计算数学丛书

数值解高维偏微分方程的分裂法

康立山　全惠云　等编著

上海科学技术出版社

计算数学丛书

数值解高维偏微分方程的分裂法

康立山　全惠云　等编著

（国家自然科学基金资助项目）

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书主要介绍两种类型的分裂法：一种叫做“算子分裂法”，以解决算子的复杂性为目的.另一种叫做“区域分裂法”，以解决区域的复杂性为目的.前者以局部一维化方法为基础，后者以Schwarz算法为基础.

阅读本书需要具备数值分析的一般知识.本书可供高等学校计算数学专业高年级学生及研究生参考，也可供理科其它专业师生、计算数学工作者或其它利用电子计算机从事科学计算的科技人员参考.

责任编辑　唐仲华

计算数学丛书

数值解高维偏微分方程的

分 裂 法

康立山　全惠云　等编著

上海科学技术出版社

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　江 苏 溧 阳 印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 9.25　字数 202 000

1990 年11 月第 1 版　1990 年11 月第 1 次印刷

印数 1—2,000

ISBN 7-5323-2022-7/O·141　定价：4.60元

出版说明

《计算数学丛书》是为了适应计算数学和计算机科学的发展，配合高等院校的计算数学教学的需要而组织的一套参考读物．读者对象主要是高等院校数学系和计算机科学系的学生、研究生，亦可供高等院校数学系和计算机科学系的教师以及工矿企业、科研单位从事计算工作的技术人员参考．

本丛书向读者介绍近代计算方法的一些主要进展及其适用范围和实用效果．每种书集中介绍一个专题，针对本专题的近代发展作综合性的介绍，内容简明扼要，重点突出，有分析，有评价，力图使读者对该专题的动向和发展趋势得到一个完整的了解．

本丛书已拟定的选题计有：《线性代数与多项式的快速算法》、《数论变换》、《数值有理逼近》、《矩阵特征值问题》、《索伯列夫空间引论》、《计算组合数学》、《样条与插值》、《不动点算法》、《广义逆矩阵的基本理论和计算方法》、《非线性方程的区间算法》、《奇异摄动中的边界层校正法》、《沃尔什函数理论与应用》、《多项式最佳逼近的实现》、《曲线曲面的数值表示和逼近》、《舍入误差分析引论》、《解边值问题的迦辽金法》、《非线性方程组迭代解法》、《外推法及其应用》、《蒙特卡罗方法》、《发展方程的有限元方法》、《数值解高维偏微分方程的分裂法》等二十余种，于1980年初起陆续出版．

前　言

近三十年来偏微分方程的数值解法是处在迅速发展的时期．一方面是由于从工程及应用科学方面提出需要求解的数学物理问题越来越复杂、越来越多；另方面是日益迅速发展的计算技术提供了解算这类问题的可能．既有需要，又有可能，关键在于数值分析工作者能不能提供与之相适应的有效计算方法．

这本小册子企图从某种角度来阐述解数学物理问题的一些基本原则，即如何将一复杂的数学物理问题化成一系列较简单的易于在计算机上求解的问题．我们所指的"复杂"有两方面的含义：一是指求解区域的不规则性；另一是指求解算子的高维、非线性等．处理这种复杂性的基本原则之一就是分裂法．

我们主要介绍两种类型的分裂法．一种叫做"区域分裂法"，以解决区域的复杂性为目的；另一种叫做"算子分裂法"，以解决算子的复杂性为目的．前者以 Schwarz 算法为基础；后者以局部一维化方法为基础．

本书的特点是以主要精力阐明分裂法的基本原理与方法，而算法的细节则通过一些典型的例子来说明．由于这些数值例子都是我们精心挑选而又亲自计算的，我们把它们当作本书的重要组成部分．读者如果要应用分裂法去解算自己面临的实际课题，则认真地看一看这些例题不会是毫无帮助的．

本书的另一特点是注意到解数学物理问题的并行算法，特别是最近几年新发展起来的一类“异步并行算法”．这类算法既适用于单指令多数据流系统(SIMD)，也适用于多指令多数据流系统(MIMD)，特别是异步并行计算机系统．

本书初稿曾作为武汉大学计算数学专业77级与78级选修课“偏微分方程的分裂法”教材，每周讲授两学时，并配以一定的计算实习，一学期学完．我们当时认为，这些即将毕业的同学当他们走上工作岗位时可能面临大量多样而又复杂的数学物理问题需要他们解算．“陈法”照搬并不总是行得通的，但我们提供的解决问题的基本思想方法与原理原则，对他们可能具有更加实际的意义．

关于区域分裂法的文献不多．我们主要参考Л. В. Канторович与В. И. Крылов的书«Приближенные методы высшего анализа»中的第七章以及С. Г. Михлин的书«二次泛函的极小化问题»．关于算子分裂法的文献甚多，这部分主要取材于Г. И. Марчук的书«Methods of Numerical Mathematics» 1975年版．

本书是为已具有数值分析的一般知识的读者而写的．例如已读过李荣华、冯果忱编«微分方程数值解法»一书的读者则看此书将无困难．

本书的第一部分由康立山与陈毓屏所写；第二部分由康立山、全惠云和孙乐林所写．限于著者的学识水平，书中缺点错误在所难免．如蒙指正，则非常感谢．

作者　1989年2月于武汉大学

目　录

第一部分　算子分裂法

引　　言

算子分裂法将分两个部分介绍，先介绍解定常问题的算子分裂法，然后介绍非定常问题．而后者又分三个内容：一般的算子分裂理论；一些特殊的算子分裂的例子，其中包括交替方向法与局部一维化法等；弱逼近理论与算子分裂．这一部分还包括一些数值例子．

这里先介绍一些概念、记号与引理，它们在以后的章节里将要经常用到，其中大部分可能是大家熟知的．为统一起见，我们仍简述于下．

设有界区域 $\Omega\subset R^n$（n 维 Euclid 空间），其边界为 Γ．$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$．

空间 $L_2(\Omega)$：若

$$\left[\int_\Omega f^2\,\mathrm{d}x\right]^{1/2}<\infty,$$

则

$$f\in L_2(\Omega).$$

内积

$$\left.\begin{aligned}(f_1, f_2)&=\int_\Omega f_1f_2\,\mathrm{d}x,\\ \langle f_1, f_2\rangle&=\int_\Gamma f_1f_2\,\mathrm{d}s,\end{aligned}\right\}\ f_1, f_2\in L_2(\Omega).$$

模

$$\|f\|=\sqrt{(f, f)}.$$

以后由于某种需要，在 $L_2(\Omega)$ 上再加某些附带条件，即选取 $L_2(\Omega)$ 的子空间.

空间 $H^m(\Omega)$ $(m=0, 1, 2, \cdots)$:

$\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ (α_i 为非负整数),

$$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} \quad \left(|\alpha|=\sum_{i=1}^n \alpha_i\right),$$

若 $$D^\alpha f\in L_2(\Omega) \quad (|\alpha|\leqslant m),$$

则 $$f\in H^m(\Omega).$$

内积

$$(f_1, f_2)_m=\sum_{|\alpha|=0}^{m}(D^\alpha f_1, D^\alpha f_2), \ f_1, f_2\in H^m(\Omega).$$

模 $$\|f\|_m=\sqrt{(f, f)_m}.$$

$$H_\varphi^m(\Omega)=\{f\,|\,f\in H^m(\Omega);\ f=\varphi \ \text{于}\ \Gamma\ \text{上}\}.$$

考虑椭圆型方程

$$Au=f \qquad \text{于}\ \overline{\Omega}\ \text{内}, \tag{1}$$

其中 A 是一个 m 阶线性微分算子，f 是 x 的函数，设 $f\in L_2(\Omega)$. 求(1)的解“等价”于确定 u 使得

$$(Au-f, v)=0, \ \forall v\in L_2(\Omega). \tag{2}$$

这就需要 $u\in H^m(\Omega)$. A: $H^m(\Omega)\to L_2(\Omega)$. 我们称 $L_2(\Omega)$ 的子空间 $H^m(\Omega)$ 为算子 A 的定义域，并记作 $\Phi(A)$. 由于要求 $u\in H^m(\Omega)$，$v\in L_2(\Omega)$，故当 m 较大时，问题(2)的求解就困难一些. 从计算的观点来看最好是降低对 u 的要求，以使 u 与 v 的光滑性要求差不多. 通常这一目的可以通过对(2)的左端进行分部积分(当 $n=1$ 时)或应用 Green 定理(当 $n=2$ 时)来达到.

例如，当 $A=-\Delta$ 时(Δ 为 Laplace 算子)，记

$$\nabla\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

有 Green 公式

$$(\nabla u,\ \nabla v)=-(\Delta u,\ v)+\left\langle\frac{\partial u}{\partial n},\ v\right\rangle,$$

$$u\in H^2(\Omega),\ v\in H^1(\Omega), \tag{3}$$

其中 $\frac{\partial}{\partial n}$ 表示关于 Γ 的外法线方向的微商. 故当 $A=-\Delta$ 时，应用(3)后，(2)可化成

$$(\nabla u,\ \nabla v)-\left\langle\frac{\partial u}{\partial n},\ v\right\rangle=(f,\ v), \tag{4}$$

这时只要求 $u,\ v\in H'(\Omega)$ 即可.

当我们解 Poisson 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f & 于\ \Omega\ 内,\\ u|_\Gamma=\varphi\end{cases} \tag{5}$$

时，其弱形式为：求 $u\in H^1_\varphi(\Omega)$ 使得

$$(\nabla u,\ \nabla v)=(f,\ v),\ \forall v\in H^1_0(\Omega). \tag{6}$$

这时 u 称为问题(5)在 Галеркин 意义下的弱解或广义解. 因为从计算的观点来看，解问题(6)要比解问题(5)容易些. 由于问题(5)要求 $u|_\Gamma=\varphi$，故我们要限制 $v\in H^1_0(\Omega)$. 但若为第三边值条件时，即

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u=\varphi\quad 于\ \Gamma\ 上, \tag{7}$$

则求弱解的问题就化成求 $u\in H^1(\Omega)$ 使得

$$(\nabla u,\ \nabla v)-\langle\varphi-\alpha u,\ v\rangle=(f,\ v),\ \forall v\in H^1(\Omega). \tag{8}$$

这样一来就不再需要另外考虑边界条件了，只需 $u,\ v\in H^1(\Omega)$ 即可. 这将给数值求解带来很大的方便.

一般地，若 $A:\Phi\to L_2(\Omega)$，则称 $L_2(\Omega)$ 的子空间 Φ 为算子 A 的定义域，记作 $\Phi(A)$. 下面对定义在线性流形 Φ 上的一个线性算子 A 作进一步的描述.

1. $A\geqslant 0$(A 为半定):

若 $$(A\varphi,\ \varphi)\geqslant 0,\ \forall\varphi\in\Phi,$$

且存在 $\varphi\in\Phi$, $\varphi\neq 0$ 使得

$$(A\varphi,\ \varphi)=0.$$

2. $A>0$(A 是正的):

若 $$(A\varphi,\ \varphi)>0,\ \forall\varphi\in\Phi \text{ 且 } \varphi\neq 0.$$

3. A 正定:

若存在常数 $\gamma>0$, 使得

$$(A\varphi,\ \varphi)\geqslant\gamma(\varphi,\ \varphi),\ \forall\varphi\in\Phi.$$

注 若 A 为对称矩阵, 则由 $A>0$ 可知 A 正定.

4. A^*(A 的共轭算子):

若满足 Lagrange 恒等式

$$(A\varphi,\ \psi)=(\varphi,\ A^*\psi),\ \varphi\in\Phi(A),\ \psi\in\Phi(A^*).$$

以后我们总设 A 的共轭算子 A^* 是存在的, 且在下述意义下是闭的: 若序列 $\psi_n\to\psi$, $A^*\psi_n\to\omega$, 则 $\psi\in\Phi(A^*)$, 且有极限关系 $A^*\psi=\omega$.

5. A 是自共轭的:

若 $A=A^*$; $\Phi(A)=\Phi(A^*)$.

自共轭算子的一个性质: 若 $\Phi(A)\equiv\Phi(A^*)$, 则 $A>0$ 隐含着 $A^*>0$.

实际上,

$$(A\varphi,\ \psi)=(\varphi,\ A^*\psi)>0,\ \forall\varphi,\ \psi\in\Phi(A).$$

例如, 若 $A=-\Delta$, $\Phi(-\Delta)=H_0^2(\Omega)$, 由(3)知

$$(-\Delta\varphi,\ \psi)=(\nabla\varphi,\ \nabla\psi)=(\varphi,\ -\Delta\psi),\ \forall\varphi,\ \psi\in H_0^2(\Omega),$$

故 $-\Delta$ 是自共轭算子. 当 $\varphi=\psi$ 时, 上式变成

$$(-\Delta\varphi,\ \varphi)=(\nabla\varphi,\ \nabla\varphi),$$

只要 φ 不为常数, 则必有 $(-\Delta\varphi,\ \varphi)>0$. 又因 $\varphi\in H_0^2(\Omega)$, 若

φ 为常数，则 $\varphi\equiv0$. 故算子 $(-\varDelta)$ 是正的，即 $-\varDelta>0$.

若应用 Friedrichs 不等式[*]:

$$(\nabla\varphi,\ \nabla\varphi)\geqslant\gamma(\varphi,\ \varphi),\ \varphi|_\Gamma=0,$$

就有
$$(-\varDelta\varphi,\ \varphi)\geqslant\gamma(\varphi,\ \varphi),\ \forall\varphi\in H_0^2(\Omega),$$
即算子 $(-\varDelta)$ 在 $H_0^2(\Omega)$ 上是正定的.

下面考虑 Fourier 级数问题. 它在后面的算法分析中起着重要作用.

若 $A\geqslant0$, 考虑两个谱问题:

$$Au=\lambda(A)u, \tag{9}$$

$$A^*u^*=\lambda(A^*)u^*. \tag{10}$$

设齐方程(9)与(10)各产生一个完全的固有函数系，分别记作 $\{u_n\}$ 与 $\{u_n^*\}$, 它们已标准化如下:

$$(u_n,\ u_m^*)=\begin{cases}1, & n=m\text{ 时},\\ 0, & n\neq m\text{ 时},\end{cases}$$

其相应的固有值 $\lambda_n(A)\in[\alpha(A),\ \rho(A)]$. 这个完全固有函数系称为双正交基. 在完全性的假定下，任何函数 $f\in\Phi(A)$ 与 $f^*\in\Phi(A^*)$ (为简单见，以后记 $\Phi(A)$ 为 Φ, 记 $\Phi(A^*)$ 为 Φ^*) 均可表成如下的 Fourier 级数形式:

$$f=\sum_n f_n u_n,$$

$$f^*=\sum_n f_n^* u_n^*.$$

其中
$$f_n=(f,\ u_n^*),\ f_n^*=(f^*,\ u_n).$$

例如，我们考察下述固有值问题:

$$\begin{cases}-\varDelta u=\lambda u & \text{于 } \Omega=\{(x_1,\ x_2)\,|\,0<x_1,\ x_2<1\}\text{ 内},\\ u|_\Gamma=0.\end{cases}$$

---

[*] 参阅 С. Г. Михлин, Вариационные Методы в Математической Физике, Гостехиздат, 1957, § 22.

它有一个完全的标准正交固有函数系

$$u_{mp}=2\sin m\pi x_1\sin p\pi x_2,$$
$$m=1,\ 2,\ \cdots,$$
$$p=1,\ 2,\ \cdots.$$

其相应的固有值为

$$\lambda_{mp}(-\Delta)=(m^2+p^2)\pi^2,$$

故 $\lambda_{mp}(-\Delta)\in[2\pi^2,\ \infty]$，这时 $\alpha(-\Delta)=2\pi^2$，$\rho(-\Delta)=\infty$.

又 $$(-\Delta\varphi,\ \varphi)\geqslant 2\pi^2(\varphi,\ \varphi),$$

故$(-\Delta)$是正定的，这时 $\gamma=2\pi^2$.

对于 $\Phi(-\Delta)$中的任何函数 φ 可展成 Fourier 级数

$$\varphi(x_1,\ x_2)=\sum_m\sum_p\varphi_{mp}u_{mp},$$

其中 $$\varphi_{mp}=(\varphi,\ u_{mp}).$$

上述问题的 5 点差分模拟$\left(\text{取步长 } h=\dfrac{1}{N}\right)$:

$$\begin{cases}A^h u^h=\lambda u^h \quad \text{于} \quad \Omega_h(\Omega\text{ 上之网域}),\\ u^h|_{\Gamma_h}=0.\end{cases}$$

它有一个标准正交化固有向量$\{u_{mp}\}$*)，其分量为

$$u_{mp}^{kl}=2\sin m\pi kh\sin p\pi lh,$$
$$m=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1,$$
$$p=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1.$$

其中 k，l 是固有向量 u_{mp} 的分量标号. 它相应的固有值为

$$\lambda_{mp}(A^h)=\frac{4}{h^2}\left(\sin^2\frac{m\pi h}{2}+\sin^2\frac{p\pi h}{2}\right),$$

---

*) 这里定义的内积与模分别为

$$(u_{m_1p_1},\ u_{m_2p_2})=h^2\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{l=1}^{N-1}u_{m_1p_1}^{kl}u_{m_2p_2}^{kl},$$
$$\|u_{mp}\|^2=(u_{mp},\ u_{mp}).$$

故有 $\lambda_{mp}(A^h)\in\left[\frac{8}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2},\ \frac{8}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2}\right]$，即

$$\alpha(A^h)=\frac{8}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2},\ \rho(A^h)=\frac{8}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2}.$$

当 h 充分小时，因 $\sin^2\frac{\pi h}{2}=\frac{\pi^2h^2}{4}-O(h^4)$；

$$\cos^2\frac{\pi h}{2}=1-O(h^2),$$

故

$$\lambda_{\min}(A^h)=2\pi^2-O(h^2),$$

$$\lambda_{\max}(A^h)=\frac{8}{h^2}-O(1).$$

它们从下方逼近 $\lambda(-\Delta)$ 的界.

在算法分析中另一重要工作是对算子的模进行估计.

算子 A 的模定义如下:

$$\|A\|^2=\sup_{\substack{\varphi\in\Phi\\ \varphi\neq 0}}\frac{(A\varphi,\ A\varphi)}{(\varphi,\ \varphi)}=\sup_{\substack{\varphi\in\Phi\\ \varphi\neq 0}}\frac{(\varphi,\ A^*A\varphi)}{(\varphi,\ \varphi)}. \tag{11}$$

因为算子 $A^*A\geqslant 0$ 且为自共轭的，故它存在固有值 $\lambda_n(A^*A)\geqslant 0$ 及固有函数系 $\{u_n\}$，设它是完全标准正交的，则 φ 可表示为

$$\varphi=\sum_n\varphi_n u_n, \tag{12}$$

其中

$$\varphi_n=(\varphi,\ u_n).$$

将(12)代入(11)并利用 $\{u_n\}$ 的正交性即得

$$\|A\|^2=\sup_{\{\varphi_n\}\in Q}\frac{\sum\limits_n\lambda_n(A^*A)\varphi_n^2}{\sum\limits_n\varphi_n^2}, \tag{13}$$

其中 Q 是 Fourier 系数空间. 由(13)易知

$$\|A\|^2=\lambda_{\max}(A^*A)=\rho(A^*A), \tag{14}$$

它称为算子 A^*A 的谱半径. 一般谱半径是这样定义的:

$$\rho(A)=\sup\{|\lambda(A)|\}.$$