北京大学 清华大学固体力学丛书 GTLX

非线性连续介质力学

黄克智

清华大学出版社
北京大学出版社

北京大学清华大学固体力学丛书

非线性连续介质力学

黄 克 智

清华大学出版社
北京大学出版社

内 容 简 介

本书系统地阐述了非线性连续介质力学的基本概念和原理，并反映了该学科的新成就。书中同时采用张量的实体(抽象)记法与在一般曲线坐标系中的分量记法，且在变形后的构形中同时采用拉格朗日随体坐标系与欧拉坐标系，易于为读者理解。全书共分九章，内容包括两点张量场，变形几何学，运动学，一般平衡原理，本构理论，简单材料，弹性，热弹性与超弹性，塑性等，并附有习题。

本书可作为力学及有关专业本科生、研究生教材，亦可供教师、科研和工程技术人员参考。

北京大学清华大学固体力学丛书

非线性连续介质力学

黄克智

☆

清华大学出版社
北京大学出版社 出版

北京 清华园

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

☆

开本：850×1168 1/32 印张：15.5 字数：402 千字

1989年4月第1版 1989年4月第1次印刷

印数：0001-3500

ISBN 7-302-00360-2/O·68 定价：3.65 元

《北京大学清华大学固体力学丛书》编委会

说　　明

我们共同编辑出版这套丛书，旨在介绍现代固体力学的新近成果，反映国内在固体力学的教学和科研方面的成就。丛书的特点是，在内容上力求达到较高的学术水平；在表述上力求精炼流畅，约相当于一门研究生课程的取材。我们希望这套丛书的出版既能适应我国培养固体力学专业研究生的需要；同时又能成为有关教师和研究工作者在知识更新过程中的益友。我们也期待着广大读者的宝贵意见，以便把这套丛书出得更好。

《北京大学清华大学固体力学丛书》编委会

一九八六年十二月

引　　言

连续介质力学研究物体的宏观力学行为。假设材料由大量的粒子组成，因而无需考虑粒子的物理，可把材料当作连续的（或分段连续的）。

连续介质力学中的规律分成两部分：

1. 运动基本规律。它适用于一切物体，无论是由什么材料构成的。这些规律包括质量守恒，动量平衡，动量矩平衡，能量平衡等。

2. 本构规律，即材料内力与运动的关系。

传统的连续介质力学是在材料给定时求力与运动的联系，即求解边值问题。但是除了解边值问题以外，现代连续介质力学还研究如何建立各类材料的本构方程。这些本构方程以数学的形式体现材料的性质，同时又满足本构方程所要求的某些普遍原理——物质不变性原理。连续介质力学的重要贡献在于建立与发展非线性材料的本构关系。近年来（1945 年以后）非线性材料本构关系的研究有了极大的发展。

连续介质力学并不具体决定本构关系中的材料常数、函数或泛函，它们需由试验来确定，或者由材料科学来预言。

连续介质力学的任务是：

1. 给定本构方程，预言材料的力学行为，即解边值问题；

2. 根据材料定性的性质，提出适合于物质不变性原理的本构方程，因而提出材料常数、函数或泛函的形式。

而材料科学的任务是:

1. 研究宏观力学性质与粒子物理及化学的联系;

2. 设计与制造新材料;

3. 定量地预言材料性质。

由此可见连续介质力学与材料科学是互相补充的。

自从1845年 Stokes 最早提出非线性粘性流体本构关系(在笛卡儿坐标中):

$$T_{ij}=-p\delta_{ij}+f_{ij}(D_{kl}),\quad f_{ij}(0)=0$$

以后,直到1945年的一百年间,非线性理论没有得到发展。D. C. Leigh 在其非线性连续介质力学一书中认为原因主要是:

• 线性理论能满足大部分工业技术问题的需要。只是在本世纪初,由于化学工业的发展,具有非线性效应的材料愈益重要,而在1845年工业技术对非线性理论还没有需要。

• 1845年数学物理学所面临的是求解与线性本构关系有关的边值问题。许多问题可以线性化(如小位移弹性力学,位流理论)。需要发展线性偏微分方程的求解方法。

• 后来,在线性本构关系的体系中发展了对工程技术有用的许多分支,例如边界层,湍流,可压缩流动,热传导,化学反应流体,磁流体等,它们都是建立在理想流体或线性粘流体力学的基础上。研究工作被吸引到这些分支上。

• 1945年左右发展了气体的动力理论,至今物理学家主要对粒子物理感兴趣,而对连续介质物理缺少兴趣。

• 主要关心于创造非线性材料的是化学家与物理化学家,他们对连续介质力学既无兴趣,也不在行。他们过去主要从粒子观点来建立本构关系与解边值问题,他们不知道去满足、甚至也不懂得连续介质物理的原理。

• 非线性理论在本世纪前半叶大量发展,才使得对非线性理论的统一的研究成为可能。如果只有两个古典线性理论——线弹

性固体与线粘性流体，一般的理性的研究就没有什么必要了。

● 最后，采用近世代数的无坐标直接记法有助于避免复杂的坐标，因而能把物理本质看得更清楚。例如，由于不用坐标写法，对标架无差异原理与材料各向同性的区别可以看得更清楚了。

本书将采用作者在另一本书《张量分析》*中所用的符号。

在写作本书过程中主要参考过的书有：

[1] Leigh, D. C., Nonlinear Continuum Mechanics, McGraw-Hill, 1968.

[2] 郭仲衡，非线性弹性理论，科学出版社，1980。

[3] Седов, Л. И., Введение в Механику Сплошной Среды, Физматгиз, Москва, 1962.

[4] Malvern, L. E., Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Prentice-Hall, Inc., 1969.

[5] Eringen, A. C., Nonlinear Theory of Continuous Media, McGraw-Hill, New York, 1962.

[6] Eringen, A. C., Mechanics of Continua, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967.

本书承张晓堤同志提出宝贵意见并协助整理与校稿工作，在此表示感谢。

* 《张量分析》 黄克智等著 清华大学出版社 1986 年出版

目　录

第一章 两点张量场

§ 1.1 两点张量场、偏梯度

一、定义

设在三维欧氏空间中有两个区域，例如一物体在变形前与变形后所占的区域 $\mathscr{R}$ 与 r。有时我们也称 $\mathscr{R}$ 与 r 为变形前与变形后的构形。

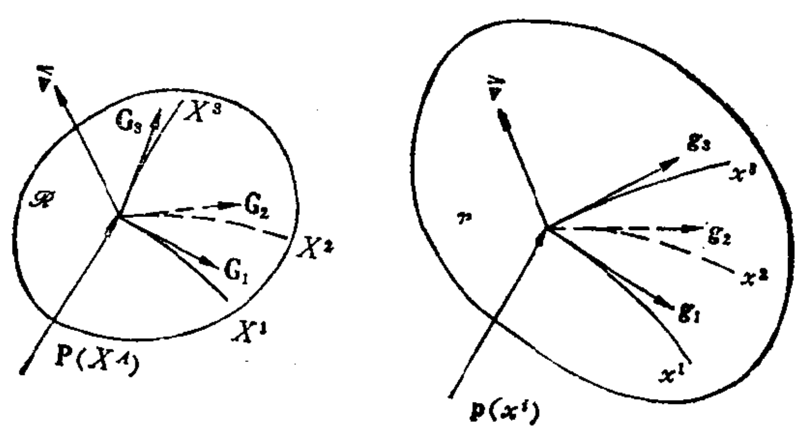

图 1.1

用大写字母表示对应于构形 $\mathscr{R}$ 的量，例如坐标 $\{X^A\}$，矢径 $\mathbf{P}(X^A)$，基矢量 $\mathbf{G}_A(X^K)$，$\mathbf{G}^B(X^K)$，度量张量 $G_{AB}(X^K)$，$G^{AB}(X^K)$ 等。

用小写字母表示对应于构形 r 的量，例如坐标 $\{x^i\}$，矢径 $\mathbf{p}(x^i)$，基矢量 $\mathbf{g}_i(x^k)$，$\mathbf{g}^j(x^k)$，度量张量 $g_{ij}(x^k)$，$g^{ij}(x^k)$ 等。

张量的并矢式中含有属于不同构形中的矢量时，则称张量为两点张量。例如

$$\overset{\rangle\langle}{\mathbf{T}} = T_{iA}\mathbf{g}^i\mathbf{G}^A = T^{iA}\mathbf{g}_i\mathbf{G}_A = T^{i}_{\cdot A}\mathbf{g}_i\mathbf{G}^A = T_i^{\cdot A}\mathbf{g}^i\mathbf{G}_A \quad (1.1.1)$$

$$\overset{\langle\rangle}{\mathbf{S}} = S_{Ai}\mathbf{G}^A\mathbf{g}^i = S^{Ai}\mathbf{G}_A\mathbf{g}_i = S^{A}_{\cdot i}\mathbf{G}_A\mathbf{g}^i = S^{\cdot i}_{A}\mathbf{G}^A\mathbf{g}_i \quad (1.1.2)$$

式中分量 $T_{iA},\cdots, S_{Ai},\cdots$ 等都是坐标 X^K 与 x^k 的函数，基矢量 $\mathbf{G}_A$ 和 $\mathbf{G}^A$ 是坐标 X^K 的函数，$\mathbf{g}_i$ 和 $\mathbf{g}^i$ 是坐标 x^k 的函数。分量之间满足指标升降关系

$$T_{iA} = g_{ij}T^{j}_{\cdot A} = g_{ij}G_{AB}T^{jB} = \cdots \quad (1.1.3)$$

$$S_{Ai} = G_{AB}S^{B}_{\cdot i} = G_{AB}g_{ij}S^{Bj} = \cdots \quad (1.1.4)$$

当坐标转换（$X^A \to X^{A'}$ 及 $x^i \to x^{i'}$）时，分量服从张量的坐标转换关系，例如

$$\begin{aligned}\overset{\rangle\langle}{\mathbf{T}} &= T_{iA}\mathbf{g}^i\mathbf{G}^A = \cdots \\ &= T_{i'A'}\mathbf{g}^{i'}\mathbf{G}^{A'} = \cdots\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} T_{i'A'} &= \beta^{j}_{i'}\beta^{B}_{A'}T_{jB},\cdots \\ T_{i'A} &= \beta^{j}_{i'}T_{jA},\cdots \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

式中 $\beta^{j}_{i'}$ 等为转换系数。在二阶张量 $\mathbf{T}$ 的上面，用记号"$\rangle\langle$"表示张量的"两点"性质，前(即左)矢量属于构形 $\mathscr{K}$(用右半括弧"$\rangle$"表示)，而后(即右)矢量属于构形 $\mathscr{R}$ (用左半括弧"$\langle$"表示)。与此类似，在二阶张量 $\mathbf{S}$ 上面，用记号"$\langle\rangle$"表示其两点性质。与两点张量相对照，凡并矢的矢量在同一构形中的张量，可称为一点张量。两点张量与一点张量都可简称为张量。

高阶的两点张量，为简单起见，一律在它上面用记号"$\langle\cdot\rangle$"表示其两点性。例如

$$\overset{\langle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}} = \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B\mathbf{G}^C\mathbf{G}^D\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l \quad (1.1.6)$$

式中分量是坐标 X^K 与 x^r 的函数。

在构形 $\mathscr{R}$ 与 r 中的矢径微分分别为

$$d\mathbf{P}=\mathbf{G}_A dX^A,\quad d\mathbf{p}=\mathbf{g}_i dx^i \tag{1.1.7}$$

定义偏梯度为

$$\overset{\langle\ \langle\cdot\rangle}{\nabla\boldsymbol{\varphi}}=\mathbf{G}^M\frac{\partial\overset{\langle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial X^M}\bigg|_{X^{K\neq M},x^r},\quad \overset{\langle\cdot\rangle\ \langle}{\boldsymbol{\varphi}\nabla}=\frac{\partial\overset{\langle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial X^M}\bigg|_{X^{K\neq M},x^r}\mathbf{G}^M \tag{1.1.8a}$$

$$\overset{\rangle\ \langle\cdot\rangle}{\nabla\boldsymbol{\varphi}}=\mathbf{g}^m\frac{\partial\overset{\langle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial x^m}\bigg|_{X^K,x^{r\neq m}},\quad \overset{\langle\cdot\rangle\ \rangle}{\boldsymbol{\varphi}\nabla}=\frac{\partial\overset{\langle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial x^m}\bigg|_{X^K,x^{r\neq m}}\mathbf{g}^m \tag{1.1.8b}$$

(1.1.8a) 式中偏导数后面的记号“$X^{K\neq M}$, x^r”表示在求导时只变化X^M，而其他的 $X^K(K\neq M)$ 和一切的 x^r 都保持不变，同样 (1.1.8b) 式中偏导数后面的记号“X^K, $x^{r\neq m}$”表示一切的 X^K 和除 x^m 以外的其他 x^r 都保持不变。以后对坐标的偏导数都按此意义理解。在本节(§ 1.1)中我们假定 X^A 与 x^i 是两组互相独立的自变量(坐标)，暂不考虑它们之间的联系，等到下节 (§ 1.2) 中再去考虑。由(1.1.8)式可得$\overset{\langle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}$的微分:

$$\begin{aligned} d\overset{\langle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}} &= d\mathbf{P}\cdot\overset{\langle\ \langle\cdot\rangle}{\nabla\boldsymbol{\varphi}}+d\mathbf{p}\cdot\overset{\rangle\ \langle\cdot\rangle}{\nabla\boldsymbol{\varphi}} \\ &=(\overset{\langle\cdot\rangle\ \langle}{\boldsymbol{\varphi}\nabla})\cdot d\mathbf{P}+(\overset{\langle\cdot\rangle\ \rangle}{\boldsymbol{\varphi}\nabla})\cdot d\mathbf{p} \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

偏梯度按基矢量的分解式为

$$\begin{aligned} \overset{\langle\ \langle\cdot\rangle}{\nabla\boldsymbol{\varphi}} &= \nabla_M\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}\mathbf{G}^M\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B\mathbf{G}^C\mathbf{G}^D\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l \\ \overset{\langle\cdot\rangle\ \langle}{\boldsymbol{\varphi}\nabla} &= \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl;M}\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B\mathbf{G}^C\mathbf{G}^D\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l\mathbf{G}^M \end{aligned} \tag{1.1.10a}$$

式中右端的分量称为 $\overset{\langle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}$ 的分量对于 X^M 的偏协变导数:

$$\begin{aligned} \nabla_M\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl} &= \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl;M} \\ &= \frac{\partial}{\partial X^M}\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}+\varphi^{NB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}\Gamma^A_{MN} \\ &\quad +\varphi^{AN\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}\Gamma^B_{MN}-\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot ND\cdot\cdot kl}\Gamma^N_{MC}-\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CN\cdot\cdot kl}\Gamma^N_{MD} \end{aligned} \tag{1.1.10b}$$

及

$$\begin{aligned}\overset{\rangle\langle\cdot\rangle}{\nabla\boldsymbol{\varphi}} &= \nabla_m \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}\mathbf{g}^m \mathbf{G}_A\mathbf{G}_B\mathbf{G}^C\mathbf{G}^D\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l \\ \overset{\langle\cdot\rangle\rangle}{\boldsymbol{\varphi}\nabla} &= \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl;m}\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B\mathbf{G}^C\mathbf{G}^D\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l\mathbf{g}^m\end{aligned} \qquad (1.1.11a)$$

式中右端的分量称为 $\overset{\langle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}$ 的分量对于 x^m 的偏协变导数:

$$\begin{aligned}\nabla_m \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl} &= \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl;m} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^m}\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl} + \varphi^{AB\cdot\cdot sj}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}\Gamma^i_{ms} \\ &\quad + \varphi^{AB\cdot\cdot is}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}\Gamma^j_{ms} - \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot sl}\Gamma^s_{mk} - \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot ks}\Gamma^s_{ml}\end{aligned} \qquad (1.1.11b)$$

以后我们用记号“∂”或“,”表示偏导数:

$$\partial_M(\quad) = (\quad)_{,M} = \frac{\partial}{\partial X^M}(\quad)\Big|_{X^{K\neq M},x^r}$$

$$\partial_m(\quad) = (\quad)_{,m} = \frac{\partial}{\partial x^m}(\quad)\Big|_{X^K,x^{r\neq m}}$$

在构形 $\mathscr{R}$ 中的度量张量为

$$\begin{aligned}\overset{\langle\langle}{\mathbf{I}} &= G_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B = G^{AB}\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B = \delta^B_A\mathbf{G}^A\mathbf{G}_B = \delta^A_B\mathbf{G}_A\mathbf{G}^B \\ &= \mathbf{G}^A\mathbf{G}_A = \mathbf{G}_A\mathbf{G}^A\end{aligned} \qquad (1.1.12)$$

式中 $\mathbf{I}$ 上面的记号“$\langle\langle$”表示前、后矢量都在构形 $\mathscr{R}$ 中,故 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{I}}$ 为 $\mathscr{R}$ 中的张量。在构形 $\mathscr{r}$ 中的度量张量为

$$\begin{aligned}\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{I}} &= g_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j = g^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j = \delta^j_i\,\mathbf{g}^i\mathbf{g}_j = \delta^i_j\,\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j \\ &= \mathbf{g}^i\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_i\mathbf{g}^i\end{aligned} \qquad (1.1.13)$$

式中 $\mathbf{I}$ 上面的记号“$\rangle\rangle$”表示 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{I}}$ 为 $\mathscr{r}$ 中的张量。

二、矢量的平移、转移张量

设在构形 $\mathscr{R}$ 的 X^A 点处有一矢量 $\overset{\langle}{\mathbf{v}}$, 在构形 $\mathscr{r}$ 的 x^i 点处有一矢量 $\overset{\rangle}{\mathbf{v}}$。此两矢量 $\overset{\langle}{\mathbf{v}}$ 与 $\overset{\rangle}{\mathbf{v}}$ 的大小相等,方向平行,即一者为另一

者经过平移的结果(图 1.1)。它们沿各自的基矢量分解式为

$$
\begin{aligned}
\overleftarrow{\mathbf{v}} &= v^A\mathbf{G}_A = v_A\mathbf{G}^A \\
\overrightarrow{\mathbf{v}} &= v^i\mathbf{g}_i = v_i\mathbf{g}^i
\end{aligned}
\tag{1.1.14}
$$

为了要研究 v^A 或 v_A 与 v^i 或 v_i 间的关系，首先要研究基矢量 $\mathbf{G}_A$ 或 $\mathbf{G}^A$ 与 $\mathbf{g}_i$ 或 $\mathbf{g}^i$ 的关系。设构形 $\mathscr{r}$ 中的基矢量通过构形 $\mathscr{R}$ 中基矢量的表达式为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g}_i &= g_i^{\cdot A}\mathbf{G}_A = g_{iA}\mathbf{G}^A \\
\mathbf{g}^i &= g^{iA}\mathbf{G}_A = g^i_{\cdot A}\mathbf{G}^A
\end{aligned}
\tag{1.1.15}
$$

式中的四组系数 $g_{\cdots}$ 之间满足指标升降关系。而构形 $\mathscr{R}$ 中的基矢量通过构形 $\mathscr{r}$ 中的基矢量表达式则为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}_A &= g_A^{\cdot i}\mathbf{g}_i = g_{Ai}\mathbf{g}^i \\
\mathbf{G}^A &= g^{Ai}\mathbf{g}_i = g^A_{\cdot i}\mathbf{g}^i
\end{aligned}
\tag{1.1.16}
$$

式中的四组系数 $g_{\cdots}$ 之间也满足指标升降关系。

(1.1.15)与(1.1.16)式中的系数 $g_{\cdots}$ 均称为转移系数。显然，

$$
\begin{aligned}
g_{iA} &= \mathbf{g}_i\cdot\mathbf{G}_A = \mathbf{G}_A\cdot\mathbf{g}_i = g_{Ai} \\
g^{iA} &= \mathbf{g}^i\cdot\mathbf{G}^A = \mathbf{G}^A\cdot\mathbf{g}^i = g^{Ai} \\
g_i^{\cdot A} &= \mathbf{g}_i\cdot\mathbf{G}^A = \mathbf{G}^A\cdot\mathbf{g}_i = g^A_{\cdot i} = g_i^A \\
g^i_{\cdot A} &= \mathbf{g}^i\cdot\mathbf{G}_A = \mathbf{G}_A\cdot\mathbf{g}^i = g_A^{\cdot i} = g^i_A
\end{aligned}
\tag{1.1.17}
$$

因此转移系数对于其两个指标是对称的，指标的前后顺序可以对换。

可以证明 $\|g_i^A\|$ 与 $\|g_B^i\|$ 互为逆矩阵,即

$$
g_i^A g_B^i = \delta_B^A, \quad g_A^i g_j^A = \delta_j^i \tag{1.1.18}
$$

证明过程如下：将(1.1.16)式代入以下等式

$$
\mathbf{G}^A\cdot\mathbf{G}_B = \delta_B^A
$$

得

$$
g_i^A\mathbf{g}^i\cdot g_B^j\mathbf{g}_j = \delta_B^A
$$

故

$$g_i^A g_B^i = \delta_B^A$$

即(1.1.18)之第一式。同理，将(1.1.15)式代入等式

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_j^i$$

可得(1.1.18)之第二式。

两个互逆矩阵的行列式互为倒数，故

$$|g_i^A|\,|g_B^i| = 1 \qquad (1.1.19)$$

其实，这两个行列式的值可以通过 $\sqrt{g}$ 与 $\sqrt{G}$ 的比值表示，这里 G 与 g 各表示构形 $\mathscr{R}$ 与构形 r 的度量张量 G_{AB} 与 g_{ij} 的行列式。设坐标系恒取为右手系，则

$$\begin{aligned}\sqrt{g} &= [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3] = [g_1^A \mathbf{G}_A, g_2^B \mathbf{G}_B, g_3^C \mathbf{G}_C] \\ &= g_1^A g_2^B g_3^C [\mathbf{G}_A, \mathbf{G}_B, \mathbf{G}_C] \\ &= g_1^A g_2^B g_3^C \sqrt{G}\, e_{ABC} = \sqrt{G}\, |g_i^A|\end{aligned}$$

故

$$|g_i^A| = \sqrt{\frac{g}{G}} \qquad (1.1.20a)$$

同理可证

$$|g_A^i| = \sqrt{\frac{G}{g}} \qquad (1.1.20b)$$

将(1.1.13)式度量张量 $\overset{\gg}{\mathbf{I}}$ 中的后矢量从构形 r 中平移至构形 $\mathscr{R}$ 中，得到

$$\overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}} = \mathbf{g}^i(g_i^A \mathbf{G}_A) = \mathbf{g}^i(g_{iA} \mathbf{G}^A) = \mathbf{g}_i(g^{iA} \mathbf{G}_A) = \mathbf{g}_i(g_A^i \mathbf{G}^A)$$

由此

$$\overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}} = g_{iA} \mathbf{g}^i \mathbf{G}^A = g^{iA} \mathbf{g}_i \mathbf{G}_A = g_A^i \mathbf{g}_i \mathbf{G}^A = g_i^A \mathbf{g}^i \mathbf{G}_A \qquad (1.1.21)$$

若将(1.1.12)式度量张量 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{I}}$ 中的前矢量从构形 $\mathscr{R}$ 中平移至构形 r 中，也同样得到(1.1.21)式。同理，从(1.1.12)式经过后矢量的平移，或从(1.1.13)式经过前矢量的平移，可得到

$$\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}} = g_{Ai}\mathbf{G}^A\mathbf{g}^i = g^{Ai}\mathbf{G}_A\mathbf{g}_i = g_i^{A}\mathbf{G}_A\mathbf{g}^i = g^i_A\mathbf{G}^A\mathbf{g}_i \qquad (1.1.22)$$

$\overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}}$ 与 $\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}}$ 称为转移张量，它们是度量张量经过前矢量或后矢量平移的结果，均为两点张量，转移张量的分量就是转移系数。

我们知道，度量张量与任何矢量进行点积的结果就是该矢量自身，即在构形 $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{r}$ 中各有

$$\begin{aligned} \overset{\langle\langle}{\mathbf{I}} \cdot \overset{\langle}{\mathbf{v}} = \overset{\langle}{\mathbf{v}} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{I}} = \overset{\langle}{\mathbf{v}} \\ \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{I}} \cdot \overset{\rangle}{\mathbf{v}} = \overset{\rangle}{\mathbf{v}} \cdot \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{I}} = \overset{\rangle}{\mathbf{v}} \end{aligned} \qquad (1.1.23)$$

现在我们来看转移张量与矢量进行点积的结果。为此，先看转移张量与基矢量的点积。由(1.1.21)与(1.1.22)式可得

$$\begin{aligned} \overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{g}_k = \mathbf{g}_k \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}} = g_k^A\mathbf{G}_A = g_{kA}\mathbf{G}^A \\ \overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{g}^k = \mathbf{g}^k \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}} = g^k_A\mathbf{G}^A = g^{kA}\mathbf{G}_A \end{aligned} \qquad (1.1.15)'$$

及

$$\begin{aligned} \overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{G}_B = \mathbf{G}_B \cdot \overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}} = g^i_B\mathbf{g}_i = g_{iB}\mathbf{g}^i \\ \overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{G}^B = \mathbf{G}^B \cdot \overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}} = g^B_i\mathbf{g}^i = g^{iB}\mathbf{g}_i \end{aligned} \qquad (1.1.16)'$$

由(1.1.15)′式，“$\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}}\cdot$” 或 “$\cdot\overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}}$” 运算的结果，相当于把构形 $\mathscr{r}$ 中的基矢量平移到构形 $\mathscr{R}$ 中来，而由(1.1.16)′式，“$\overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}}\cdot$” 或 “$\cdot\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}}$” 的运算结果，相当于把构形 $\mathscr{R}$ 中的基矢量平移到构形 $\mathscr{r}$ 中来。因此，对于任意的矢量 $\mathbf{v}$，我们也有

$$\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}} \cdot \overset{\rangle}{\mathbf{v}} = \overset{\rangle}{\mathbf{v}} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}} = \overset{\langle}{\mathbf{v}} \quad (\mathscr{r} \to \mathscr{R}) \qquad (1.1.24a)$$

这表示把矢量 $\mathbf{v}$ 从构形 $\mathscr{r}$ 中平移到构形 $\mathscr{R}$ 中，而

$$\overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}} \cdot \overset{\langle}{\mathbf{v}} = \overset{\langle}{\mathbf{v}} \cdot \overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}} = \overset{\rangle}{\mathbf{v}} \quad (\mathscr{R} \to \mathscr{r}) \qquad (1.1.24b)$$

这表示把矢量从构形 $\mathscr{R}$ 中平移到构形 $\mathscr{r}$ 中。正因为如此，$\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}}$ 与 $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}}$ 称为转移张量。(1.1.24)称为矢量平移公式。有时，人们往往把