概　　率　　论

上　册

M. 洛易甫 著
梁 文 騏 译

科 学 出 版 社
1966

M. Loève
PROBABILITY THEORY
Third edition
D. Van Nostrand Company, Inc.
1963

內 容 簡 介

本书共分五部分．上册包括导論与前三部分．导論部分为初等概率論，以直观为基础讲述概率的概念；第一部分讲述概率論邏輯基础——函数論測度論知識；第二部分讲概率論之一般概念与工具，包括由随机变量到特征函数的全部內容；第三部分讲述独立性概念，主要讲独立随机变数之和及其极限性质；此部分論述严整，总結了近代研究的主要成果．

本书不但包括概率論的各項結果与方法，而且还介紹了有关論題的历史发展．

概　率　论

上　册

M. 洛易甫　著

梁　文　騏　译

*

科学出版社 出版

北京朝阳門內大街137号

北京市书刊出版业营业許可証出字第061号

商务印书館上海厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店經售

*

1966年6月第一版　开本：850×1168 1/32

1966年6月第一次印刷　印張：11 3/4

印数：0001—3,800　字数：305,000

統一书号：13031·2276

本社书号：3450·13—1

定价：[科六] 1.80元

第三版序言

本书的写作意图系作为研究生的教材以及概率与統計方面工作者的参考书．需要具备的預备知識是微积分．从第二部分到第五部分所包罗的內容約需研究生的課程三到四个学期的时間．导論部分可以用作大学初等概率論課程的教材．

基础部分包含于：

导論部分——論述各概念与問題的背景，未使用高等数学工具；

第一部分——論述每一个概率学者与統計学者所必需的測度論概念；

第二部分——論述概率論的一般概念与工具．

随机序列(其一般性质在基础部分給出)在下列各部分中研究：

第三部分——論述独立性，主要是讲独立随机变数之和及其极限性质；

第四部分——論述相倚性，讲条件化运算及相倚随机变数之和的极限性质．最后一节引入了二阶随机函数．

随机函数与随机过程在最后一部分中討論：

第五部分——論述随机分析初步，讲随机分析基本概念以及鞅，可分解的，与 Марков 各型随机函数．

由于本书的原来目的在于教学，所以强調了方法并且将本书划分成：

无星号部分——它与其余部分独立；

有星号部分——它是比較深入的或比較抽象的；

附录——包含正文中材料的例証与应用，它由若干命題組成并时常附有提示；这些命題中的大多数可

从参考文献中所引的論文与书籍中查得.
同时，为了教授与引述的目的，經驗証明，把大多数的結果冠以一定的名称是有益的.

关于各領域中的結果、方法及其演化的許多历史性說明，乃是本书中不可或缺的一个实质部分. 其目的全在于教学，卽希望在引入所考察的各概念时能喚起对于基础文献的注意. 参考文献中列出了所引述与討論到的各項成果的有关著者的书籍与文章，它是逐部分逐章来編排的，在这一点上說，它与正文是平行的. 因此有兴趣的学生可以把他的学习追溯到原始文献.

本书的写作工作甚有賴于逐年試教的学生們的反应. 但是本书肯定是比讲义更加精簡，讀者必須时刻准备好耐心、笔与計算. 除此而外，在数学中，也正如在各种体裁的詩中一样，讀者从素质上說必須是一个富于想象能力的人才行.

本版在許多地方与第二版(1960)不同. 改变之处小至一个詞冠[半鞅(semi-martingale)改变为次鞅(submartingale)]，大至整个小节(§36.2). 为了維持頁碼不变，正文中的某些实质性的增添(特别是第十二章附录的9)不得不放进附录. 此外，还希望大多数錯誤已經消除，并且希望讀者能将遺留下来的錯誤惠告作者.

M. Loève

1962年4月于 Berkeley, California

譯　　序

本书是概率論方面的一本有代表性的理論著作．它概括地总結了概率論近代发展的基本成果．

原书共656頁，是一本厚书．但和內容对比，篇幅要算是很少的了．全书取材扼要，論証精辟．既注重了理論的历史发展，又能迅速把讀者带到近代研究前沿．这是本书的成就．

閱讀本书的准备知識虽只是微积分，但是由于題材本身的困难加以作者的笔墨簡約，作者在序言中对讀者提出了四点要求：耐心，笔，計算，想象．同时本书含有許多小錯誤，虽不止一次受到指摘，然而直到現在的第三版，遺留的問題仍为数不少．所有这些情况給本书的閱讀带来了一定的困难．

譯文力求消除这些小錯誤并企图使一些費解的文字明朗化．但因这些处所相当多，致使未能一一注出以明責任．由于水平有限，舛誤失当之处定所难免，凡此統由譯者自任其咎，唯有望于讀者热心指正，帮助提高譯文质量，使本书能更好地为讀者服务．

譯者　一九六六年四月九日

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

导論部分　初等概率論

第一部分 測度論概念

第一章 集合、空間与測度

第二章 可測函数与积分

第二部分　概率論的一般概念与工具

第三章　概率概念

第四章　分布函数与特征函数

第三部分 独 立 性

第五章 独立随机变数和

第六章 中心极限問題

导論部分　初等概率論

概率論所討論的乃是"机会"或"随机性"这些直观概念的数学分析，这些概念正和所有一切概念一样，系产生于經驗．随机性的数量概念首先是在賭桌上形成的，而概率論从 Pascal 与 Fermat (1654)时代起就是作为机会游戏的理論而开始的．从此以后，机会的概念就伸展到差不多所有一切的知識領域中去了．特別是自从发現自然界各种"可察現象"（就連那些描述基本粒子性质的那些現象也不例外）都应看成是服从机会法則以后，机会概念的研究对于如何合理地解釋自然界这一整个的問題就具有了基本重要意义．

一种理論之所以能够成为数学理論，关鍵在于它对于所考察的現象构造了一个数学模型，这就是說它使用了一組有着确切定义的符号以及有关这些符号的运算來描述其所考察的現象．因为現象的数量以及我們所掌握的它們的性质日益增多，所以数学模型就总是从作为我們直观基础的那些原始的粗糙的概念开始，朝着更一般更抽象的方向发展．

这样一来，随机現象模型的內在相容性便成为可疑的了，这就促成在本世紀的二十年代至五十年代中，由应用公理与定义表述开始，全部結构的重新改建．于是就出現了一个关于随机性数学模型的本质結构与研究的純粹数学分支——概率論．

导論部分（本书其余部分不依賴于这一部分）的目的是想給出概率論中各种概念与問題的"直观意义"．首先，通过扼要地分析日常經驗（特别是机会游戏）中产生的若干观念，使我們获得一个初等的公理化結构；关于使用錢币，骰子，紙牌，投鏢（一种游戏用具）等來作具体說明的工作，我們留給讀者自己去作．然后，我們

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

就使用这个公理化結构，对随机性的一些"直观概念"进行确切的描述与严格的研究．虽然在非初等的結构中测度論概念与 Fourier-Stieltjes 变式占有突出的重要地位，但在导論部分中，并未使用任何特殊工具．

I. 直观背景

1. 事件 人类对于自然界的认識中的最基本的概念是事件概念，即一个現象的发生或不发生．事件的抽象概念只是涉及到它的发生或不发生，并不涉及它的性质．这就是我們要来分析的概念．以下我們将以 $A, B, C, \cdots$ 来表示事件，有时这些符号将带有附标．

对于每一个事件 A，对应一个反面事件"非 A"，表之以 A^c；A^c 发生必須而且只須 A 不发生．一个事件可以蘊涵另一事件：如果 A 发生时 B 必然发生，則称 A 蘊涵 B，并記作 $A\subset B$．如果 A 蘊涵 B 而且 B 也蘊涵 A，則我們称 A 与 B 是等价的，記作 $A=B$．两个等价事件的性质可以是不同的，但是只要我們是只考察发生与不发生，那末它們就可以认为是等同的．借助于"与"，"或"以及"非"这些用語所表达的运算，可以由一些事件結合成一些新的事件．

A"与"B 是这样一个事件，当而且只当事件 A 以及事件 B 皆发生的时候它才发生；我們記此事件为 $A\cap B$，或者簡单記为 AB．如果 AB 是不可能发生的（即如果 A 发生則 B 就不能发生，并且如果 B 发生則 A 就不能发生），我們便称事件 A 和事件 B 是不相交的（也称为是彼此排斥的，互斥的或不相容的）．

A"或"B 是这样一个事件，当而且只当在事件 A, B 中至少有一件发生时它才发生；我們記此事件为 $A\cup B$．当而且只当 A 和 B 不相交的时候，我們才把 $A\cup B$ 改写为 $A+B$．类似地，两个以上的事件也可以借助于"与"，"或"而結合起来；我們記之为

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n \text{ 或者 } A_1A_2\cdots A_n \text{ 或者 } \bigcap_{k=1}^{n} A_k,$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \text{ 或者 } \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad A_1 + A_2 + \cdots + A_n \text{ 或者 } \sum_{k=1}^{n} A_k.$$

事件的結合中有两种可以认为是"极端事件"；用含有形象意义的話来說，它們是最初的事件与最后的事件．形如 $A+A^c$ 的事件可以說是表示"永远发生"，因为这种事件只能发生而不能不发生．由于无論事件 A 是什么事件，事件 $A+A^c$ 以及其所蘊涵的事件总是等价的，于是所有这种事件可以等同看待，我們将称之为必然事件，記之为 Ω．类似地，形如 AA^c 的事件以及蘊涵着这种事件的事件，可以說是表示"永远不发生"，因为它們不能发生而只能不发生．这种事件亦可等同，称为不可能事件，記之为 $\emptyset$．这样，不相交的事件 A 和 B 的定义就可以写成 $AB=\emptyset$．不可能事件和必然事件就是"最初的"和"最后的"事件，因为对于任何事件 A，我們恒有 $\emptyset \subset A \subset \Omega$．

通过应用发生和不发生的概念来解釋符号 $\subset$，$=$，$\cap$，$\cup$，我們立即可以証明

如果 $A \subset B$，則 $B^c \subset A^c$，反之亦然；

$AB = BA$，$A \cup B = B \cup A$；

$(AB)C = A(BC)$，$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$；

$A(B \cup C) = AB \cup AC$，$A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C)$；

$(AB)^c = A^c \cup B^c$，$(A \cup B)^c = A^c B^c$，$A \cup B = A + A^c B$；

更一般些，我們有

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^{n} A_k^c, \quad \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} A_k^c,$$

等等．

在这里我們可以指出这些运算規律与集合运算規律間的相似性．用集合的术語来說，Ω 是集合 $A, B, C, \cdots$ 所在的空間，$\emptyset$ 是空集合，A^c 是 A 的余集合；AB 是 A, B 的交集，$A \cup B$ 是 A, B 的并集，而 $A \subset B$ 是說 A 被包含在 B 之內．

在科学中，或者更确切些說，在"自然界法則"的研究中，事件可以区分为一个試驗的条件与結果．一个試驗的条件就是已知的事件或是要設法使之发生的事件．一个試驗的結果就是試驗进行

了之后(这也就是說試驗的条件发生了之后),可能发生的事件.各种結果通过"非","与","或"的一切(有限的)結合仍是結果;用集合的术語来說,試驗的結果构成一个体(或一个集合"代数"). 条件与"結果所构成的体"組成一个試驗. 任意(有限)多个試驗可以通过"条件化"而相結合,有如以下所述:

总結果就是个别試驗的諸結果通过"非","与","或"所作成的結合. 条件就是第一个試驗的条件以及把第一个試驗所观察到的結果附加到第二个試驗的条件上所形成的第二个試驗的新的条件等等. 这样一来,給定了以前各个試驗的結果之后,其后各个試驗便都是在补充条件之下来进行了,即它們是由所观察到的以前各試驗的結果条件化了的. 如果对于每一个試驗而言,一个結果发生必須而且只須它在未經条件化的情况下发生,則我們称这些試驗是完全独立的. 此外,如果各个試驗还是全同的,即它們具有相同的条件与相同的"結果所构成的体",則我們称之为重复試驗,或是称之为恒等的并且完全独立的試驗. 重复試驗的可能性是科学中与机会游戏中的一个基本假定:任何一个試驗都可以一次一次地重复进行,而关于过去与現在所发生的結果的任何知識对于未来的任何一次試驗均无影响.

2. 随机事件与随机試驗 科学主要就是研究重复試驗中的不变性质. 长时間以来,先賢昔哲所研究的仅只是决定性的試驗.在这种試驗中,条件(前因)完全决定結果(后果). 虽然在机会游戏中已經看到了其他类型的不变性质,但是仅只是到了晚近,人們才开始想到应用这种类型的不变性质給予自然界一个合理的解釋.因为我們可以认为,自然界就是在和它的观察者玩着一个最大的机会游戏. 这种类型的不变性质可以描述如下:

在n次重复試驗中,結果A的发生的次数n_A与試驗的总次数n的比值n_A/n称为这n次重复試驗中結果A的頻率. 如果在多次重复一个試驗的时候,对于任何一种結果A,其所观察到的頻率总是丛集在某个数的附近,則这个試驗称为是随机的. 例如,在擲骰子的游戏中(擲两顆均匀的骰子),"双六"大約是36次中发

生一次，这就是說其观察到的頻率丛集在1/36附近. 数值1/36就是在游戏的条件下"双六"的一項固有的不变的数量性质，而观察到的頻率則可以想象成是这个性质的一次測量. 这非常类似于我們說,例如,一根棒在一个固定温度之下具有一項不变的数量性质，称之为这根棒的"长度"，而各次測量的数据則丛集在它的周圍.

一个随机試驗的結果称为随机(机会)事件. 对于一个随机事件 A，由所观察到的頻率而測定的丛集中心数值称为 A 的概率，并記作 PA. 显然 $P\emptyset=0$, $P\Omega=1$, 并且对于任何随机事件 A, $0\leqslant PA\leqslant 1$. 因为 n 个不相交的随机事件的和 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 的頻率等于每一随机事件的頻率的和,由此我們自然就引出

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=PA_1+PA_2+\cdots+PA_n.$$

其次,令 n_A, n_B, n_{AB} 分别表示 n 次重复随机試驗中結果 A, B, AB 发生的次数.在結果 A 发生的那 n_A 次試驗中,結果 B 的頻率为

$$\frac{n_{AB}}{n_A}=\frac{n_{AB}}{n}:\frac{n_A}{n},$$

这一頻率的丛集中心数值是 $\dfrac{PAB}{PA}$，这一数值我們称之为在給定 A (发生)的条件下 B 的概率,并記作 P_AB, 因而我們有

$$PAB=PA\cdot P_AB.$$

这样一来，如果我們除了試驗的原始条件之外再加上 A 发生这一条件,則此时 B 的概率 PB 就轉化成在給定 A 的条件下 B 的概率 P_AB. 这就引导我們給出这样的定义:如果

$$P_AB=PB \text{ 或者 } PAB=PA\cdot PB,$$

則称 B 对于 A 随机独立. 由此立即可知，如若 B 对于 A 随机独立則 A 对于 B 随机独立,因为

$$P_BA=\frac{PAB}{PB}=PA,$$

这就使得我們可以称 A 与 B 是随机独立的(以上我們假定了各分数的分母不等于零).

类似地,如果在由若干个試驗所組成的一个总的試驗中,作为

这总試驗的組成部分的任何一个个别試驗的任何結果的概率，不依賴于其前各个試驗的观察到的結果，則我們称組成这总試驗的各个試驗是随机独立的. 显然，以前用发生与不发生概念定义的完全独立性蘊涵着現在只用概率概念来定义的随机独立性. 这样一来，当我們只考察随机独立性的时候，重复試驗的概念就归結为恒等的并且随机独立的試驗的概念.

3. 随机变数 对于一个物理学家来說，所謂結果一般是某一种可察数量的数値. 而从賭博者的观点看来，要紧的就不是一个随机試驗的所观察到的結果，而是相应的輸贏錢数. 无論是那一种情形，如果只有有限多种可能的結果，則必然結果 Ω 总是被划分成为若干个不相交結果 $A_1, A_2, \cdots, A_m$. 随机变数 X（例如說就是賭博者的随机遇而輸贏的錢数）的給定的方法就是确定出对应于这些結果的数値 $x_{A_1}, x_{A_2}, \cdots, x_{A_m}$，这些数値可以是正的，負的，或是零. 在 n 次重复随机試驗中的“平均値”就是

$$x_{A_1}\frac{n_{A_1}}{n}+x_{A_2}\frac{n_{A_2}}{n}+\cdots+x_{A_m}\frac{n_{A_m}}{n}.$$

因为試驗是随机的，所以这个平均値从集在数値

$$x_{A_1}PA_1+x_{A_2}PA_2+\cdots+x_{A_m}PA_m$$

的附近，而这个数値就定义为随机变数 X 的期望 EX. 显而易見，两个随机变数 X 与 Y 的和的平均値等于各自平均値的和，所以

$$E(X+Y)=EX+EY.$$

随机变数的概念比随机事件的概念更为一般. 实际上，我們可以对于每一个随机事件 A 联系上一个随机变数 I_A:

$$I_A=\begin{cases}1, & \text{若 } A \text{ 发生},\\ 0, & \text{若 } A \text{ 不发生},\end{cases}$$

这个随机变数称为随机事件 A 的印記[1]. 于是根据对于 I_A 所观察到的数値就可以获悉 A 是否发生，反之亦然. 而且我們还有

[1] 原文是 indicator. 因与通常鐫刻阳文图章命意相通，即皆以凸起示意，故权名之为印記——譯者注.

$$EI_A=1\cdot PA+0\cdot PA^c=PA.$$

一种物理可察数量所可能取的值可能有无穷多个，所以以上所給出的有关随机变数的几个簡单定义不能适用．而概率論的发展則正是由于需要考虑越来越复杂的可察数量而促成的．

II．公理；独立性与 Bernoulli 情形

现在我們对于以上扼要分析中出現的各种直观概念給出一个相容的模型；以后我們会看到，这个模型还需要加以扩充．

1．有限情形下的公理　令 Ω 或必然事件是点 ω 的空間；空集（不含有任何点 ω 的集合）或不可能事件記作 $\emptyset$．令 $\mathscr{A}$ 表示一个由 Ω 中的集合組成的非空集合类，$\mathscr{A}$ 中的元素称为随机事件，或簡称为事件，因为我們不考虑其他类型的事件．事件将以大写字母 $A, B, \cdots$ 等表示，有时亦附以下标．令 P 或概率是定义在 $\mathscr{A}$ 上的一个数值函数；P 对应于一个事件 A 的值称为 A 的概率，并以 PA 表之．二元序列 $(\mathscr{A}, P)$ 称作一个概率体，三元序列 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ 称作一个概率空間．

公理 I　$\mathscr{A}$ 是一个体：事件的余集 A^c，有限交集 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 以及有限并集 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 是事件．

公理 II　P 在 $\mathscr{A}$ 上是规范的，非負的，有限加性的：

$$P\Omega=1,\quad PA\geqslant 0,\quad P\sum_{k=1}^{n} A_k=\sum_{k=1}^{n} PA_k.$$

实际上只要假定对于两个任意的不相交事件的加性就行了，一般的情形由数学归納法立即可以推得．

因为 $\emptyset$ 与任何事件 A 不相交并且 $A+\emptyset=A$，于是我們有

$$PA=P(A+\emptyset)=PA+P\emptyset,$$

由此推知 $P\emptyset=0$．其次，不难直接看出，如果 $A\subset B$，則 $PA\leqslant PB$；而且也不难看出

$$P\bigcup_{k=1}^{n} A_k=PA_1+PA_1^cA_2+\cdots+PA_1^cA_2^c\cdots A_{n-1}^cA_n\leqslant\sum_{k=1}^{n} PA_k.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com