振子的朗之万方程	196
2. 原子的朗之万方程及真空场涨落的作用	199
3. 原子的 P 表示	202
4. 热辐射场的触发作用	207
§ 3.6 超荧光拍	208
1. 超荧光拍及简单系统的理论处理	208
2. 狄克模式中的超荧光拍	216
参考文献	223
索引	225

第一章 光与原子的相互作用

§ 1.1 二能级原子与光学布洛赫 (Bloch) 方程

1. 二能级原子

实际原子的结构都是比较复杂的。例如最简单的氢原子，它的本征频谱就由多组束缚离散谱和一连续谱组成，其大部分能级都是简并的，所以精确讨论多原子系与光场的相互作用是不可能的，即使讨论一个原子与光的相互作用也难以给出精确的解释，通常需要借助某些假设。电磁场能诱导原子不同本征态间的许多可能的跃迁，然而最可能的跃迁是原子本征频率与光场频率近似相等的跃迁。所以，最自然的假设是令原子只有两个非简并能级，称之为二能级原子。二能级间的本征跃迁频率为 ω_0 ，当原子与频率为 $\omega \approx \omega_0$ 的单模辐射场发生作用时就导致共振跃迁。显然二能级原子是一个实际原子的理想模型，如同质点的假设在经典力学中具有的重要性一样，二能级原子在研究光与物质相互作用的理论中起了很基本的作用。从概念上说，二能级原子与磁场中自旋为 $1/2$ 的粒子属于同一类粒子，我们有时也称二能级原子为自旋 $1/2$ 的赝自旋粒子。

2. 二能级原子与电磁场相互作用的哈密顿算符

描述偶极矩为 D 的二能级原子与辐射场（我们用电磁场 $E(\mathbf{r}_0)$ 表示）相互作用的系统的哈密顿算符可以写为

$$H = H_A - D \cdot E(\mathbf{r}_0) \quad (1.1.1)$$

其中 H_A 为描述二能级原子本身的能量算符， D 为描述二能级原子的偶极矩算符， $E(\mathbf{r}_0)$ 为偶极子在 \mathbf{r}_0 处的电磁场算符。令二能级原子的两个本征态为 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$ ，我们有

$$H_A|\pm\rangle = E_{\pm}|\pm\rangle \quad (1.1.2)$$

若用矩阵表示 H_A , 则可写为

$$H_A = \begin{bmatrix} \langle +|H_A|+ \rangle & \langle +|H_A|- \rangle \\ \langle -|H_A|+ \rangle & \langle -|H_A|- \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_+ & 0 \\ 0 & E_- \end{bmatrix} \quad (1.1.3)$$

也可以在本征态 $\{| \pm \rangle\}$ 中表示相互作用能 $-D \cdot E(\mathbf{r}_0)$, 因为原子偶极矩为

$$D = e\mathbf{r} \quad (1.1.4)$$

它是奇宇称, 而且已设 $|+\rangle, |-\rangle$ 有确定宇称, 于是

$$\begin{aligned} \langle +|D|+ \rangle &= 0 & \langle -|D|- \rangle &= 0 \\ \langle +|D|- \rangle &= D_{+-} \neq 0 & \langle -|D|+ \rangle &= (D_{+-})^* \neq 0 \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

若取 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$ 为氢原子的两个本征态 $\Psi_{211}(\mathbf{r})$ 和 $\Psi_{100}(\mathbf{r})$, 则偶极矩阵元

$$D_{+-} = \int \Psi_{211}^*(\mathbf{r}) e\mathbf{r} \Psi_{100}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (1.1.6)$$

可以分为径向积分与角积分的乘积, 其中

$$\begin{aligned} \text{径向积分} &= \int (2a_0^{-1})^{-3/2} \exp(-r/2a_0) e\mathbf{r} (2r/a_0 \sqrt{3}) a_0^{-3/2} \\ &\quad \times \exp(-r/a_0) r^2 dr \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

$$\begin{aligned} \text{角积分} &= \int Y_{11}^*(\theta, \varphi) (X \sin \theta \cos \varphi + Y \sin \theta \sin \varphi \\ &\quad + Z \cos \theta) Y_{00}(\theta, \varphi) d\tau \end{aligned}$$

这里 X, Y, Z 为笛卡儿坐标的单位矢量, 在一般情况下, 偶极矩阵元是复矢量, 故可描述为

$$D_{+-} = \mathbf{d}_r + i\mathbf{d}_i \quad (1.1.8a)$$

$$D_{-+} = \mathbf{d}_r - i\mathbf{d}_i \quad (1.1.8b)$$

$$\mathbf{d}_r = -(2^7/3) e a_0 X \quad (1.1.9a)$$

$$\mathbf{d}_i = (2^7/3) e a_0 Y \quad (1.1.9b)$$

其中 \mathbf{d}_r 和 \mathbf{d}_i 为实矢量. 这样厄米算符 D 可以在二维空间中表示成非对角矩阵形式:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{d}_r + i\mathbf{d}_i \\ \mathbf{d}_r - i\mathbf{d}_i & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1.10)$$

所以系统的哈密顿量可以写为矩阵形式:

$$\begin{aligned}
 H &= \begin{bmatrix} E_+ & 0 \\ 0 & E_- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & (d_r + i d_i) \cdot E \\ (d_r - i d_i) \cdot E & 0 \end{bmatrix} \\
 &= (E_+ + E_-)/2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + (E_+ - E_-)/2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\quad - (d_r \cdot E) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (d_i \cdot E) \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1.11)
 \end{aligned}$$

选取 $E_+ + E_- = 0$, 并考虑到

$$\omega_0 = (E_+ - E_-)/\hbar \quad (1.1.12)$$

同时应用泡利算符 σ_i 来表示式 (1.1.11) 中描述二能级原子的矩阵, 则式(1.1.11)成为

$$H = \hbar\omega_0\sigma_3/2 - (d_r \cdot E)\sigma_1 + (d_i \cdot E)\sigma_2 \quad (1.1.13)$$

其中泡利算符 σ_i 满足对易关系

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\sigma_k \quad (1.1.14)$$

3. 光学布洛赫方程

在得出了描述二能级原子与电磁场 E 相互作用系统的哈密顿量表示式(1.1.13)以后, 我们就可以进一步讨论原子系统的时间演化算符。我们知道, 任意不显含时间算符 A 的海森伯方程为

$$\frac{d}{dt} A = (i/\hbar)[H, A] \quad (1.1.15)$$

那么根据式(1.1.13), 并利用式(1.1.14)可得原子算符的运动方程为

$$\frac{d}{dt} \sigma_1(t) = -\omega_0\sigma_2(t) + (2/\hbar)(d_i \cdot E(t))\sigma_3(t) \quad (1.1.16a)$$

$$\frac{d}{dt} \sigma_2(t) = \omega_0\sigma_1(t) + (2/\hbar)(d_r \cdot E(t))\sigma_3(t) \quad (1.1.16b)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \sigma_3(t) &= -(2/\hbar)(d_r \cdot E(t))\sigma_2(t) \\
 &\quad - (2/\hbar)(d_i \cdot E(t))\sigma_1(t) \quad (1.1.16c)
 \end{aligned}$$

由此可以得知原子算符的时间行为。

要精确求解式 (1.1.16) 是相当复杂的,特别是当电磁场用算符 $\mathbf{E}(t)$ 表示时,情况更为复杂。一种简化是略去场算符与原子算符间的量子关联,即假定在计算算符乘积 $\mathbf{E}(t)\sigma_i(t)$ 的期望值时,可以写为两算符期望值之积,也就是令

$$\langle \mathbf{E}(t)\sigma_i(t) \rangle = \langle \mathbf{E}(t) \rangle \langle \sigma_i(t) \rangle \quad (1.1.17)$$

其次在准经典理论里,通常假定电磁场为经典场,所以电磁场算符期望值 $\langle \mathbf{E}(t) \rangle$ 采用经典场 $\mathbf{E}(t)$ 代替。这样,如果我们把方程 (1.1.16) 中的电场算符用它们的期望值取代,并且令

$$S_i(t) \equiv \langle \sigma_i(t) \rangle \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.1.18)$$

那么可得准经典理论下原子与场相互作用的动力学方程

$$\begin{aligned} \dot{S}_1(t) &= -\omega_0 S_2(t) + (2/\hbar) \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_0) S_3(t) \\ \dot{S}_2(t) &= \omega_0 S_1(t) + (2/\hbar) \mathbf{d}_r \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_0) S_3(t) \\ \dot{S}_3(t) &= -(2/\hbar) \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_0) S_1(t) - (2/\hbar) \mathbf{d}_r \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_0) S_2(t) \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

在进一步讨论式 (1.1.19) 的解以前,我们先分析一下期望值 $S_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) 的物理意义。由式 (1.1.13) 可以看出, $\hbar\omega_0 S_1(t)/2$ 表示原子的能量,所以 $S_3(t)$ 对应原子能量算符的期望值。而由式 (1.1.11) 和 (1.1.13) 可知, $S_1(t)$ 和 $S_2(t)$ 两者表示原子的偶极矩算符的期望值。

如果把式 (1.1.19) 分别乘上 $S_1(t), S_2(t)$ 和 $S_3(t)$ 并相加,则知

$$S_1(t)\dot{S}_1(t) + S_2(t)\dot{S}_2(t) + S_3(t)\dot{S}_3(t) = 0 \quad (1.1.20)$$

这说明

$$S_1^2(t) + S_2^2(t) + S_3^2(t) = \text{常数值} \quad (1.1.21)$$

而且可以进一步证明此常数为 1。因为若令原子态为一般态

$$|\Psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle \quad (1.1.22)$$

那么显然有

$$\begin{aligned} S_1(0) &= \langle \Psi | \sigma_1 | \Psi \rangle = a^*b + ab^* \\ S_2(0) &= \langle \Psi | \sigma_2 | \Psi \rangle = -i(a^*b - ab^*) \\ S_3(0) &= \langle \Psi | \sigma_3 | \Psi \rangle = |a|^2 - |b|^2 \end{aligned}$$

也就是说

$$S_1^2(0) + S_2^2(0) + S_3^2(0) = (|a|^2 + |b|^2)^2 \quad (1.1.23)$$

由于态函数满足归一化的要求, 即 $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$, 于是, $|a|^2 + |b|^2 = 1$. 这就是说

$$S_1^2(t) + S_2^2(t) + S_3^2(t) = 1 \quad (1.1.24)$$

它说明, 原子态随时间 t 的变化, 保持概率守恒, 我们称矢量 $\mathbf{S}(t) (S_1(t), S_2(t), S_3(t))$ 为原子的自旋矢量, 则式 (1.1.24) 表明, 描述原子系统的自旋矢量随时间 t 变化保持在单位球面上, 如图 1.1 所示.

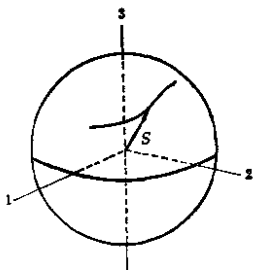


图 1.1 自旋矢量 $\mathbf{S}(t)$ 在单位球面上的演化轨迹

通常也可以选定态 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$ 是 $\Delta m = 0$ 的跃迁态. 于是, 可以选择态的相位因子使得偶极矩的 d_i 等于零, 并令

$$(2/\hbar) \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{E} = (2d/\hbar) \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{E} = \hbar k E \quad (1.1.25)$$

标量 E 表示电场矢量 \mathbf{E} 沿单位矢 \mathbf{U}_i 的分量, k 则定义为

$$\hbar k/2 = d \quad (1.1.26)$$

这里 \mathbf{U}_i 和 d 分别表示偶极矩的方向和数值. 这样描述原子和场相互作用的自旋矢量满足的运动方程 (1.1.19) 简化为

$$\begin{aligned} \dot{S}_1(t) &= -\omega_0 S_2(t) \\ \dot{S}_2(t) &= \omega_0 S_1(t) + \hbar k E(t, \mathbf{r}_0) S_3(t) \\ \dot{S}_3(t) &= -\hbar k E(t, \mathbf{r}_0) S_2(t) \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

它与电偶极子满足的磁共振方程类似. 同样, 方程 (1.1.27) 也可如磁共振方程一样改写为受转矩力 \mathbf{Q} 作用下矢量 $\mathbf{S}(t)$ 的随时间发生旋进运动的方程. 若令矢量 $\mathbf{Q}(t)$ 的分量为

$$Q_1(t) = -\hbar k E, \quad Q_2(t) = 0, \quad Q_3(t) = \omega_0 \quad (1.1.28)$$

那么矢量 $\mathbf{S}(t) (S_1(t), S_2(t), S_3(t))$ 满足的运动方程 (1.1.27) 可写为

$$\frac{d}{dt} \mathbf{S}(t) = \mathbf{Q}(t) \times \mathbf{S}(t) \quad (1.1.29)$$

我们称描述二能级原子与辐射场相互作用的原子质自旋运动方程(1.1.27)或(1.1.29)为光学布洛赫方程。在这里,光场对原子的效应通过转矩力 $\mathbf{Q}(t)$ 体现,它导致原子质自旋矢量 $\mathbf{S}(t)$ 随时间在单位球面上旋进。光学布洛赫方程是准经典理论框架内研究原子(单个原子或集合原子)与辐射场相互作用系统问题的基本方程。例如,在第三章中,我们讨论超荧光的准经典理论处理时就将以它为出发点。

§ 1.2 电磁场的量子化

应用经典电磁场来描述光场,是不能很完全地解释光与物质相互作用的特征的。为了在量子层次上正确描述光场,需要将电磁场量子化。

在经典电动力学里,真空中的电磁场借助拉格朗日密度 L 来描述

$$L = (1/8\pi) \left[c^{-2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right)^2 - (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right] \quad (1.2.1)$$

其中 \mathbf{A} 是满足库仑规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 的矢量势。电场强度 \mathbf{E} 和磁场强度 \mathbf{B} 可由 \mathbf{A} 表示

$$\mathbf{E} = c^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \quad (1.2.2a)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.2.2b)$$

应用关系式

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} L = -(1/4\pi) \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -(1/4\pi) \nabla \times \mathbf{B} \quad (1.2.3a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{A}}} L = (1/4\pi c^2) \dot{\mathbf{A}} = (1/4\pi c) \mathbf{E} \quad (1.2.3b)$$

并解拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)} \right] - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{A}} = 0 \quad (1.2.4)$$

我们可由上式代入式(1.2.3)后得麦克斯韦方程组的第一式:

$$(1/c) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (1.2.5a)$$

此外,由式(1.2.2)可直接得麦克斯韦方程的其它三式

$$(1/c) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (1.2.5b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2.5c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.2.5d)$$

由式(1.2.2)和(1.2.5a)我们很容易得到矢量势 \mathbf{A} 满足的运动方程:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (1.2.6)$$

与矢量势共轭的广义动量 \mathbf{P} 可由式(1.2.1)写为

$$\mathbf{P} = - \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)} = (1/4\pi c^2) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \quad (1.2.7)$$

把式(1.2.7)代入式(1.2.1),则拉格朗日密度可表为

$$L = 2\pi c^2 \mathbf{P}^2 - (1/8\pi)(\nabla \times \mathbf{A})^2$$

于是真空场中的电磁场的哈密顿函数为

$$H_F = \int L d^3r = \int \{2\pi c^2 \mathbf{P}^2 + (1/8\pi)(\nabla \times \mathbf{A})^2\} d^3r \quad (1.2.8)$$

我们假定,电磁场限于立方体积为 V 的腔体内,而且在立方体的腔壁上满足周期边界条件,于是可以对 \mathbf{A} 和 \mathbf{P} 进行傅里叶变换:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = V^{-1/2} \sum_{ij} \mathbf{e}_{ij} A_{ij}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad A_{ij} = A_{ij}^* \quad (1.2.9a)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = V^{-1/2} \sum_{kj} \mathbf{e}_{kj} P_{kj}(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad P_{kj} = P_{kj}^*$$

其中波矢 \mathbf{k} 和极化单位矢量 \mathbf{e}_{kj} 由下式给出 ($j = 1, 2$ 表征两个极化方向):

$$\mathbf{k} = 2\pi/V^{1/3}(in_x + jn_y + kn_z), n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\mathbf{e}_{k1} = \mathbf{e}_{-k2} = \mathbf{e}_{-k1}, \mathbf{e}_{k1} \cdot \mathbf{e}_{k1'} = \delta_{11'}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{kj} = 0 \quad (1.2.9b)$$

这样, 我们就把电磁场分解为由一组无限多个分离的平面波模式组成. 每一个模式由波矢 \mathbf{k} 和极化 j 表征.

电磁场的量子化方法是把经典物理量 $A_{kj}(t)$ 和 $P_{kj}(t)$ 用算符 $\hat{A}_{kj}(t)$ 和 $\hat{P}_{kj}(t)$ 取代, 并且其算符满足对易关系

$$[\hat{A}_{kj}(t), \hat{P}_{k'j'}(t)] = i\hbar\delta_{kk'}\delta_{jj'} \quad (1.2.10)$$

更为有用的是引入两个新算符 $a_{kj}(t)$ 和 $a_{kj}^\dagger(t)$ 来取代算符 \hat{A}_{kj} 和 \hat{P}_{kj} , 考虑到式(1.2.9a), 它们之间的关系定义为

$$\hat{A}_{kj}(t) = (2\pi\hbar c^2/\omega_k)^{1/2}[a_{kj}(t) + a_{kj}^\dagger(t)] \quad (1.2.11a)$$

$$\hat{P}_{kj}(t) = i(\hbar\omega_k/8\pi c^2)^{1/2}[a_{kj}(t) - a_{kj}^\dagger(t)] \quad (1.2.11b)$$

由式(1.2.10)得知, 它们之间满足的对易关系为

$$[a_{kj}, a_{k'j'}^\dagger] = \delta_{kk'}\delta_{jj'} \quad (1.2.12a)$$

$$[a_{kj}, a_{k'j'}] = [a_{kj}^\dagger, a_{k'j'}^\dagger] = 0 \quad (1.2.12b)$$

把式(1.2.11)代入式(1.2.9), 得到

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{kj} (2\pi\hbar c^2/V\omega_k)^{1/2} \mathbf{e}_{kj} [a_{kj}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + a_{kj}^\dagger(t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}] \quad (1.2.13a)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{kj} (\hbar\omega_k/8\pi c^2 V)^{1/2} \mathbf{e}_{kj} [a_{kj}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - a_{kj}^\dagger(t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}] \quad (1.2.13b)$$

把上式代入式(1.2.8), 并对体积 V 积分, 经过简单代数运算后得

$$H = -(\hbar/4V) \sum_{kj} \sum_{k'j'} (\omega_k\omega_{k'})^{1/2} [\mathbf{e}_{kj} \cdot \mathbf{e}_{k'j'} + (\mathbf{e}_{kj} \times \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{e}_{k'j'} \times \mathbf{k}')/kk']$$

$$\times \int dV [a_{kj}(t)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) - a_{kj}^\dagger(t)\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})]$$

$$[a_{k'j'}(t)\exp(i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}) - a_{k'j'}^\dagger(t)\exp(-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r})] \quad (1.2.14)$$

• • •