平差计算

（实用公式）

[西德] H. 沃尔夫

测绘出版社

平差计算

（实用公式）

〔西德〕 H. 沃尔夫 著
方 佩 竹 译
胡 明 城 校

测 绘 出 版 社

本书通过矩阵及向量形式导出普通测量、大地测量以及几何卫星大地测量的实用公式，并列举了大量的实例。

本书涉及与统计学的联系，列举出测量平差中实用的各种检验法。

本书附录内收入应用矩阵及向量时所必需的公式。

本书为从事测量作业、科研及教学人员必备的参考书。

H . Wolf

AUSGLEICHUNGSRECHNUNG

Formeln zur praktischen Anwendung

Ferd. Dümmler, Bonn, 1975.

平 差 计 算

（实用公式）

[西德] H · 沃尔夫 著

方 佩 竹 译

胡 明 城 校

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 · 各地新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 · 印张 $9^1/_8$ · 字数 237 千字

1983 年 6 月第一版 · 1983 年 6 月第一次印刷

印数 1—9,000 册 · 定价 1.15 元

统一书号：15039 · 新 254

前　　言

平差计算主要以其应用为特色。这一本公式汇编，应当着重考虑这一观点。

A篇包括一些总的联系，而以测量学中所必须引用的“误差理论”为开始，接着列出非相关观测公式，其次是相关观测公式。人们可能认为，仅就一般情况列出这些有关公式(73—75页)就够了，然后让读者自己把一般情况加以特殊化，由此补齐所有其余的平差公式，然而这是不可能的。

B篇所述的各种应用，几乎毫无例外地取自大地测量领域。

C篇是陈述与统计学的联系，并列举了大地测量平差中乐意采用的各种检验方法。

D篇为附录，其中搜集了应用矩阵及向量时所必需的一些有用公式。

没有采用行列式理论及广义逆阵论。人们在实践中并未涉及到这些理论；有证据表明这会导致广义逆阵的误用，甚至得出错误的平差结果。

本书与同一出版社1968年发行的“依最小二乘法平差计算”一书是衔接的，但有下列改变：

在所有的公式中，都涉及到“观测未知数”新近的不同处理情况。其次是增添了特别的一章“分组平差”，其中包括一系列新、旧方法，也有滤波法及拟合推估法。

在应用方面，提到了自由网。关于导线网，鉴于有了现代计算工具，不考虑采用条件观测平差，而是推荐间接观测平差。几何卫星大地测量中有空间轨道平滑摄影法，在数理统计检验法的应

用中，扩充了几种附加的检验法。

本书打算作为高级的指导教科书。也望可作为作业人员在解决有关问题时的有益辅助工具。

H. 沃尔夫 (Helmut Wolf)

1975年春于波恩

导　　言

平差计算的对象：

平差计算的对象是观测、读数和记录这三个过程的数字结果，这个结果简称为观测值 L。

平差计算的任务：

由于观测有误差，就出现了矛盾，平差计算的任务是，于观测值中加入改正数 v，借以消除矛盾，使平差值或最或是值（$L+v$）与真值之差尽可能地小。与（$L+v$）结合在一起的，还会出现作为其它参数的未知数 x，它们的最或是值同样由平差来求定。这里所运用的原理应是最小二乘法。

必要的前提：

a）观测值 L 应当有多余的个数。

b）在平差之前，必须知道观测值 L 不精确的程度，例如以先验中误差或以权表示这种程度。同时也要知道观测量可能的随机联系，例如通过观测量之间的相关系数来表达这种联系，这也是应当预先假定的。

附带的任务：

在于由改正数 v 的计算值（因而在实施了平差之后）计算后验中误差，即

a）求参入平差的观测值 L 的中误差，

b）由平差产生的（$L+v$）及 x 的中误差，或（$L+v$）及 x 的函数的中误差。

还有各（$L+v$）之间、各 x 之间的或（$L+v$）与 x 之间的相关系数的计算，也属于附带的任务。

非平差的情况：

如果不存在多余观测，那么就不能进行平差，这时误差计算只限于由先验观测中误差（或其相关性）来求定事先给定的、未

平差观测值 L 的函数 F 的中误差（二误差传播）。

模　型：

a）函数模型（或限定模型）：可理解为在各（$L+v$）之间或各 x 之间可以建立的数学关系，而平差应以此种关系为基础。

b）随机模型：它包含有关观测值先验中误差以及观测值之间可能的相关性的一切陈述。

限定模型和随机模型应在平差之前作出抉择。这些模型应尽可能良好地拟合实际情况。模型拟合误差的影响同系统误差一样。

与数理统计学的关系：

从数理统计学来看，观测值 L 为一随机样本，依最小二乘法作平差计算的任务，是产生参数或平差后观测值的最有效的无偏估值。误差计算在于估算方差和置信区间。统计检验方法（假设检验）是检验模型拟合优度。

目　　录

B篇 应　用

C篇 误差理论与误差统计

D篇 附录：矩阵计算公式

A 篇 概 论

A1 误 差 理 论

A 1.1 误差的种类

a）可避免的误差或粗差，通过充分注意通常是可避免的。平差计算不考虑粗差。

b）不可避免的误差，即使观测者聚精会神并富有经验，测量仪器作了最好的校正，而且外界观测条件又最有利，但总会发生此种误差。

不可避免的误差分为以下三种：

b1）不规则的误差或偶然误差：误差的大小及符号均呈不规则的或偶然的变化。

b2）规则误差或系统误差（模型拟合误差）：其大小及符号有规律地取决于第三个量（或更多的第三量），第三量应为限定模型的要素。

系统误差又分为：

（1）常系统误差（例如零点误差）；

（2）可变系统误差（例如累进误差与周期误差）；

b3）单向误差：虽然它的大小变化是偶然性的，但符号总是相同。

A 1.2 单一误差与精度衡量

A 1 2.1 单一误差或个体误差为在第 i 次单一观测中发生的误差，它定义为观测 L_i 与相应的理论值之差：

误差＝理论值－观测值[1]

单一误差有两种形式：

a）真误差　$\varepsilon_i = X - L_i$；

b）似真误差（或改正 数）$v_i = x - L_i$，

式中$X = L_i$ 的真值，

$x = L_i$的最或是值（或平差值）。

A 1.2.2　精度衡量　将含有n个单一误差的一个误差列综合成为（特别是按照协定形成的）一个检验量，它应能表征全观测列的精度。

计分为：

a）L的中误差（$=m.F.$）　$m = \sqrt{[\varepsilon\varepsilon]/n}$

b）平均误差[2]　　$t = [|\varepsilon|]/n$

c）似或是误差[3]　　$r' = ([|\sqrt{|\varepsilon|}|]/n)^2$

d）或是误差r，把误差列按$|\varepsilon|$值的递增（或递降）顺序排列，或是误差r与恰好处在该误差列中央的值$|\tilde{\varepsilon}|$完全一致[4]。

这里的误差个数n不宜过小。有以下的不等式：

$$|m| > |t| > |r'|$$

还有：多维中误差

1）赫尔默特点位中误差

$$m_P = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$$

式中

$$m_x^2 = [\varepsilon_x\varepsilon_x]/n, \qquad m_y^2 = [\varepsilon_y\varepsilon_y]/n$$

2）Werkmeister 点位中误差

$$m_P' = m_x m_y$$

3）空间点位中误差（赫尔默特）

$$m_P^{(3)} = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}$$

4）n维的点位中误差（赫尔默特）

---

[1] 在非大地测量文献中，往往是：观测值－理论值。

[2]、[3]、[4] 现在很少采用。

$$m_P^{(n)} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_n^2}$$

以及：

5）相对中误差（以距离为例）

$$\frac{m}{L} = 1:(L/m)$$

6）百分比中误差（m/L）·100%.

A 1.3 误差传播定律

（非相关观测）

观测值：$L_1, L_2, \cdots, L_n$；其中误差分别为：$m_1, m_2, \cdots, m_n$.

已知量：函数 $F = F(L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_n)$

待求量：F 的中误差 m_F.

解　算：$m_F = \sqrt{(\alpha_1 m_1)^2 + (\alpha_2 m_2)^2 + \cdots + (\alpha_n m_n)^2}$，

式中　$\alpha_i = \partial F / \partial L_i$，$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$.

A 1.3.1　推广到非显函数 φ

设 $\varphi(G) = F(L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_n)$.

此时　$\partial\varphi/\partial G = \beta_G$，

$$m_G = \frac{1}{\beta_G}\sqrt{(\alpha_1 m_1)^2 + (\alpha_2 m_2)^2 + \cdots + (\alpha_n m_n)^2} .$$

例　题：设 $G = L_1 L_2 \cdots L_n$，

取对数：$\ln G = \ln L_1 + \ln L_2 + \cdots + \ln L_n$，

由此立即得

$$m_G = G\sqrt{\left(\frac{m_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{L_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{m_n}{L_n}\right)^2} .$$

A 1.3.2　推广至隐函数 Ψ

设 $\Psi(F,\ L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_n) = 0$.

令　$\partial\Psi/\partial F = \beta_F$，$\partial\Psi/\partial L_i = \beta_i$，（$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$）

则有　$m_F = \dfrac{1}{\beta_F}\sqrt{(\beta_1 m_1)^2 + (\beta_2 m_2)^2 + \cdots + (\beta_n m_n)^2}$.

A 1.3.3 微商 a，β 的确定

a）通过微分用解析法，

b）用数值实验法求差商，这时（以试验的方式）将各个观测值 L_i 变动 δL_i，计算 F 的相应变量 δF_i，然后组成

$$\alpha_i \simeq \delta F_i / \delta L_i$$

及 $\beta_G = \delta\varphi/\delta G$，$\beta_i = \delta\Psi/\delta L_i$，$\beta_F = \delta\Psi/\delta F$，

c）通过相应的 δF_i 图解，

d）运用载有表差 $\overline{\Delta\{L\}}$ 及 $\overline{\Delta\{T\}}$ 的计算表 $T = T(L)$，由此查取

$$\delta T/\delta L_i = \overline{\Delta\{L_i\}}，\text{及}\quad \delta T/\delta F = \overline{\Delta\{F\}}，$$

因而按照 A1.3.1：

$$m_F = \frac{\sqrt{(\overline{\Delta\{L_1\}}\cdot m_1)^2 + (\overline{\Delta\{L_2\}}\cdot m_2)^2 + \cdots + (\overline{\Delta\{L_2\}}\cdot m_n)^2}}{\overline{\Delta\{F\}}}.$$

A 1.3.4 实 例

a）单一观测值（$L \pm m$）的函数 F 的中误差

$F = L + a$，　$m_F = m$

$F = \ln L$，　$m_F = m/L$

$F = \operatorname{arc\,tg} L$，$m_F = m/(1+L^2) = m\cdot\cos^2 F$.

b）两个观测值 L_1 及 L_2 的函数 F 的中误差：

$$s = L_1 + L_2 \qquad m_s = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$$

$$d = L_1 - L_2 \qquad m_d = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$$

$$M = \frac{1}{2}(L_1 + L_2) \qquad m_M = \frac{1}{2}\sqrt{m_1^2 + m_2^2}$$

$$r = L_1 L_2 \qquad \frac{m_r}{r} = \sqrt{\left(\frac{m_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{L_2}\right)^2}$$

$$q = \frac{L_1}{L_2} \qquad \frac{m_q}{q} = \sqrt{\left(\frac{m_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{L_2}\right)^2}$$