

9346578014325

# 应用数值 方法

王新民·杨天行  
李淑芹

9346578014325

9346578014325

5743210539768

35742546801

9346578014325

869342956793

3976459869132

869342956793

5743210539768

754642587321

吉林教育出版社

754642587321

# 应用数值 方法

王新民·杨天行  
李淑芹

吉林教育出版社

**应用数值方法**

王新民 杨天行 李淑芹

责任编辑：王铁义

封面设计：张庆平

出版：吉林教育出版社 787×1092毫米32开本 17.5印张 2插页 389 000字

发行：吉林省新华书店 1992年5月第1版 1992年5月第1次印刷

印数：1—1 200册 定价：7.90元

印刷：长春新华印刷厂 ISBN 7-5383-1619-1/G·1414

## 内 容 简 介

本书系统地阐述了在解决地质问题时常用的一些数值方法。主要内容包括：插值方法，最佳逼近方法，数值积分方法，Fourier方法，离散方程数值解法，变分原理，有限差分法，有限元方法和边界积分方程法；简要介绍了最优化方法和灰色系统方法在地质上的应用等问题。

本书内容丰富，既有基础理论，又有应用实例，便于教学和参考。

本书可作为高等地质院校和其它工科院校有关专业研究生或高年级学生教材，亦可供从事地质工作的科技人员和其他工程技术人员参考。

JJ1116/12

## 前 言

随着当代科学技术的蓬勃发展，计算机在地质方面的应用日益广泛，从而对在计算机上使用的数学方法提出了更高和更为迫切的要求。

由于数值计算问题发展迅速、种类繁多，至今仍有不少从事地质工作的科技人员，对现代数值计算方法缺乏系统的了解。虽然近几年来，在各地质院校和综合性大学的有关专业相继开设了这方面内容的课程，但仍感到缺少合适的教学用书。作者编写本书的目的，既是为高等地质院校的研究生或高年级学生提供一本教学用书，同时也为从事地质工作的科技人员和其他工程技术人员提供一本参考书。

本书的初稿曾作为长春地质学院数学地质、水文地质、工程地质及地球化学、探矿工程、石油地质等专业硕士研究生的试用教材，经教学实践、充实、修改而成。有些内容是作者科研成果的总结。本书力求实用，并尽可能使数学基础、解题方法和分析应用有机地结合起来，构成一个较为完整的体系。

本书在编写过程中，得到了吉林大学李荣华教授、冯果忱教授的热情鼓励和支持。冯果忱教授审阅了本书全稿，提出了许多宝贵意见。长春地质学院付雁鹏副教授、李国相副教授以及张中信、韩生、陈殿有等同志给予了很多帮助。谨此致以诚挚的谢意。

由于时间匆促，编者水平有限，缺点、错误在所难免，  
恳请读者批评、指正。

编 者

1990年12月于地质宫

# 目 录

前言 .....	1
第一章 插值方法 .....	1
§ 1 Lagrange插值公式 .....	2
1.1 公式的构造 .....	2
1.2 插值多项式的余项 .....	7
§ 2 逐步线性插值 .....	10
§ 3 Hermite插值 .....	13
3.1 问题的提出 .....	13
3.2 Hermite插值函数的构造 .....	13
3.3 Hermite插值公式的余项 .....	15
§ 4 样条函数插值 .....	19
4.1 问题的提出 .....	19
4.2 样条函数的基本概念 .....	19
4.3 三次样条函数插值 .....	20
§ 5 二元函数分片插值 .....	25
5.1 问题的提出 .....	25
5.2 二元插值函数的构造方法 .....	26
5.3 矩形域上分片插值问题 .....	26
5.4 三角形区域的插值 .....	34
第二章 最佳逼近方法 .....	39
§ 1 Weierstrass 定理 .....	40
§ 2 最佳逼近的概念 .....	41
§ 3 Remez方法 .....	49

§ 4 正交多项式	52
4.1 正交函数系的概念	52
4.2 正交多项式的性质	58
§ 5 Chebyshev多项式及其应用	62
5.1 Chebyshev多项式的引出	62
5.2 Chebyshev多项式的应用	65
§ 6 最佳平方逼近	71
6.1 最小二乘拟合多项式	71
6.2 一般最小二乘逼近问题的提法	75
6.3 正规方程组	78
§ 7 用正交多项式作最佳平方逼近	84
7.1 用Legendre多项式作最佳平方逼近	85
7.2 函数按Chebyshev多项式展开	86
<b>第三章 Fourier方法</b>	89
§ 1 Fourier分析	89
§ 2 磨光函数在Fourier分析中的应用	91
2.1 问题的提出	91
2.2 磨光函数及其应用	92
§ 3 有限Fourier展式	99
§ 4 快速Fourier变换 (FFT)	103
<b>第四章 数值积分</b>	108
§ 1 引言	108
§ 2 Newton-Cotes型求积公式	109
2.1 公式的一般形式	109
2.2 常用的Newton-Cotes公式	112
§ 3 复化求积公式	117
3.1 复化梯形公式	117
3.2 复化Simpson公式	119
§ 4 区间逐次分半法	121

§ 5	Romberg方法	123
§ 6	Gauss型求积公式	127
6.1	问题的提出	127
6.2	Gauss型求积公式的构造	129
6.3	常用的Gauss型求积公式	133
6.4	Gauss型求积公式的余项	136
§ 7	若干个重要积分的处理	140
<b>第五章</b>	<b>线性代数方程组的数值解法</b>	<b>148</b>
§ 1	引言	148
§ 2	Gauss消去法	149
2.1	Gauss消去法的基本思想	149
2.2	主元消去法	153
2.3	Gauss消去法的矩阵形式	157
§ 3	矩阵的三角分解	159
§ 4	正定矩阵的Cholesky分解法	162
§ 5	追赶法	167
§ 6	向量和矩阵范数	169
6.1	向量范数	169
6.2	矩阵的范数	172
§ 7	Jacobi迭代法	177
7.1	Jacobi 迭代格式	177
7.2	Jacobi 迭代法的收敛性	179
§ 8	Gauss-Seidel迭代法	182
8.1	Gauss-Seidel迭代格式	182
8.2	Gauss-Seidel迭代法的收敛性	184
§ 9	逐次超松弛 (SOR) 迭代法	188
9.1	SOR迭代格式	188
9.2	SOR迭代法的收敛性	190
<b>第六章</b>	<b>常微分方程初值问题的数值解法</b>	<b>193</b>

§ 1	引言	193
§ 2	改进的Euler方法	196
§ 3	Runge-Kutta方法	201
§ 4	线性多步法	206
4.1	Adams外插法	207
4.2	Adams内插法	209
<b>第七章</b>	<b>变分原理</b>	213
§ 1	泛函分析中的一些概念	213
1.1	Hilbert空间	213
1.2	算子的概念	218
1.3	Sobolev空间	220
§ 2	数学物理中的变分问题	225
§ 3	二次泛函的极值问题	229
§ 4	一维的变分问题	234
§ 5	二维变分问题	243
5.1	第一类边值问题	243
5.2	其它边值问题	249
§ 6	变分问题的近似计算	250
6.1	Ritz方法	251
6.2	Galerkin方法	253
<b>第八章</b>	<b>偏微分方程边值问题的有限差分法</b>	259
§ 1	有限差分法的基本思想	259
1.1	差商的概念	259
1.2	差分法的基本思想与解题步骤	262
1.3	差分格式的相容性、收敛性和稳定性	264
§ 2	直接差分方法	267
§ 3	基于守恒原理的差分格式	271
§ 4	极坐标形式的差分格式	273
§ 5	边界条件的处理	277

5.1	第一类边界条件 .....	277
5.2	第三类边界条件 .....	279
§ 6	基于变分原理的差分格式 .....	283
<b>第九章</b>	<b>偏微分方程初值问题的有限差分法</b> .....	<b>291</b>
§ 1	典型问题 .....	291
§ 2	差分格式及其收敛性与稳定性 .....	293
§ 3	一维对流弥散问题的差分格式 .....	299
3.1	对流方程的差分格式 .....	299
3.2	弥散方程的差分格式 .....	305
3.3	对流弥散方程的差分格式 .....	314
§ 4	二维对流弥散问题的差分格式 .....	316
4.1	一维格式的直接推广 .....	318
4.2	交替方向隐式格式 .....	319
4.3	守恒型差分格式 .....	323
4.4	三角形网格有限差分法 .....	328
<b>第十章</b>	<b>有限元方法</b> .....	<b>334</b>
§ 1	有限元方法解题分析 .....	334
1.1	从 Ritz 法出发 .....	335
1.2	从 Galerkin 法出发 .....	344
§ 2	解二维问题的三角形元 .....	349
2.1	写出相应的变分问题 .....	349
2.2	区域剖分 .....	349
2.3	确定单元基函数 .....	350
2.4	形成有限元方程 .....	357
2.5	边界条件的处理 .....	362
§ 3	解二维问题的高次元 .....	367
3.1	三角形元的高次插值 .....	368
3.2	解二维问题的矩形元 .....	371
3.3	二维等参数单元 .....	375

§ 4	非稳定扩散问题的有限元解法	383
§ 5	应用举例	390
<b>第十一章</b>	<b>边界积分方程法</b>	<b>401</b>
§ 1	引言	401
§ 2	广义Green公式·基本解	402
2.1	广义Green公式	402
2.2	基本解	404
§ 3	化椭圆型方程为边界积分方程	409
3.1	化Laplace方程为边界积分方程	409
3.2	化Helmholtz型方程为边界积分方程	417
§ 4	化抛物型方程为边界积分方程	420
§ 5	边界有限元法	424
5.1	椭圆型方程边值问题的边界有限元法	424
5.2	抛物型方程初边值问题的边界有限元法	433
§ 6	抛物方程边界元技术的双方程法	439
6.1	椭圆型方程的新型边界积分方程	440
6.2	双方程方法	449
§ 7	应用举例	454
<b>附篇一</b>	<b>最优化方法</b>	<b>458</b>
§ 1	最优化问题及其数学模型	458
§ 2	线性规划解法	464
2.1	线性规划的基本概念与基本性质	465
2.2	单纯形方法的形成	467
2.3	单纯形方法计算步骤	470
2.4	使用表格形式的单纯形方法	472
2.5	求初始基可行解的方法	477
§ 3	无约束问题的直接搜索法	483
3.1	一维搜索法	483

3.2	单纯形方法 .....	488
§ 4	使用导数的搜索法 .....	492
4.1	最速下降法 (梯度法) .....	493
4.2	牛顿法 .....	494
4.3	最小二乘法 .....	496
§ 5	罚函数法 .....	501
5.1	外点法 .....	502
5.2	内点法 .....	505
<b>附篇二</b>	<b>灰色系统方法浅述 .....</b>	<b>509</b>
§ 1	引言 .....	509
§ 2	关联分析 .....	511
2.1	关联分析的含义 .....	511
2.2	关联系数 .....	513
2.3	关联度及其性质 .....	515
2.4	优势分析 .....	518
§ 3	灰色系统建模与预测 .....	522
3.1	数据的预处理 .....	522
3.2	灰色系统建模原理 .....	524
3.3	残差修正模型 .....	528
3.4	灾变预测 .....	529
3.5	模型检验法 .....	532
§ 4	应用举例 .....	533
4.1	关联分析实例 .....	533
4.2	灰色系统预测实例 .....	537
	<b>参考文献 .....</b>	<b>541</b>

# 第一章 插值方法

设  $f(x)$  是所研究的函数， $\varphi(x)$  为一简单函数。用简单的函数  $\varphi(x)$  近似代替  $f(x)$  是计算数学中最基本的概念和方法之一。

近似代替又叫逼近， $f(x)$  叫被逼近函数， $\varphi(x)$  叫逼近函数，两者之差

$$R(x) = f(x) - \varphi(x)$$

叫做逼近的误差或余项。插值法是函数逼近的重要方法之一。在生产和科研中，经常会遇到这样的问题：由试验或观测得到了某一函数关系  $y = f(x)$  在一系列点  $x_0, x_1, \dots, x_n$  处的值  $y_0, y_1, \dots, y_n$ ，需要构造一个简单函数  $\varphi(x)$ ，使

$$y = f(x) \approx \varphi(x)$$

且满足条件

$$y_i = \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

这类函数逼近问题即为插值问题。 $\varphi(x)$  称为  $f(x)$  的插值函数， $x_i$  称为插值节点， $y_i = \varphi(x_i)$  称为插值条件。一般说来，构造插值函数  $\varphi(x)$  的办法是很多的， $\varphi(x)$  既可以是一个代数多项式或三角多项式，也可以是有理分式；既可以是任意光滑函数，也可以是分段光滑函数。但通常使用的插值函数  $\varphi(x)$  是多项式与样条函数。

插值函数  $\varphi(x)$  除了用于近似计算被插函数  $f(x)$  的函数值外，还特别用于推导数值积分、数值微分、求微分方程数

值解的公式。

本章主要介绍多项式插值。这不仅是因为多项式简单，而且因为在许多情况下，函数  $f(x)$  容易用多项式近似地表示出来。

## § 1 Lagrange插值公式

### 1.1 公式的构造

设  $y = f(x)$  是实变量  $x$  的单值函数，又设已知  $f(x)$  在  $n + 1$  个不同点  $x_i$  处的函数值为  $y_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ )。我们的问题是构造一个次数不超过  $n$  的多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (1.1)$$

使  $P_n(x)$  在节点  $x_i$  处满足

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (1.2)$$

这个问题称为  $n$  次代数插值问题。

为了得到 Lagrange 公式的一般形式，我们先从最简单的一次插值入手。此时的插值问题是求一个一次多项式  $P_1(x)$ ，使满足

$$P_1(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1.$$

即求过点  $(x_0, y_0)$ 、 $(x_1, y_1)$  的一次曲线，也就是直线方程

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

或

$$y = P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1. \quad (1.3)$$

若记

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

则有

$$y = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) = \sum_{j=0}^1 y_j l_j(x).$$

显然

$$l_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 0, 1$$

称 (1.3) 为  $f(x)$  的线性插值函数.

同理, 若已知  $f(x)$  在三个互异点  $x_i$  处的函数值  $y_i (i = 0, 1, 2)$ , 并要求构造一个不超过二次的代数多项式

$$P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

使满足

$$P_2(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

则其参数  $a_0, a_1, a_2$  可由下面的方程组所确定:

$$\begin{cases} a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 = y_0, \\ a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 = y_1, \\ a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 = y_2, \end{cases} \quad (1.4)$$

此方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = -(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \neq 0,$$

于是, 据 Gramer 规则可知,  $a_2, a_1, a_0$  存在且唯一. 只要从方程组 (1.4) 中解出  $a_2, a_1, a_0$ ,  $f(x)$  的插值多项式

便唯一确定。

但是，通过解方程组的办法来构造插值多项式，一般来说是很麻烦的。为了简化运算，不妨令

$$P_2(x) = A(x-x_1)(x-x_2) + B(x-x_0)(x-x_2) + C(x-x_0)(x-x_1)$$

由条件  $P_2(x_i) = y_i$  ( $i = 0, 1, 2$ )，得

$$A = y_0 / (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$$

$$B = y_1 / (x_1 - x_0)(x_1 - x_2)$$

$$C = y_2 / (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

于是得到二次插值（或抛物插值）函数

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2. \quad (1.5)$$

若记

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

或统一写成

$$l_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^2 \frac{x-x_i}{x_j-x_i}, \quad j = 0, 1, 2$$

则 (1.5) 式成为

$$P_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$