测量误差计算

长沙铁道学院工程系测量教研组译

人民铁道出版社

测量误差计算
人民铁道出版社

测量误差计算

（日）冈积满 著

长沙铁道学院工程系测量教研组 译

人民铁道出版社

1975年·北京

内 容 简 介

本书讲述测量误差理论和计算方法，内容分两大部分：第一部分简要叙述测量误差的分布、最小二乘法等理论；第二部分分析距离、角度、高差测量时产生误差的原因、说明直接和间接观测值的误差和精度，叙述导线、视距、平板和三角测量的误差，其观测值的调整方法以及面积、体积测定计算误差等，书中对所述及的理论均列举了例题，另外附有习题和答案。书末附有计算公式汇总表和常用对数表、三角函数表等。

测 量 误 差 计 算
（日）冈积满著
长沙铁道学院工程系测量教研组 译
人民铁道出版社出版
（北京市东单三条14号）
新华书店北京发行所发行
各 地 新 华 书 店 经 售
人民交通出版社印刷厂印
开本：787×1092 $\frac{1}{32}$ 印张：9.875字数：226千
1 9 7 5 年7月 第1版
1 9 7 5 年7月 第1版 第1次印刷
印数：0001—30,000册 定价（科三）：0.80元

原作者序

测量的成果中总是包含有误差。误差的大小除随测量范围内的地形地物状况而异外，还因所用仪器工具、测量方法和操作熟练程度不同而有很大差异。因此，要进行测量，必须注意要求的精度。

从事测量工作的人员，不能只满足于偶然获得的良好成果，而必须了解在观测距离、角度、高差等种种要素时，观测值能达到什么精度，由这些观测值来进行各种计算时，可靠的程度如何。

一般，在测量中要谋求检查观测值是否正确的方法，如果误差在容许范围以内，可以合理地加以调整。这就需要充分了解误差调整的理论根据。

本书系为上述目的而编著，供学习测量的学生和从事测量的工作人员参考。

在第一编中，简明扼要地阐述误差分布、最小二乘法等一般理论。

在第二编中，分析距离、角度、高差等测量三要素测定时产生误差的原因，说明直接和间接观测值的误差和精度，然后叙述导线测量、视距测量、平板测量和三角测量等的误差、观测值的调整方法以及面积、体积测定计算误差。

为了帮助读者阅读，在第一编、第二编中凡述及的理论均列举了例题，在第二编各章后面均附有习题，书末附有解答提示和答案。

书中不妥之处，请读者批评指正。

作者1971年9月

目　　录

第一编　测量误差的基本原理

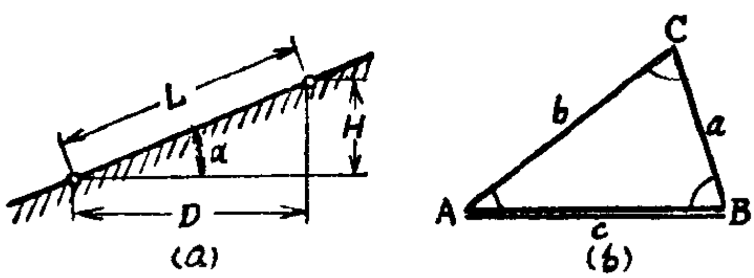
第一章　观测误差

§1.　观测的种类

在测量中，有各种各样的观测方法，大体上可归纳为直接观测和间接观测两类。

1.**直接观测**　就是直接测定未知量的方法。如用经纬仪测角、用尺量距以及用水准仪测定高差等。

2.**间接观测**　就是通过测定其他的要素，而由计算推求未知量的方法。如第1-1-1图(a)，测定斜距L、高差H(或倾斜角α）而由计算求水平距离D；或由视距测量求距离、高差；又如图(b)，测定三角形的一边c及三个内角，而由计算求另外两边a、b等。



第1-1-1图　间接观测

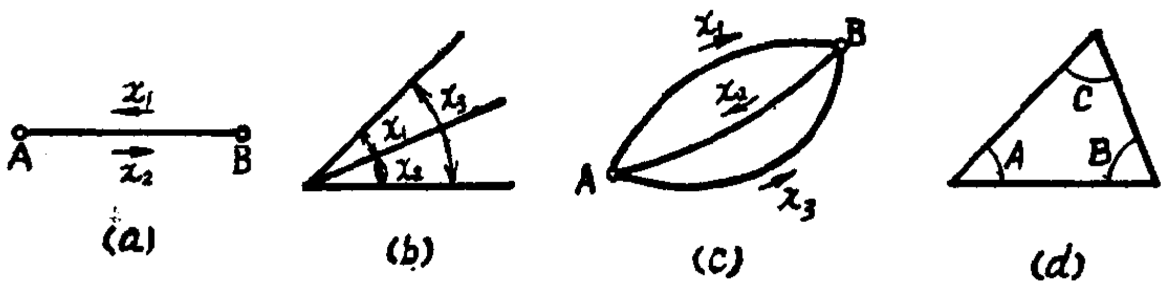
间接观测测定的要素较多，因此求得未知量的精度取决于所测各要素的精度。例如图(a)的D值，由于斜距L、高差H（或倾斜角α）的误差而产生误差；图(b)的边长b，由于基线c和夹角的误差而产生误差。因为间接观测可能产生

误差的要素较多，除非对各要素作极其精密的测定，通常都比直接观测的误差大。

此外，还可按观测性质分为独立观测和条件观测。

1.**独立观测** 就是不受其他任何约束的观测。例如丈量两点间的距离，观测三角形的两个角，观测都不受任何约束，也就是说，各个观测结果本身，即是我们所求的值。

2.**条件观测** 就是在观测值之间存在一定条件的观测。例如第 1-1-2 图中：



第1-1-2图 条件观测

图 (a) ——丈量两点间的往返距离 x_1 和 x_2 时，必须满足

$$x_1 = x_2$$

图 (b) ——观测三个方向间的夹角 x_1、x_2、x_3 时，必须满足

$$x_3 = x_1 + x_2$$

图 (c) ——沿箭头方向观测两点的高差时，必须满足

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 = x_3$$

图 (d) ——观测三角形的内角 A、B、C 时，必须满足

$$A + B + C - 180^\circ = 0$$

这些式子就叫做条件式或条件方程式。条件观测可以用条件式判断观测值是否正确，而且以后还要谈到，如何通过

满足条件式来改正观测值，所以条件观测的精度比独立观测的精度高。

无论是直接观测还是间接观测，都可分为独立观测与条件观测。

§2. 误差按原因分类

即使是熟练的观测者，用精密的仪器细心地测量，也不可避免地要产生误差，所以不可能求得真值。误差按其产生的原因分为下列五类。

1. **理论误差** 如距离测量中，由于温度变化引起尺的伸缩而产生的误差；水准测量中，由于折光和地表曲率产生的误差；一、二等三角测量中，球面角超引起的误差等。这些误差可以从理论上求得，因此，观测值可在观测后予以改正。

2. **仪器误差** 如由于尺的长度不准确；经纬仪、水准仪等校正不完善；标尺的零点误差；视距常数不准确等仪器不良的原因而产生的误差。工作之前，必须对仪器进行仔细的检验和校正，尽可能减小这些误差。

3. **人　差** 即由于观测者的感觉和视觉上的限制所产生的误差。例如，估读分划值的尾数总是偏大，或者总是把望远镜十字丝对准花杆中央的一侧。

4. **错　误** 如读数错误，记录错误，经纬仪、水准仪安置不牢而在观测过程中仪器发生移动等。这些都是由于疏忽所致，所以必须仔细地进行工作，以避免这类错误的发生。

5. **突然发生的误差** 如由于温度的急剧上升这种突然发生的原因而引起的误差，对于这种误差，只要充分注意是可以避免的。

§3. 误差按性质分类

误差按性质可分为系统误差和偶然误差两类。

1.**系统误差** 就是在某一条件下，经常发生同方向或同大小的误差。例如，用不准确的尺丈量距离时产生的误差。理论误差、仪器误差等多属于系统误差。理论误差如前所述，可在观测后改正之。仪器误差，例如用不准确的尺丈量距离，可以测定其系统误差的方向和大小，在丈量后，按丈量次数比例地改正；又如经纬仪的视准轴误差、置平误差、偏心差等可以通过正倒镜观测取平均值加以消除。

2.**偶然误差** 就是正负符号及大小不一定的误差。如在距离丈量中，尺段之间衔接不准确产生的误差；角度测量中，望远镜十字丝没有对准花杆中央而引起的误差；分划值的尾数估读不准引起的误差等。

由于偶然误差的正负符号和大小不一定，所以不能在观测后按观测次数比例地改正，也不能用改变观测方法来简单地加以消除，而且不管怎样仔细观测，误差也不可避免，这就要用误差理论来进行处理。

第二章　最小二乘法原理

§1.　误差出现的或然率

在测量时发生的偶然误差的大小与该误差出现的或然率之间，有以下关系：

1.绝对值相等的正、负误差出现的或然率相等。

例如，若多次丈量某两点之间的距离，得到误差为 -0.01 米与 $+0.01$ 米的测定值的次数是相等的。同样，-0.05 米和 $+0.05$ 米的误差出现的或然率也相等。也就是说，如果以座标 x 轴表示误差，以座标 y 表示该误差出现的或然率，把误差与误差或然率之间的关系绘成曲线，则该曲线对称于 y 轴。

2.误差绝对值小的或然率大于误差绝对值大的或然率。

在测定某值时，只要一直细心地注意观测以求得准确的值，得到误差为 ± 0 的观测值的次数必然为最多。例如，用尺对 100 米的距离丈量 50 次，如果其中准确丈量的次数有25次，误差为 ± 0.10 米的丈量次数就比25次少，至于误差为 ± 0.20 米的丈量次数则更少，亦即准确测定的或然率为最大，误差的绝对值越大，出现的或然率越小，表示误差与误差出现的或然率之间关系的曲线，以误差为 ± 0 处为顶点，两侧逐渐降低。

3.极大误差出现的或然率为 0。

例如在上例中，丈量误差为 ± 0.50米的情况是很少的，更不会出现丈量误差为 ± 5.00米的情况。亦即表示误差与或

然率关系的曲线为 x 轴的渐近线。

§2. 误差曲线

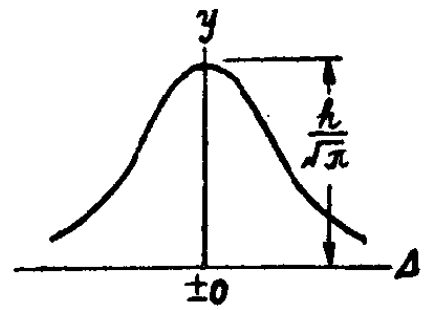


图 1-2-1

误差(Δ)和该误差出现的或然率 y 的关系，如第 1-2-1 图所示。根据最小二乘法，这一曲线为[1]

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2} \qquad (1\text{-}2\text{-}1)$$

注〔1〕 对某一值有若干个测定结果时，其算术平均值可称为最或是值。今设 l_1、l_2、……l_n 为观测值，n 为观测次数，则最或是值 l_0 为

$$l_0=\frac{l_1+l_2+\cdots\cdots+l_n}{n}=\frac{[l]}{n} \qquad (1)$$

最或是值 l_0 与观测值 l_1、l_2……l_n 之差即为剩余误差 v_1、v_2……v_n：

$$\begin{aligned} l_0-l_1&=v_1\\ l_0-l_2&=v_2\\ &\cdots\cdots\cdots\\ +)\ l_0-l_n&=v_n\\ \hline nl_0-[l]&=[v] \end{aligned}$$

由式(1) $\qquad nl_0=[l]$

∴ $\qquad [v]=0 \qquad (2)$

即最或是值的剩余误差之和为零。

设若真误差 Δ 与其出现的或然率的关系为 $y=f(\Delta)$，如果真值为 x，真误差 Δ_1、Δ_2……Δ_n 为 $x-l_1$，$x-l_2$，……$x-l_n$，这些误差出现的或然率分别为 $f(\Delta_1)$，$f(\Delta_2)$，……$f(\Delta_n)$。而 Δ_1，Δ_2，……Δ_n 等误差同时出现的或然率 P 为

$$P = f(\Delta_1)\cdot f(\Delta_2)\cdot \cdots\cdots \cdot f(\Delta_n) \qquad (3)$$

x 作为最或是值时的 P 应该为最大。对 P 取对数，求其最大值

$$\log P = \log f(\Delta_1) + \log f(\Delta_2) + \cdots\cdots + \log f(\Delta_n)$$

$$\frac{d\log P}{dx} = \frac{d\log f(\Delta_1)}{d\Delta_1}\cdot\frac{d\Delta_1}{dx} + \frac{d\log f(\Delta_2)}{d\Delta_2}\cdot\frac{d\Delta_2}{dx}$$

$$+\cdots\cdots+\frac{d\log f(\Delta_n)}{d\Delta_n}\cdot\frac{d\Delta_n}{dx} = 0$$

因为 $\qquad \Delta_1 = x - l_1,\ \dfrac{d\Delta_1}{dx} = 1$

同理 $\qquad \dfrac{d\Delta_2}{dx} = \dfrac{d\Delta_3}{dx} = \cdots\cdots = \dfrac{d\Delta_n}{dx} = 1$

$$\therefore \qquad \frac{d\log P}{dx} = \frac{d\log f(\Delta_1)}{d\Delta_1} + \frac{d\log f(\Delta_2)}{d\Delta_2} + \cdots\cdots$$

$$+\frac{d\log f(\Delta_n)}{d\Delta_n} = 0$$

由此得

$$\Delta_1\frac{d\log f(\Delta_1)}{\Delta_1 d\Delta_1} + \Delta_2\frac{d\log f(\Delta_2)}{\Delta_2 d\Delta_2} + \cdots\cdots$$

$$+\Delta_n\frac{d\log f(\Delta_n)}{\Delta_n d\Delta_n} = 0 \qquad (4)$$

又由（2）式，x 为最或是值时有

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots\cdots + \Delta_n = 0 \qquad (5)$$

要使（4）、（5）式同时成立，则必须使

$$\frac{d\log f(\Delta_1)}{\Delta_1 d\Delta_1}=\frac{d\log f(\Delta_2)}{\Delta_2 d\Delta_2}=\cdots\cdots=\frac{d\log f(\Delta_n)}{\Delta_n d\Delta_n}$$

$$=K$$

K 为常数，即

$$\frac{d\log f(\Delta)}{d\Delta}=K\Delta$$

$\therefore$
$$\log f(\Delta)=K\frac{\Delta^2}{2}+c$$

$\therefore$
$$f(\Delta)=e^{K\frac{\Delta^2}{2}+c}=Ce^{\frac{\Delta^2}{2}K}$$

因为 Δ 增大时，$f(\Delta)$ 减小，设

$$\frac{K}{2}=-h^2$$

则
$$f(\Delta)=Ce^{-h^2\Delta^2}\qquad(6)$$

由于
$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\Delta)d\Delta=1,\ f(+\Delta)=f(-\Delta)$$

因此
$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\Delta)d\Delta=\int_{-\infty}^{+\infty}Ce^{-h^2\Delta^2}d\Delta$$

$$=2\int_0^{\infty}Ce^{-h^2\Delta^2}d\Delta=1$$

$\therefore$
$$\int_0^{\infty}e^{-h^2\Delta^2}d\Delta=\frac{1}{2C}$$

今设 $h\Delta=t$，$hd\Delta=dt$，代入（6）式得

$$\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{h}{2C}\qquad(7)$$

为了求这一定积分，设

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\int_0^\infty e^{-v^2}dv=A\ ,\quad v=tu$$

因为 $dv=tdu$，故

$$A^2=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(t^2+v^2)}dvdt=\int_0^\infty du\int_0^\infty e^{-t^2(1+u^2)}tdt$$

然而
$$\int_0^\infty e^{-t^2(1+u^2)}tdt=\frac{et^2(1+u^2)}{2(1+u^2)}\Bigg|_0^\infty$$

$$=\frac{1}{2(1+u^2)}$$

$$\therefore\quad A^2=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{2}\left[\operatorname{tg}^{-1}\infty-\operatorname{tg}^{-1}0\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\quad \int_0^\infty e^{-t^2}dt=\int_0^\infty e^{-v^2}dv=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

故由(7)式
$$\frac{h}{2C}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\quad\therefore\ C=\frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

将这一 C 值代入(6)式，得到

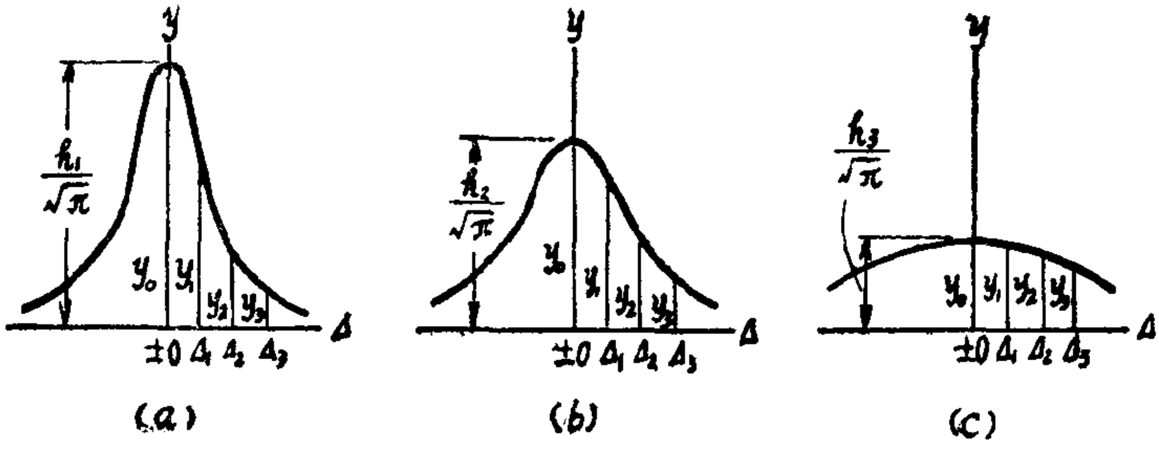
$$f(\Delta)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2}\tag{8}$$

由于观测的方法不同，第1-2-2图所示的误差曲线的峰离亦即 h 也不同。h 的大小与这些曲线之间有如下的关系：

1.误差曲线与 Δ 轴所围成的面积为 1 。

例如，对相距约 100 米的两点间距离丈量了 100 次，如果

准确丈量的次数为24次；



第1-2-2图　不同精度的误差曲线

误差为 + 0.05 米、 − 0.05 米的丈量次数各为 18 次；

误差为 + 0.10 米、 − 0.10 米的丈量次数各为 12 次；

误差为 + 0.15 米、 − 0.15 米的丈量次数各为 6 次；

误差为 + 0.50 米、 − 0.50 米的丈量次数各为 2 次；

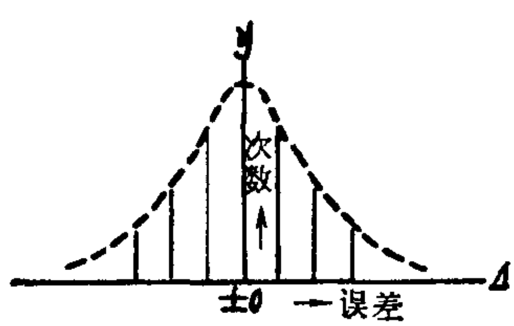
误差与丈量次数的关系如第 1-2-3 图所示。以上丈量次数总计为 100 次，误差曲线以纵轴 y 作为或然率，不管 h 值的大小如何，误差曲线与 Δ 轴所包围的面积总是等于 1 。

2.观测精度越高，h 越大。

由误差曲线可知，在观测中如果 h 比较大，误差为 ± 0 时的或然率也较大，亦即准确观测情况的或然率较大。

3.观测精度越高，误差曲线下降越快。

由于误差曲线与 Δ 轴所包围的面积不管 h 的大小如何都等于 1，所以精度高的曲线，亦即 h 大的曲线与 h 小的曲线相比，误差曲线下降要快一些。



第1-2-3图　误差与其出现次数的关系

第1-2-2图(a)、(b)、(c)中，如果误差 ±0，Δ_1，Δ_2 和 Δ_3 出现的或然率分别为 y_0，y_1，y_2 和 y_3，则 y_0 与 y_1 之差