

平差计算

(实用公式)

[西德] H. 沃尔夫

测绘出版社

平 差 计 算

(实用公式)

[西德] H. 沃尔夫 著
方 佩 竹 译
胡 明 城 校



测绘出版社

002581

本书通过矩阵及向量形式导出普通测量、大地测量以及几何卫星大地测量的实用公式，并列举了大量的实例。

本书涉及与统计学的联系，列举出测量平差中实用的各种检验法。

本书附录内收入应用矩阵及向量时所必需的公式。

本书为从事测量作业、科研及教学人员必备的参考书。

H. Wolf
AUSGLEICHUNGSRECHNUNG
Formeln zur praktischen Anwendung
Ferd. Dümmler, Bonn, 1975.

平 差 计 算

(实用公式)

【西德】 H·沃尔夫 著

方 佩 竹 译

胡 明 城 校

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 · 印张 9 1/8 · 字数 237 千字

1983 年 6 月第一版·1983 年 6 月第一次印刷

印数 1—9,000 册·定价 1.15 元

统一书号：15039·新 254

前 言

平差计算主要以其应用为特色。这一本公式汇编，应当着重考虑这一观点。

A篇包括一些总的联系，而以测量学中所必须引用的“误差理论”为开始，接着列出非相关观测公式，其次是相关观测公式。人们可能认为，仅就一般情况列出这些有关公式(73—75页)就够了，然后让读者自己把一般情况加以特殊化，由此补齐所有其余的平差公式，然而这是不可能的。

B篇所述的各种应用，几乎毫无例外地取自大地测量领域。

C篇是陈述与统计学的联系，并列举了大地测量平差中乐意采用的各种检验方法。

D篇为附录，其中搜集了应用矩阵及向量时所必需的一些有用公式。

没有采用行列式理论及广义逆阵论。人们在实践中并未涉及到这些理论；有证据表明这会导致广义逆阵的误用，甚至得出错误的平差结果。

本书与同一出版社1968年发行的“依最小二乘法平差计算”一书是衔接的，但有下列改变：

在所有的公式中，都涉及到“观测未知数”新近的不同处理情况。其次是增添了特别的一章“分组平差”，其中包括一系列新、旧方法，也有滤波法及拟合推估法。

在应用方面，提到了自由网。关于导线网，鉴于有了现代计算工具，不考虑采用条件观测平差，而是推荐间接观测平差。几何卫星大地测量中有空间轨道平滑摄影法，在数理统计检验法的应

用中，扩充了几种附加的检验法。

本书打算作为高级的指导教科书。也望可作为作业人员在解决有关问题时的有益辅助工具。

H. 沃尔夫 (Helmut Wolf)

1975 年春于波恩

导 言

平差计算的对象:

平差计算的对象是观测、读数和记录这三个过程的数字结果, 这个结果简称为观测值 L 。

平差计算的任务:

由于观测有误差, 就出现了矛盾, 平差计算的任务是, 于观测值中加入改正数 v , 借以消除矛盾, 使平差值或最或是值 $(L + v)$ 与真值之差尽可能地小。与 $(L + v)$ 结合在一起的, 还会出现作为其它参数的未知数 x , 它们的最或是值同样由平差来求定。这里所运用的原理应是最小二乘法。

必要的前提:

a) 观测值 L 应当有多余的个数。

b) 在平差之前, 必须知道观测值 L 不精确的程度, 例如以先验中误差或以权表示这种程度。同时也要知道观测量可能的随机联系, 例如通过观测量之间的相关系数来表达这种联系, 这也是应当预先假定的。

附带的任务:

在于由改正数 v 的计算值 (因而在实施了平差之后) 计算后验中误差, 即

a) 求参入平差的观测值 L 的中误差,

b) 由平差产生的 $(L + v)$ 及 x 的中误差, 或 $(L + v)$ 及 x 的函数的中误差。

还有各 $(L + v)$ 之间、各 x 之间的或 $(L + v)$ 与 x 之间的相关系数的计算, 也属于附带的任务。

非平差的情况:

如果不存在多余观测, 那么就不能进行平差, 这时误差计算只限于由先验观测中误差 (或其相关性) 来求定事先给定的、未

平差观测值 L 的函数 F 的中误差（二误差传播）。

模 型：

a) 函数模型（或限定模型）：可理解为在各 $(L + v)$ 之间或各 x 之间可以建立的数学关系，而平差应以此种关系为基础。

b) 随机模型：它包含有关观测值先验中误差以及观测值之间可能的相关性的一切陈述。

限定模型和随机模型应在平差之前作出抉择。这些模型应尽可能良好地拟合实际情况。模型拟合误差的影响同系统误差一样。

与数理统计学的关系：

从数理统计学来看，观测值 L 为一随机样本，依最小二乘法作平差计算的任务，是产生参数或平差后观测值的最有效的无偏估值。误差计算在于估算方差和置信区间。统计检验方法（假设检验）是检验模型拟合优度。

目 录

前言

导言

A 篇 概 论

A1 误差理论	(1)
A1.1 误差的种类	(1)
A1.2 单一误差与精度衡量	(1)
A1.3 误差传播定律	(3)
A1.4 物理误差传播	(7)
A1.5 权与单位权的中误差	(8)
A1.6 观测值之差的中误差	(9)
A1.7 不规则误差与系统误差的联合影响	(11)
A2 非相关观测的平差	(12)
A2.1 直接观测的平差	(12)
A2.2 间接观测平差	(16)
A2.3 条件观测平差	(38)
A2.4 带有条件方程的间接观测平差	(52)
A2.5 带未知数的条件观测平差	(56)
A2.6 特殊情况：似间接观测	(62)
A2.7 带有未知数以及其间的条件方程的条件 观测	(64)
A3 相关观测及其平差	(66)
A3.1 数学相关与物理相关	(66)
A3.2 相关矩阵及方差-协方差矩阵	(68)
A3.3 相关观测的误差传播定律	(69)

A3.4	相关观测平差概要	(71)
A3.5	一般情况: 带有受条件制约的和观测的 未知数的条件相关观测	(73)
A3.6	带有未知数的条件相关观测	(78)
A3.7	条件相关观测	(83)
A3.8	带有未知数之间条件方程的间接相关观测	(84)
A3.9	间接相关观测	(88)
A3.10	直接相关观测	(91)
A4	分组平差	(94)
A4.1	概论	(94)
A4.2	特殊的分组平差	(98)
A4.3	作为两组平差的拟合与推估	(112)

B 篇 应 用

B1	水准网	(117)
B1.1	依间接观测法进行水准网的平差	(117)
B1.2	依条件观测法进行水准网的平差	(119)
B2	测站平差	(121)
B2.1	角度观测平差	(121)
B2.2	方向观测平差	(126)
B3	三角测量插点 (包括网的坐标平差)	(129)
B3.1	列出改正数方程	(129)
B3.2	消去定向未知数	(130)
B3.3	法方程的列出和解算	(131)
B3.4	计算校核	(131)
B3.5	误差计算	(132)
B3.6	不同精度的方向观测	(133)
B3.7	一个测站上的多个方向组	(133)
B3.8	多个子午带中的平差	(134)

B3.9	地理坐标的运用	(134)
B3.10	多点插入, 网的坐标平差	(135)
B3.11	分成为部分网的分组平差	(136)
B3.12	实际作业中的省略	(137)
B3.13	按其它方式观测的插点	(137)
B3.14	导线网及精密导线的平差	(140)
B4	带有条件方程的三角网	(140)
B4.1	条件方程的分类	(141)
B4.2	条件方程的个数	(141)
B4.3	列出条件方程的前导	(142)
B4.4	网的固有条件	(142)
B4.5	网的外加条件	(145)
B4.6	三角网的误差计算	(148)
B5	测边网(二维的)	(148)
B5.1	测边网的间接平差	(149)
B5.2	测边网的条件平差	(150)
B6	高程角观测	(152)
B6.1	I 类: 局部高程及位置测定	(152)
B6.2	II 类: 三角高程测量	(153)
B7	三维大地测量	(161)
B7.1	全球直角坐标系 X, Y, Z	(162)
B7.2	椭球坐标系 B, L, h	(164)
B7.3	关于改正数方程的处理	(166)
B7.4	1. 特殊情况: 无天文观测的空间网, 条件平差	(167)
B7.5	2. 特殊情况: 三维测边网	(168)
B7.6	三维中误差椭球 (赫尔默特)	(169)
B8	几何卫星大地测量	(171)
B8.1	待平差的观测数据	(171)

B8.2	以直角坐标表示的测站点及卫星点改正数 方程	(172)
B8.3	以椭球坐标表示的测站点改正数方程	(174)
B8.4	轨道曲线的空间平滑	(175)
B8.5	改正数方程的处理	(175)
B9	仪器检定与常数测定	(177)
B9.1	测距仪的常数测定	(177)
B9.2	定积求积仪常数的测定	(179)
B9.3	空盒气压计常数的测定	(180)
B9.4	经纬仪照准部偏心差的测定	(181)
B9.5	经纬仪度盘周期误差的常数测定	(182)
B9.6	测微螺旋的常数测定	(184)
B9.7	管状水准器的常数测定	(186)
B9.8	摄影机内方位常数的测定	(183)
B9.9	精密缩放仪常数的测定	(188)
B10	天文大地测量平差示例	(189)
B10.1	观测恒星的天顶距来测定天文方向	(189)
B10.2	观测恒星的水平方向以确定天文方向	(190)
B10.3	由摄影测定赤道天球坐标的相依法	(193)
B11	平差的函数	(194)
B11.1	平差的直线	(195)
B11.2	平差的抛物线	(201)
B11.3	平差抛物线中的正交多项式	(203)
B11.4	多维问题	(207)
B11.5	三角内插法(傅里叶分析)	(207)
B11.6	不同类的坐标的变换	(208)

C 篇 误差理论与误差统计

C1	一维误差分布	(213)
-----------	---------------------	--------------

C1.1	离散一维误差分布	(213)
C1.2	连续一维误差分布	(214)
C1.3	正态分布 (高斯分布)	(216)
C2	二维与多维误差分布	(219)
C2.1	二维频率与二维分布	(219)
C2.2	三维正态分布	(224)
C3	概率密度的转换	(227)
C3.1	正态分布转换为线性函数	(228)
C3.2	正态分布转换为非线性函数	(228)
C3.3	多个不同精度的观测列的混合	(229)
C4	置信区间	(230)
C4.1	中值的置信限	(230)
C4.2	中误差的置信限	(231)
C4.3	中误差椭圆的置信限	(232)
C5	假设检验	(232)
C5.1	实施假设检验的过程	(233)
C5.2	分布检验	(234)
C5.3	同一性试验	(237)
C5.4	方差分析	(239)
C5.5	平差结果的显著性检验	(242)
C5.6	线性检验	(245)
C5.7	分组平差中改正数平方和增大的检验	(249)
C6	统计频率分析	(249)
C6.1	自协方差与自相关	(250)
C6.2	互协方差和相干性	(250)

D 篇 附录：矩阵计算公式

D1	矩阵的特种形式	(252)
D2	矩阵的特殊数值	(255)

D2.1	方阵的行列式	(256)
D2.2	方阵的迹	(256)
D2.3	矩阵量或矩阵的欧几里得范数	(256)
D3	矩阵的运算规则	(256)
D3.1	转置	(257)
D3.2	两矩阵的相等	(258)
D3.3	矩阵的加法和减法	(258)
D3.4	矩阵的乘法	(259)
D3.5	向量乘法	(262)
D3.6	双线性型与二次型	(264)
D3.7	矩阵-逆阵	(265)
D3.8	矩阵变换	(271)
D3.9	微分法则	(272)
D4	特征值与状态值	(273)
D5	几何解释和应用	(275)
D5.1	笛卡儿空间 R_n 中的坐标与位置向量	(275)
D5.2	R_n 中的直线	(276)
D5.3	R_n 中的平面	(276)
D5.4	线性映射	(277)

A 篇 概 论

A 1 误 差 理 论

A 1.1 误差的种类

a) 可避免的误差或粗差，通过充分注意通常是可避免的。平差计算不考虑粗差。

b) 不可避免的误差，即使观测者聚精会神并富有经验，测量仪器作了最好的校正，而且外界观测条件又最有利，但总会发生此种误差。

不可避免的误差分为以下三种：

b1) 不规则的误差或偶然误差：误差的大小及符号均呈不规则的或偶然的变化。

b2) 规则误差或系统误差（模型拟合误差）：其大小及符号有规律地取决于第三个量（或更多的第三量），第三量应为限定模型的要素。

系统误差又分为：

(1) 常系统误差（例如零点误差），

(2) 可变系统误差（例如累进误差与周期误差），

b3) 单向误差：虽然它的大小变化是偶然性的，但符号总是相同。

A 1.2 单一误差与精度衡量

A 1 2.1 单一误差或个体误差为在第 i 次单一观测中发生的误差，它定义为观测 L_i 与相应的理论值之差：

误差 = 理论值 - 观测值①

单一误差有两种形式:

a) 真误差 $\varepsilon_i = X - L_i$;

b) 似真误差 (或改正数) $v_i = x - L_i$,

式中 $X = L_i$ 的真值,

$x = L_i$ 的最或是值 (或平差值)。

A 1.2.2 精度衡量 将含有 n 个单一误差的一个误差列综合成为 (特别是按照协定形成的) 一个检验量, 它应能表征全观测列的精度。

计分为:

a) L 的中误差 ($= m \cdot F$) $m = \sqrt{[\varepsilon\varepsilon]}/n$

b) 平均误差② $t = [|\varepsilon|]/n$

c) 似或是误差③ $r' = ([|\sqrt{|\varepsilon|}|]/n)^2$

d) 或是误差 r , 把误差列按 $|\varepsilon|$ 值的递增 (或递减) 顺序排列, 或是误差 r 与恰好处在该误差列中央的值 $|\varepsilon|$ 完全一致④。

这里的误差个数 n 不宜过小。有以下的不等式:

$$|m| > |t| > |r'|$$

还有: 多维中误差

1) 赫尔默特点位中误差

$$m_p = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$$

式中

$$m_x^2 = [e_x e_x]/n, \quad m_y^2 = [e_y e_y]/n$$

2) Werkmeister 点位中误差

$$m_p' = m_x m_y$$

3) 空间点位中误差 (赫尔默特)

$$m_p^{(3)} = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}$$

4) n 维的点位中误差 (赫尔默特)

● 在非大地测量文献中, 往往是: 观测值 - 理论值。

●、●、● 现在很少采用。

$$m_p^{(n)} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_n^2}$$

以及:

5) 相对中误差 (以距离为例)

$$\frac{m}{L} = 1:(L/m)$$

6) 百分比中误差 $(m/L) \cdot 100\%$.

A 1.3 误差传播定律

(非相关观测)

观测值: $L_1, L_2, \cdots, L_n$; 其中误差分别为: $m_1, m_2, \cdots, m_n$.

已知量: 函数 $F = F(L_1, L_2, \cdots, L_n)$

待求量: F 的中误差 m_F .

解 算: $m_F = \sqrt{(\alpha_1 m_1)^2 + (\alpha_2 m_2)^2 + \cdots + (\alpha_n m_n)^2}$,

式中 $\alpha_i = \partial F / \partial L_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

A 1.3.1 推广到非显函数 φ

设 $\varphi(G) = F(L_1, L_2, \cdots, L_n)$.

此时 $\partial \varphi / \partial G = \beta_G$,

$$m_G = \frac{1}{\beta_G} \sqrt{(\alpha_1 m_1)^2 + (\alpha_2 m_2)^2 + \cdots + (\alpha_n m_n)^2}.$$

例 题: 设 $G = L_1 L_2 \cdots L_n$,

取对数: $\ln G = \ln L_1 + \ln L_2 + \cdots + \ln L_n$,

由此立即得

$$m_G = G \sqrt{\left(\frac{m_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{L_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{m_n}{L_n}\right)^2}.$$

A 1.3.2 推广至隐函数 Ψ

设 $\Psi(F, L_1, L_2, \cdots, L_n) = 0$.

令 $\partial \Psi / \partial F = \beta_F$, $\partial \Psi / \partial L_i = \beta_i$, ($i = 1, 2, \cdots, n$)

则有 $m_F = \frac{1}{\beta_F} \sqrt{(\beta_1 m_1)^2 + (\beta_2 m_2)^2 + \cdots + (\beta_n m_n)^2}$.

A 1.3.3 微商 α, β 的确定

a) 通过微分用解析法,

b) 用数值实验法求差商, 这时 (以试验的方式) 将各个观测值 L_i 变动 δL_i , 计算 F 的相应变量 δF_i , 然后组成

$$\alpha_i \approx \delta F_i / \delta L_i,$$

及 $\beta_a = \delta \varphi / \delta G$, $\beta_i = \delta \Psi / \delta L_i$, $\beta_F = \delta \Psi / \delta F$,

c) 通过相应的 δF_i 图解,

d) 运用载有差差 $\Delta\{L\}$ 及 $\Delta\{T\}$ 的计算表 $T = T(L)$,

由此查取

$$\delta T / \delta L_i = \Delta\{L_i\}, \text{ 及 } \delta T / \delta F = \Delta\{F\},$$

因而按照 A1.3.1:

$$m_F = \frac{\sqrt{(\Delta\{L_1\} \cdot m_1)^2 + (\Delta\{L_2\} \cdot m_2)^2 + \dots + (\Delta\{L_n\} \cdot m_n)^2}}{\Delta\{F\}}.$$

A 1.3.4 实例

a) 单一观测值 $(L \pm m)$ 的函数 F 的中误差

$$F = L + a, \quad m_F = m$$

$$F = \ln L, \quad m_F = m/L$$

$$F = \arctg L, \quad m_F = m/(1 + L^2) = m \cdot \cos^2 F.$$

b) 两个观测值 L_1 及 L_2 的函数 F 的中误差:

$$s = L_1 + L_2 \quad m_s = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$$

$$d = L_1 - L_2 \quad m_d = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$$

$$M = \frac{1}{2} (L_1 + L_2) \quad m_M = \frac{1}{2} \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$$

$$r = L_1 L_2 \quad \frac{m_r}{r} = \sqrt{\left(\frac{m_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{L_2}\right)^2}$$

$$q = \frac{L_1}{L_2} \quad \frac{m_q}{q} = \sqrt{\left(\frac{m_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{L_2}\right)^2}$$