

陶明德 吴 正 编著

高等工程数学

GAODENG
GONGCHEN
SHUXUE



上海科学技术文献出版社

高等工程数学

陶明德 吴正 编著

GF115/15

上海科学技术文献出版社
一九九三年五月

(沪)新登字 301 号

高 等 工 程 数 学

陶明德 吴 正 编著

*

上海科学技术文献出版社出版发行

(上海市武康路 2 号 邮编 200031)

全 国 兵 书 店 经 销

上海科技文献出版社昆山联营厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 10.5 字数 254.000

1993 年 2 月第 1 版 1993 年 2 月第 1 次印刷

印 数 1—2,000

ISBN 7-5439-0082-3/O·71

定 价: 10.00 元

《科技新书目》 281-317

前 言

在工程科学中,除了传统的机械工程,土木工程,化学工程,水利工程,电气工程……外,近来还出现了生物医学工程,地震工程,基因工程等工程科学的新领域,甚至还将对车辆的调度和控制称为交通工程,为满足城市居民的副食品需要而采取的各种措施称为“菜篮子”工程。可见工程科学的名称越来越被人们乐于接受和采纳,究其原因主要是当人们在生产各种产品时尽量采用已有的经验和已发现的规律(其中包括应用数学的方法)来处理工程技术中提出的各种问题,以达到“多快好省”的目的。这样一来,各种工程科学对科学技术也就会提出更高更新的要求。

对于一个工程科学中的问题来说,可以采用实验的方法来解决,也可以采用应用数学的方法来解决。如果采用后者的话,则首先应当从该问题中归纳出一个数学模型,然后再来求解。当然数学模型可以是多种多样的,其中微分方程是最普通的一种。本书中的数学方法仅是指求得方程解析解和近似解的方法和技巧,含义是较狭窄的。

随着计算机和计算方法的长足发展,求得方程数值解的方法已经引起了普遍的兴趣和注意。但是在阐明某一概念方面,解析解和近似解还是起着相当重要的作用。另一方面工程类学生在学完工程数学以后,掌握了几种非常典型的方程的求解方法,还希望增加处理在工程问题中提出的各种方程的能力。因此在1985年我们就编写了一本油印讲义作为本科生选修课程和

研究生专业基础课程的教材。经过多年的教学实践,使原来的讲义得到了充实和提高,在这基础上我们就撰写了本书,取名为《高等工程数学》。

本书共分七章,每一章都已有一些专著详细地讨论过,可以参考的资料非常丰富。但是我们本着“与其增加更多的数学课程,还不如使工程师更好地了解怎样应用数学”的宗旨,对有关内容进行取舍。我们通常从实际例子中归纳出数学问题,然后用数学方法来求解;对于重要的结论,我们尽可能配备实例加以说明。众所周知,在工程课程的不同场合曾使用过不少应用数学的方法,但对于工程课程来说不可能对数学方法加以深入讨论。在本书中我们将对有关方法统一起来加以阐述,或许可以起到画龙点睛的作用。

本书的前半部分讨论线性问题,后半部分主要讨论非线性问题,但叙述的内容仍十分有限,只是作为一本入门书而已。因此在讲授时我们既不能对各数学结论作严格的证明,也不能用原始的未曾从实际中提炼过的问题来阐明数学方法,但力求能把应用数学的方法与工程问题紧密地结合起来。对于工程类学生来说,《高等工程数学》可以作为《工程数学》的补充。本书对有关工程技术人员一定也会有所裨益。

编 者

一九九一年一月

目 录

第一章 二阶变系数常微分方程.....	(1)
§1-1 几个例子.....	(1)
§1-2 Legendre 方程的级数解	(4)
§1-3 Legendre 多项式的正交性	(8)
§1-4 递推公式.....	(11)
§1-5 圆形水箱中的静振.....	(13)
§1-6 Bessel 方程的正则解.....	(15)
§1-7 当 2ν 为整数时的解	(19)
§1-8 圆板振动和变型的 Bessel 函数.....	(24)
§1-9 Bessel 函数的正交性.....	(27)
§1-10 Bessel 函数的递推公式	(29)
§1-11 等同形式	(31)
§1-12 指示方程有重根的情况	(36)
§1-13 求解几个实例	(39)
附录 Bessel 函数的函数值计算.....	(43)
第二章 偏微分方程.....	(47)
§2-1 弦振动问题.....	(47)
§2-2 二阶线性常微分方程的本征值问题.....	(50)
§2-3 Sturm-Liouville 本征值问题	(54)
§2-4 本征值和本征函数的性质.....	(57)
§2-5 可解性条件.....	(60)
§2-6 弦的强迫振动.....	(63)

§2-7	求解几个实例	(65)
§2-8	圆板的轴对称振动问题	(77)
§2-9	Laplace 变换及其性质	(81)
§2-10	弹性管中的一维瞬态流动	(85)
§2-11	Laplace 逆变换	(87)
§2-12	求解热传导问题	(93)
第三章	Green 函数	(98)
§3-1	Green 函数的概念	(98)
§3-2	用本征函数构造 Green 函数	(101)
§3-3	用分段函数构造 Green 函数	(103)
§3-4	一些简单的 Green 函数	(106)
§3-5	非齐次边值问题	(111)
§3-6	二维的 Green 函数	(113)
§3-7	两个基本解	(116)
§3-8	本征函数展开法	(118)
§3-9	非稳态问题的 Green 函数	(122)
§3-10	自伴算子的 Green 函数	(127)
第四章	积分方程	(133)
§4-1	积分方程的来源和分类	(133)
§4-2	第二种 Fredholm 方程与逐次逼近法	(141)
§4-3	Fredholm 定理	(145)
§4-4	对称方程	(151)
§4-5	第一种 Fredholm 方程	(156)
§4-6	Volterra 方程	(160)
§4-7	弱奇性积分方程	(166)
§4-8	奇异积分方程的解法	(168)
§4-9	非线性积分方程	(174)

第五章 奇异摄动法	(179)
§5-1 弱非线性问题的渐近分析.....	(179)
§5-2 正则摄动问题.....	(182)
§5-3 奇异摄动问题的例子.....	(185)
§5-4 Lindsteadt-Poincare'法	(189)
§5-5 Mathieu方程	(192)
§5-6 渐近展开匹配法.....	(200)
§5-7 预应力环形平板问题.....	(205)
§5-8 多重尺度法.....	(210)
§5-9 K-B 方法	(219)
§5-10 WKB 方法	(223)
§5-11 非均匀弦的自由振动问题	(226)
第六章 变分法	(231)
§6-1 泛函和泛函的极值.....	(231)
§6-2 泛函极值的必要条件, Euler方程	(234)
§6-3 泛函的变分.....	(239)
§6-4 应用变分原理求解边值问题.....	(247)
§6-5 在本征值问题中的应用.....	(255)
§6-6 Rayleigh-Ritz 法	(259)
§6-7 Galerkin 法	(265)
§6-8 偏积分法.....	(272)
第七章 变量变换方法	(277)
§7-1 非线性方程的例子.....	(277)
§7-2 因变量变换.....	(281)
§7-3 自变量变换.....	(285)
§7-4 混合变换.....	(293)
§7-5 液压油的 Poiseuille 流.....	(297)

§7-6	单参数数群理论的相似性变换	(302)
§7-7	Lagrange 描述方法	(306)
§7-8	方程的比拟	(310)
习题		(314)

第一章 二阶变系数常微分方程

首先从实际例子归纳出两个重要的二阶变系数常微分方程: Bessel 方程和 Legendre 方程. 然后讨论了这两个方程的求解以及解的性质. 最后又用所得的结果求解了几个简单的问题.

§ 1-1 几个例子

我们先来考察膜的运动, 设膜的平衡位置为一曲面, 由于初始扰动膜在其法向上有一位移 u , 则 u 满足

$$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u \quad (1-1)$$

其中 $C = \sqrt{T/\rho}$ 为波速. T 为膜内张力, 假定为常数, 而 ρ 为膜的密度.

设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 为正交曲面坐标, 则 Laplace 算子可表示为

$$\begin{aligned} \nabla^2 u = & \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right) \right) \end{aligned}$$

其中 H_i 一般来说是 $\xi_i (i=1, 2, 3)$ 的函数. 例如在柱坐标系中

$$\xi_1 = r, \xi_2 = \varphi, \xi_3 = z$$

$$H_1 = 1, H_2 = r, H_3 = 1$$

只要令 $\partial/\partial \xi_3 \equiv 0$ 就能得到在极坐标系中 Laplace 算子的表达式(见(1-2)). 在球坐标系中

$$\xi_1 = r, \xi_2 = \theta, \xi_3 = \varphi$$

$$H_1 = 1, H_2 = r, H_3 = r \sin \theta$$

只要分别令 $\partial/\partial\xi_1 = 0$ 和 $\partial/\partial\xi_3 = 0$ 就能得到在球面坐标系和轴对称球坐标系中的 Laplace 算子的表达式 (见(1-4) 和第二章 (7-51)).

现在假定膜呈圆形, 因此利用极坐标 (r, θ) 来求解, (1-1) 化为

$$u_{tt} = c^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \quad (1-2)$$

考察圆膜的稳态振动, 即设 $u(r, \theta, t) = U(r, \theta) \exp(-i\omega t)$, 关于 U 的方程由(1-2)可得为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + K^2 U = 0$$

其中 ω 为频率, $K = \omega/c$ 为波数. 这是一个 Helmholtz 方程, 我们再设 $U = R(r)\Theta(\theta)$, 则上述方程可化为

$$\frac{\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + K^2 R}{\frac{R}{r^2}} = - \frac{\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}}{\Theta} = n^2$$

这里把常数取为正数 n^2 是为了保证 u 是 θ 的周期函数. 关于 Θ 的方程为

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + n^2 \Theta = 0$$

可得

$$\Theta = A \cos n\theta + B \sin n\theta$$

因为 Θ 以 2π 为周期, 故 n 必为非负整数. 关于 R 的方程可化为

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(K^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (1-3)$$

这是一个线性的二阶变系数常微分方程,称为 n 阶 Bessel 方程,是本章将要讨论的方程之一。

我们再来考察球膜的稳态振动,(1-1)就化为

$$u_{tt} = c^2 \left(\frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right)$$

其中 a 为球膜半径, θ 为纬度, φ 为经度, u 为球膜的径向位移。

也设 $u(\theta, \varphi, t) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)\exp(-i\omega t)$, 则关于 Θ 的方程为

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\mu - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0$$

这里 m 为一常数, $\mu = K^2 a^2$. 如令 $x = \cos \theta$, 则 $\Theta = \Theta(x)$ 就满足

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right) + \left(\mu - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \Theta = 0 \quad (1-5)$$

(1-5)称为连带 Legendre 方程. 当 $m=0$ 时, (1-5)退化为

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right) + \mu \Theta = 0 \quad (1-6)$$

(1-6)称为 Legendre 方程,是本章将要讨论的另一方程。

下面我们来讨论在变截面明渠中的长波问题,当明渠中的水体未扰动时,自由面宽度为 b , 截面积为 s . 我们认为流动是一维的,明渠流向取为 x 方向, x 方向的速度为 u . 则根据质量守恒,可得连续性方程

$$b \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(su)}{\partial x} = 0 \quad (1-7)$$

η 为自由面高度. x 方向的动量方程在利用静水压力假定和忽略非线性项(我们仅讨论线性长波)后为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (1-8)$$

由(1-7)和(1-8)消去 u 后可得

$$g \frac{\partial}{\partial x} \left(s \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = b \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (1-9)$$

设截面的当量深度为 $h(x)$, 则 $s(x) = b(x)h(x)$; 此外还设 $\eta(x, t) = y(x)\exp(-i\omega t)$. 这样一来, (1-9) 就化为

$$(bhy')' + \frac{1}{g} b\omega^2 y = 0 \quad (1-10)$$

在(1-10)中, 设 $b = \alpha x$, $h = \text{常数}$, 则可得

$$(xy')' + k^2 xy = 0 \quad (1-11)$$

其中 $k^2 = \omega^2/gh$. 稍加变形, 上式化为

$$y'' + \frac{1}{x} y' + k^2 y = 0 \quad (1-12)$$

这是零阶 Bessel 方程. 其次设 $b = \text{常数}$, $h = \alpha x$, (1-10) 化为

$$(xy')' + k^2 y = 0$$

其中 $k^2 = \omega^2/g\alpha$. 以 $\xi = 2\sqrt{x}$ 为自变量, 上述方程可化为

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dy}{d\xi} \right) + k^2 \xi y = 0 \quad (1-13)$$

这也是零阶 Bessel 方程. 最后设 $b = \text{常数}$, $h = H(1 - x^2/a^2)$, 当以 $\xi = x/a$ 为自变量后, 可得

$$\frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{dy}{d\xi} \right) + \mu y = 0 \quad (1-14)$$

其中 $\mu = \alpha^2 \omega^2/gH$, 这是一个 Legendre 方程.

由上述讨论可知, 在变截面的明渠中, 线性长波的波幅分别满足 Bessel 方程或 Legendre 方程.

上面两个方程在工程问题中十分有用, 另一个二阶变系数常微分方程: Mathieu 方程将在第六章中讨论.

§1-2 Legendre 方程的级数解

在复平面内二阶变系数常微分方程的一般形式为

$$W'' + p(z)W' + q(z)W = 0$$

其中 W 是未知的复变量的复值函数. W 的性质完全由系数 $p(z)$ 和 $q(z)$ 的解析性所确定, 设 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在一区域中除若干个孤立奇点外是 z 的单值解析函数, 那末可把该区域中的点分为两类:

1. $p(z)$ 和 $q(z)$ 都在某点 z_0 及其邻域内解析, 则 z_0 称为方程的常点;

2. 只要 $p(z)$ 和 $q(z)$ 中的某一个在 z_0 不是解析的, 则 z_0 就称为方程的奇点.

在常点和奇点的邻域内求解问题的方法是不同的. 在常点邻域内求解可应用基本定理: 如果 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在圆 $|z - z_0| < R$ 内是单值解析的, 则方程

$$W'' + pW' + qW = 0 \quad (2-1)$$

在这圆内有唯一的一个解 $W(z)$ 满足定解条件

$$W(z_0) = c_0, \quad W'(z_0) = c_1 \quad (2-2)$$

其中 c_0 和 c_1 是任意常数, 并且 $W(z)$ 在这圆内也是单值解析的.

因此可把(2-1)的解在常点 z_0 附近, 即在 $|z - z_0| < R$ 内表示成 Taylor 级数的形式

$$W(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad (2-3)$$

将(2-3)代入(2-1), 可得各系数之间的递推公式, 即系数 c_k 都可用 c_0 或 c_1 来表示, 而 c_0 和 c_1 就是(2-1)通解中的两个任意常数. 这样我们就得到了(2-1)通解在常点 z_0 邻域内的幂级数表达式, 这种求解方法就称为幂级数解法.

下面就用这种方法来讨论 Legendre 方程在 $x=0$ 点邻域中的幂级数解. 我们把 Legendre 方程改写为

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \mu y = 0 \quad (2-4)$$

• • •

这里 $p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$, $q(x) = \frac{\mu}{1-x^2}$,

显然 $x=0$ 是(2-4)的常点。因此在 $x=0$ 邻域中, 设解为

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (2-5)$$

把(2-5)代入(2-4)可得

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k k(k-1)x^k \\ & - 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k k x^k + \mu \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0 \end{aligned} \quad (2-6)$$

上式中的第一个和式可改写为

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k$$

因此(2-6)化为

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{c_{k+2}(k+2)(k+1) - c_k[k(k+1) - \mu]\}x^k = 0$$

可见系数如果满足递推关系式

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1) - \mu}{(k+2)(k+1)} c_k \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (2-7)$$

则级数(2-5)就是方程(2-4)的解。

根据(2-7)可以把所有下标为偶数的系数 c_{2k} 用 c_0 表示出来, 而把所有下标为奇数的系数 c_{2k+1} 用 c_1 表示出来。因此(2-4)的通解为

$$y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x) \quad (2-8)$$

其中 $y_1(x)$ 只含 x 的偶次幂项, 是 x 的偶函数; 而 $y_2(x)$ 只含 x 的奇次幂项, 是 x 的奇函数。

我们来讨论级数(2-5)的收敛性, 当 k 充分大时所有系数总是大于零, 由达朗贝尔判别法知道该级数的收敛半径为 1, 故只在 $(-1, 1)$ 中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 才收敛, 也就是说 $x = \pm 1$ 一般是

(2-4)的奇点,当然这从系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的性质也是可以预料的. 但是根据物理问题的性质常常需要(2-4)在 $[-1, 1]$ 中收敛(例如见 §1-5), 那末这种在物理上感兴趣的解是否能找得到呢?

答案是肯定的. 只要我们假定(2-4)中的 $\mu = l(l+1)$ ($l = 0, 1, 2, \dots$), 就能找到所需要的解. 这是因为此时系数的递推表达式(2-7)为

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1) - l(l+1)}{(k+2)(k+1)} c_k \quad (2-9)$$

因此当 k 逐渐增加到 l 时就有 $c_{l+2} = 0$, 接着由(2-9)式知

$$c_{l+4} = 0, c_{l+6} = 0, \dots\dots$$

故无穷级数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 中有一个为多项式, 而另一个仍为无穷级数. 当 l 为偶数时, $y_1(x)$ 为 l 次多项式; 当 l 为奇数时, $y_2(x)$ 为 l 次多项式. 由上述论证可知要使 Legendre 方程(2-4)在 $[-1, 1]$ 内具有有界的解, 参数 μ 只能取为 $l(l+1)$, 这时有界的解是一个 l 次多项式, 就称为 Legendre 多项式, 记为 $P_l(x)$.

历史上通常把这种多项式的最高次幂项 x^l 的系数规定为

$$c_l = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2} \quad (2-10)$$

这样就可以唯一确定了多项式中的其他系数. 下面我们给出前五个 Legendre 多项式:

$$\left. \begin{aligned} P_0(x) &= 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

从对 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 的一般讨论可知

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x) \quad (2-12)$$

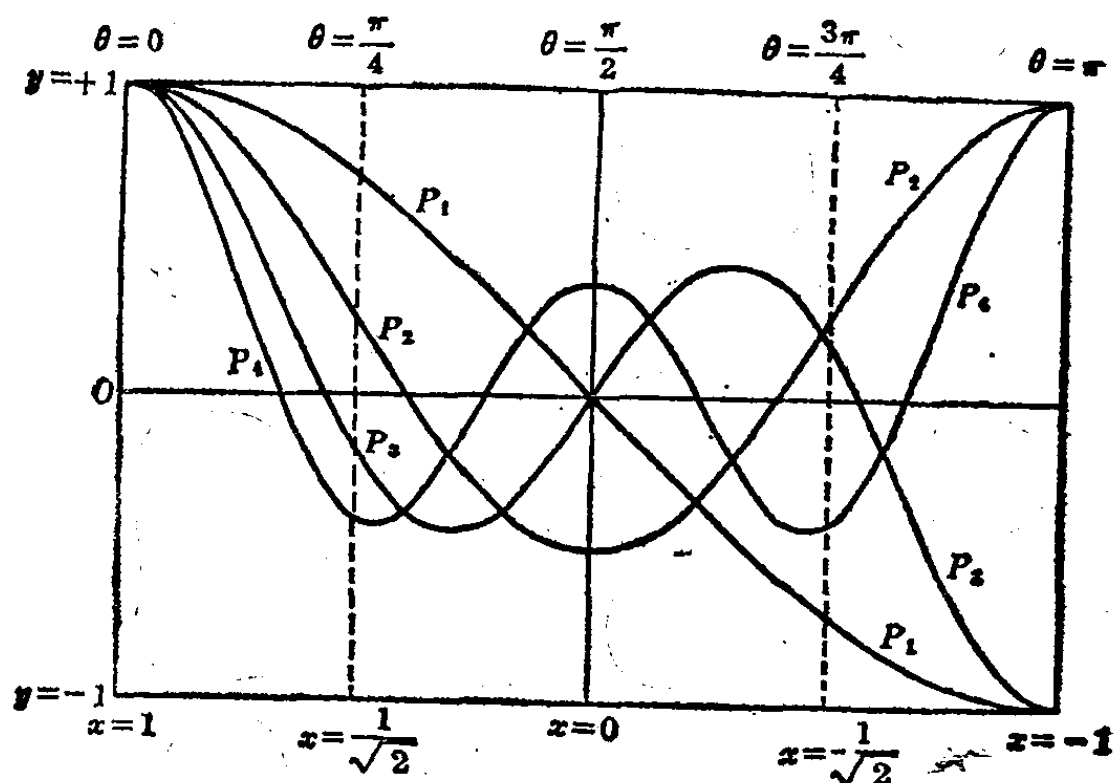


图 1

图 1 就是这五个 Legendre 多项式的图形 ($x = \cos \theta$)。

§ 1-3 Legendre 多项式的正交性

Legendre 多项式也是一种正交函数序列, 正交性的证明要基于 Rodrigues 公式

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (3-1)$$

由(3-1)可知, Rodrigues 公式是 Legendre 多项式的微分表达式。

(3-1)的证明并不麻烦, 实际上只要证明 $P_l(x)$ 满足 Legendre 方程。为此我们设 $v = (x^2 - 1)^l$, 则

$$(x^2 - 1) \frac{dv}{dx} = (x^2 - 1) \cdot 2lx(x^2 - 1)^{l-1} = 2lxv$$