应用数值方法

王新民·杨天行
李淑芹

吉林教育出版社

应用数值方法

王新民 · 杨天行
李淑芹

吉林教育出版社

应用数值方法　　王新民　杨天行　李淑芹

责任编辑：王铁义　　封面设计：张庆平

出版：吉林教育出版社　　787×1092毫米32开本　17.5印张　2插页　389 000字

发行：吉林省新华书店　　1992年5月第1版　　1992年5月第1次印刷

印数：1—1 200册　　定价：7.90元

印刷：长春新华印刷厂　　ISBN 7-5383-1619-1/G·1414

内 容 简 介

本书系统地阐述了在解决地质问题时常用的一些数值方法。主要内容包括：插值方法，最佳逼近方法，数值积分方法，Fourier 方法，离散方程数值解法，变分原理，有限差分法，有限元方法和边界积分方程法；简要介绍了最优化方法和灰色系统方法在地质上的应用等问题。

本书内容丰富，既有基础理论，又有应用实例，便于教学和参考。

本书可作为高等地质院校和其它工科院校有关专业研究生或高年级学生教材，亦可供从事地质工作的科技人员和其他工程技术人员参考。

前　　言

随着当代科学技术的蓬勃发展，计算机在地质方面的应用日益广泛，从而对在计算机上使用的数学方法提出了更高和更为迫切的要求。

由于数值计算问题发展迅速、种类繁多，至今仍有不少从事地质工作的科技人员，对现代的数值计算方法缺少系统的了解．虽然近几年来，在各地质院校和综合性大学的有关专业相继开设了这方面内容的课程，但仍感到缺少合适的教学用书．作者编写本书的目的，既是为高等地质院校的研究生或高年级学生提供一本教学用书，同时也为从事地质工作的科技人员和其他工程技术人员提供一本参考书。

本书的初稿曾作为长春地质学院数学地质、水文地质、工程地质及地球化学、探矿工程、石油地质等专业硕士研究生的试用教材，经教学实践、充实、修改而成．有些内容是作者科研成果的总结．本书力求实用，并尽可能使数学基础、解题方法和分析应用有机地结合起来，构成一个较为完整的体系。

本书在编写过程中，得到了吉林大学李荣华教授、冯果忱教授的热情鼓励和支持．冯果忱教授审阅了本书全稿，提出了许多宝贵意见．长春地质学院付雁鹏副教授、李国相副教授以及张中信、韩生、陈殿有等同志给予了很多帮助．谨此致以诚挚的谢意。

由于时间匆促，编者水平有限，缺点、错误在所难免，恳请读者批评、指正。

编　者

1990年12月于地质宫

目　录

第一章　插值方法

设$f(x)$是所研究的函数，$\varphi(x)$为一简单函数．用简单的函数$\varphi(x)$近似代替$f(x)$是计算数学中最基本的概念和方法之一．

近似代替又叫逼近，$f(x)$叫被逼近函数，$\varphi(x)$叫逼近函数，两者之差

$$R(x)=f(x)-\varphi(x)$$

叫做逼近的误差或余项．插值法是函数逼近的重要方法之一．在生产和科研中，经常会遇到这样的问题：由试验或观测得到了某一函数关系$y=f(x)$在一系列点x_0、x_1、…、x_n处的值y_0、y_1、…、y_n，需要构造一个简单函数$\varphi(x)$，使

$$y=f(x)\approx\varphi(x)$$

且满足条件

$$y_i=\varphi(x_i),\quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ n.$$

这类函数逼近问题即为插值问题．$\varphi(x)$称为$f(x)$的插值函数，x_i称为插值节点，$y_i=\varphi(x_i)$称为插值条件．一般说来，构造插值函数$\varphi(x)$的办法是很多的，$\varphi(x)$既可以是一个代数多项式或三角多项式，也可以是有理分式；既可以是任意光滑函数，也可以是分段光滑函数．但通常使用的插值函数$\varphi(x)$是多项式与样条函数．

插值函数$\varphi(x)$除了用于近似计算被插函数$f(x)$的函数值外，还特别用于推导数值积分、数值微分、求微分方程数

值解的公式。

本章主要介绍多项式插值。这不仅是因为多项式简单，而且因为在许多情况下，函数 $f(x)$ 容易用多项式近似地表示出来。

§1 Lagrange插值公式

1.1 公式的构造

设$y=f(x)$是实变量x的单值函数，又设已知$f(x)$在$n+1$个不同点x_i处的函数值为y_i($i=0$、1、…、n)。我们的问题是构造一个次数不超过n的多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \tag{1.1}$$

使$P_n(x)$在节点x_i处满足

$$P_n(x_i)=f(x_i)=y_i,\ i=0,1,\cdots,n \tag{1.2}$$

这个问题称为n次代数插值问题。

为了得到Lagrange公式的一般形式，我们先从最简单的一次插值入手。此时的插值问题是求一个一次多项式$P_1(x)$，使满足

$$P_1(x_i)=y_i,\quad i=0,1.$$

即求过点(x_0, y_0)、(x_1, y_1)的一次曲线，也就是直线方程

$$y=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

或

$$y=P_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1. \tag{1.3}$$

若记

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\quad l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

则有

$$y=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)=\sum_{j=0}^{1}y_jl_j(x)。$$

显然

$$l_j(x_i)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\qquad i,\ j=0,\ 1$$

称（1.3）为$f(x)$的线性插值函数.

同理，若已知$f(x)$在三个互异点x_i处的函数值$y_i(i=0,1,2)$，并要求构造一个不超过二次的代数多项式

$$P_2(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$$

使满足

$$P_2(x_i)=f(x_i)=y_i,\ i=0,\ 1,\ 2.$$

则其参数a_0、a_1、a_2可由下面的方程组所确定：

$$\begin{cases}a_2x_0^2+a_1x_0+a_0=y_0,\\ a_2x_1^2+a_1x_1+a_0=y_1,\\ a_2x_2^2+a_1x_2+a_0=y_2,\end{cases}\tag{1.4}$$

此方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix}x_0^2 & x_0 & 1\\ x_1^2 & x_1 & 1\\ x_2^2 & x_2 & 1\end{vmatrix}=-(x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

$$\neq 0,$$

于是，据Gramer规则可知，a_2、a_1、a_0存在且唯一．只要从方程组（1，4）中解出a_2、a_1、a_0，$f(x)$的插值多项式

使唯一确定。

但是，通过解方程组的办法来构造插值多项式，一般来说是很麻烦的。为了简化运算，不妨令

$$P_2(x)=A(x-x_1)(x-x_2)+B(x-x_0)(x-x_2)+$$
$$C(x-x_0)(x-x_1)$$

由条件 $P_2(x_i)=y_i$（$i=0, 1, 2$），得

$$A=y_0/(x_0-x_1)(x_0-x_2)$$
$$B=y_1/(x_1-x_0)(x_1-x_2)$$
$$C=y_2/(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

于是得到二次插值（或抛物插值）函数

$$P_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2. \qquad (1.5)$$

若记

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

或统一写成

$$l_j(x)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{2}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}, \quad j=0, 1, 2$$

则（1.5）式成为

$$P_2(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)$$