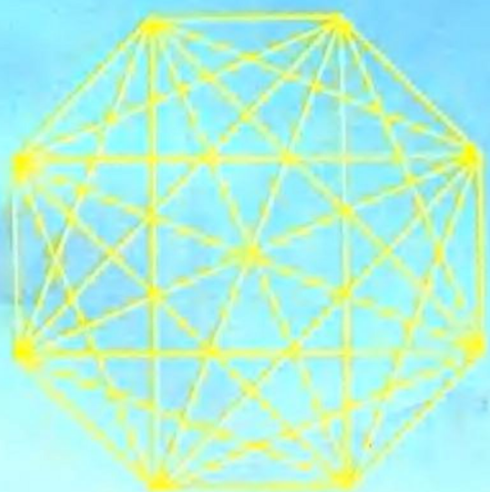
组合分析的
原理　方法　技巧

张镜莲　李少辅
王跃进　冯秀峰　徐惠文



河南大学出版社

组合分析的
原理　方法　技巧

张镜莲　李少辅
王跃进　冯秀峰　徐惠文

河南大学出版社

(豫)新登字 09 号

组合分析的原理　方法　技巧

张镜莲　李少辅
王跃进　冯秀峰　徐惠文

责任编辑　王慧

河南大学出版社出版
(开封市明伦街 85 号)
河南省新华书店发行
河南大学出版社电脑排版
郑州商城印刷厂印刷

开本:850×1168　毫米 1/32　印张:6.5　字数:163 千字
1994 年 6 月第 1 版　1994 年 6 月第 1 次印刷
印数:1－2000　　　定价:3.80 元

ISBN 7－81041－066－0/O·78

内 容 提 要

本书以组合分析的原理、方法和技巧为主线来研究各种组合问题。

第一章介绍了基本计数方法、折线法、设置隔墙法和通常的排列、组合和占位问题。第二章介绍了容斥原理和反演技巧及其在复杂组合问题中的应用。第三章建立了递推关系的一般理论，给出了各种递推关系的解法。第四章介绍了母函数理论，并用它解决各种带限制条件的计数问题。第五章介绍了组合分析中的几个著名组合数。第六章介绍了抽屉原则，并给出了一般形式的Ramsey定理的完整证明及其应用。

前　言

组合分析又称组合数学，它是一门有着悠久历史的数学学科。组合分析中一些简单的原理和方法已为人们所了解，但近数十年来，由于计算机科学、数字通讯理论、最优化理论、运筹学与试验设计等学科的发展，提出了许多新的组合问题，有力地推动了这门学科的发展，它的研究内容也在不断地深入和扩大，这门学科呈现出欣欣向荣的局面。

组合分析所研究的中心问题是计数问题，即按照一定的规则来安排事物，求出符合某种条件的安排的个数。同时它还对某种存在性作出判断，研究保证某种性质存在所需的最低条件以及根据某种标准来寻求最优安排等等。在长期发展过程中，组合分析形成了自己的一些原理，如计数原理、容斥原理、抽屉原则等；也形成了一些较系统和成熟的传统方法，如递推法、母函数法等。尤其是在解决各种比较困难的组合问题中，创造了不少新颖灵活的技巧方法，如设置隔墙法、折线法、反演技巧、不动点法等。这些技巧构思奇妙，别具匠心，是前人智慧的结晶，它使许多看来很复杂的组合问题迎刃而解，令人颇有山穷水复、柳暗花明之感。组合分析不需要很高深的理论基础，但需要机敏与灵巧，可以说组合分析是年轻人的数学。目前各个国家在青年学生中开展的各种层次的数学竞赛，包括国际数学奥林匹克竞赛等，都把组合分析作为他们的题目来源之一。

本书与其它同类的组合数学书籍相比有它自己的特点。首先，本书以介绍组合分析的各种原理、方法与技巧为主要目的，同时也照顾到了组合问题的系统性与完整性。因此在写作时尽量将原理、方法和技巧阐述得透彻些，以使读者能比较容易地掌握它们的思想实质，能应用这些思想方法和技巧去解决组合问题。其次，在本

书中，我们建立了常系数线性递推关系的一般理论，也给出了某些非线性递推关系的解法。我们还叙述了母函数的一般理论，介绍了如何根据实际组合问题建立母函数的方法。在抽屉原则一章中，我们给出了 Ramsey 定理的完整的证明和应用。学习和掌握组合分析的原理、方法与技巧，能够锻炼和提高分析问题与解决问题的能力，对培养思维的机敏能力、拓广思路、开发智力和辅导数学竞赛都有好处。因此，我们有理由期望本书的各类读者，无论是青年学生还是数学教师，都能从本书中得到裨益。

本书是在张镜莲编写的《组合分析》讲义的基础上修改而成的。李少辅、王跃进、冯秀峰参加了修改工作。在修改过程中，对全书各个章节都进行了讨论。突出了组合分析的方法和技巧，汇集了几位作者的教学经验和辅导数学竞赛的经验，增添了一些数学竞赛题目。第一、六章由张镜莲执笔，第二章由徐惠文执笔，第三、四章由王跃进执笔，第五章由冯秀峰执笔。冯秀峰增补了各章题目，王跃进给出了各章题目的解答和提示，最后由李少辅定稿。

由于编者水平所限，难免有不足和疏漏之处，敬请读者批评指正。

编　者

1993. 7. 25.

目　录

第一章　基本计数方法

本章介绍基本的计数方法和一些技巧，并应用它们解决常见的排列与组合问题.

§1　计数的和、积法则

计数问题研究的对象都是有限集. 设 A 是有限集，用 $|A|$ 表示 A 中的元素个数. 通过直接计数，可以得到如下两个基本法则：

定理 1(和则)　若有限集 A 与 B 不相交，即 $A\cap B=\varnothing$，则

$$|A\cup B|=|A|+|B|. \tag{1}$$

定理 2(积则)　设集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，集 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，记

$$A\times B=\{(a_i,b_j):a_i\in A,b_j\in B\},$$

则

$$|A\times B|=mn. \tag{2}$$

这两个定理就是通常所说的加法原理和乘法原理.

根据定理 2 可以导出排列与组合的基本公式.

从 n 个不同元素中每次取出一个，取出后不放回，连取 m 次，取出的元素按取出的先后次序进行排列，叫做一个 m 元**排列**. 这种排列共有 P_n^m 个，其中

$$P_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1), \tag{3}$$

这个排列数又可记为 $[n]_m$.

从 n 个不同元素中取出 m 个，不论次序，作为一组，叫做一个 m 元**组合**. 这种组合共有 C_n^m 个，其中

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}, \tag{4}$$

这个组合数又可记作$\binom{n}{m}$.

在解决计数问题时，不必死记排列组合公式，而要学会应用和、积法则去分析问题. 现举例说明之.

例 1 用 6 张一角的纸币、4 张一元的纸币和 3 张五元的纸币共能组成多少个币值?

解 每个币值都是由若干张一角的纸币、若干张一元的纸币和若干张五元的纸币来组成的. 各类纸币不同的取法对应不同的币值. 一角的纸币可以取 0 张、1 张、…、6 张，共 7 种取法. 同样地，一元纸币有 5 种取法，五元纸币有 4 种取法. 根据积则，共有

$$(6+1)(4+1)(3+1)=140$$

种取法. 但每种纸币都取 0 张构不成币值，所以用这些纸币能组成的币值有 140－1＝139 个. □

注意： 各类纸币不同的取法对应不同的币值是解决这个问题的重要一步，这个结论是否正确依赖于纸币的张数，例如，如果有 5 张一元的纸币，此结论就不成立了. 因为“币值 5 元”可以用 5 张一元纸币组成，也可以用 1 张五元纸币组成. 这时各类纸币不同的取法，有可能对应同一个币值，问题就复杂了.

例 2 设 p,q,r,s 都是质数，自然数 N 的质因数分解式为

$$N=p^n q^m r^k s^l, \qquad (n,m,k,l \text{ 为正整数})$$

求自然数 N 有多少个正因数?

解 N 的每个正因数都是 p,q,r,s 的若干次方幂的连乘积. p 的方幂有 $p^0,p,p^2,\cdots,p^n$ 共 $n+1$ 个. 同样，q 的方幂有 $m+1$ 个，r 的方幂有 $k+1$ 个，s 的方幂有 $l+1$ 个. 根据积则，N 的正因数的个数为

$$(n+1)(m+1)(k+1)(l+1). \quad \square$$

例 3 设集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，集合 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$. 问

从集合 A 到集合 B 的映射能建立多少个?如果 $m=n$,那么 A 与 B 之间的一一对应能建立多少个?

解 要建立一个映射,必须使集合 A 中的每一个元素在集合 B 中都有一个且只有一个象. 由于 B 中有 n 个元素,于是给 A 中的每一个元素选择象的方法皆有 n 种. 根据积则,从 A 到 B 的映射能建立 n^m 个.

如果 $m=n$,A 与 B 之间就可建立一一对应. 而一一对应首先是个映射,并且要求 A 的不同元素在 B 中的象也不相同. 对元素 a_1 而言,它在 B 中选择象的方法有 n 种. 当 a_1 的象确定之后,元素 a_2 在 B 中选择象的方法只有 $n-1$ 种. 以此类推,于是 A 与 B 之间建立一一对应的方法仅有$n!$ 种. □

例 4 从六个数字 0,1,2,3,4,5 中选取四个不同数字构成四位整数. 如果将所能构成的四位整数由小到大排列,问第 73 个整数是什么?

解 因为 0 不能作首位,故最小的整数其首位上的数字只能是 1. 而以 1 为首的四位整数只有 $P_5^3=60$ 个,以 2 为首的整数也有 60 个,于是第 73 个整数必以 2 为首,且排在以 2 为首的整数中的第 13 个位置上. 第 2 位上最小的数字可以是 0,而前两位是"20"的整数有 $P_4^2=12$ 个. 于是第 73 个整数的前两位只能是"21". 并且该整数是以"21"为前两位的整数中的最小的,所以此数为 2103. □

在组合分析中,计数的和、积法则是最重要和最基本的两个法则. 除此之外,在组合分析中还经常应用一个基本原理,即若集合 A 与集合 B 能建立一一对应,则$|A|=|B|$. 当集合 A 的元素个数难以直接计算时,往往将问题转化,设法寻找一个集合 B,它与 A 成一一对应,并且容易计数,根据上述基本原理,B 的元素个数即为 A 的元素个数. 许多较难的组合问题都是通过这样的道路才得以解决的.

例 5 一个凸 n 边形($n\geqslant 4$). 它的任何三条对角线都不相交于一点,问它的所有对角线在 n 边形内部有多少个交点?

解 因为每个交点只有两条对角线通过,这两条对角线连系着 4 个顶点,于是每个交点对应着一个 4 个顶点的组合,不同的交点对应不同的组合. 反之,每 4 个顶点的组合对应着一个交点. 这样一来,交点与顶点的 4 元组合之间可建立一一对应,而从 n 个顶点中取出 4 个顶点的组合有 C_n^4 个,于是交点有 C_n^4 个. □

例 6 n 个选手参加乒乓球比赛,每赛一场败者即被淘汰,而胜者必须继续参加比赛直到选出冠军为止. 问总共进行了多少场比赛?

解 因每赛一场必淘汰一人,故比赛场次与被淘汰的人一一对应. 而要选出冠军,必须淘汰 $n-1$ 个人,故总共进行了 $n-1$ 场比赛. □

在结束本节时,我们顺便提一下环状排列问题. 将 n 个不同元素排在一个圆周上,称为**环状排列**,而前面提到的排列称为**线状排列**. 二者的不同之处在于,线状排列有首尾之分,而环状排列则无此区别. 只要左右元素相同,不管在圆周上的位置如何,都视为是同一个环状排列. 即环状排列只考虑元素之间的相对位置,而不考虑它们在圆周上的绝对位置. 因此,可以将某个元素放在圆周的固定位置上不动,只让其余 $n-1$ 个元素在其余 $n-1$ 个位置上进行排列. 由于其余 $n-1$ 个位置不相连,有首尾之分,就成为线状排列了. 所以 n 个不同元素的环状排列,可以转化成 $n-1$ 个元素的线状排列,这种排列有 $(n-1)!$ 个. 以后凡是遇到环状排列我们都采取这种分析方法.

§2 折线法与反射原理

我们先从数 C_n^m 谈起. 组合数 C_n^m 的最基本意义是从 n 个不同

元素中取出 m 个元素所得到的不相同的 m 元组合的个数. 但它还有另一个组合学意义,它又表示两类元素全排列的个数.

定理 1 有两类元素,一类是 m 个 0,另一类是 $n-m$ 个 1,同类元素之间是无区别的. 将这两类元素进行全排列,则所得到的不同的全排列有 C_n^m 个.

证明 这两类元素共有 n 个,全排列时要占 n 个不同位置. 从 n 个位置中选取 m 个位置放置 0,其余的位置放置 1,即得到一个全排列,而且选取的位置不同,得到的全排列也不同. 于是全排列与 n 个位置的 m 元组合之间建立了一一对应. 故全排列数有 C_n^m 个. □

本定理又可作如下解释:若 n 个元素互不相同时,则全排列有 $n!$ 个. 当元素 1 的位置固定后,m 个 0 的放法有 $m!$ 种. 但现在 m 个 0 是相同的,这 $m!$ 种放法只能算作一种,故应将 $n!$ 除以 $m!$. 同理,由于 $n-m$ 个 1 也是相同的,故应再除以 $(n-m)!$,于是全排列数应为

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}=C_n^m.$$

有许多著名的组合问题是与两类元素全排列有关的. 请看下例.

例 1 戏院售票处有 $2n$ 个人在排队买票. 票价五元. 有 n 个人持的是面值为五元的纸币,另 n 个人持的是面值为拾元的纸币. 在开始售票时,票房无零钱可找. 将这 $2n$ 个人进行全排列,问有多少种排列方法使得每个人都不等待找钱?

分析 实际上,这个问题并不是 $2n$ 个人的排列问题,而是一种有限制条件的两类元素的全排列问题. 将 n 个五元纸币与 n 个拾元纸币进行全排列有 C_{2n}^n 种方法,但其中有些全排列需要等待找钱. 例如,以拾元纸币为首位的排列,第一个人就需要等待找钱. 可以想到至少有一个人等待找钱的排列还有很多,必须将这些排列

去掉才行．但是如何计算等待找钱的排列个数呢？在组合分析发展的历史上，为了解决这个问题，提出了一个很有启发性的方法，称为**折线法**．现介绍如下：

在平面上建立直角坐标系．从坐标轴开始用间隔为1的横线和竖线将平面界成许多小方格，在横轴上横坐标为$1,2,\cdots,2n$的点表示$2n$个人，坐标原点表示票房没有售票时的状态．从原点O出发，若第一个人持五元纸币，在右边的小方格中画一个斜上方的对角线；若第一个人持拾元纸币，画一个斜下方的对角线．然后从新的位置出发，对第二个人按同样规则接着画斜对角线．按此方法，就可以得到一条以原点O为起点，以点$A(2n,0)$为终点的折线（如图1－1）．

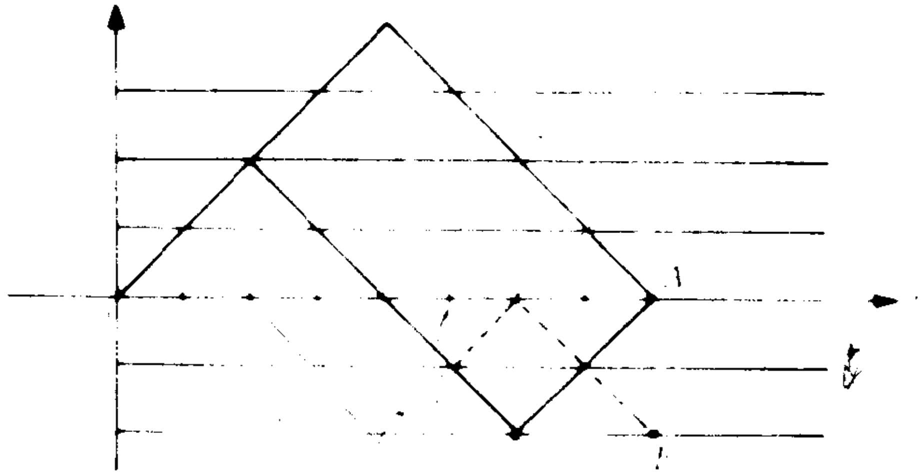


图1－1

容易看出，每条折线有n段斜上对角线和n段斜下对角线所组成，这种折线有C_{2n}^{n}条，正好与两类纸币的全排列成一一对应．当折线与x轴相交时，表示在此之前五元纸币与拾元纸币张数相等；当折线与$y=-1$的横线l相接或相交时，表示在此之前，拾元纸币的张数已经超过五元纸币的张数，因此必须有人在等待找钱．所以，等待找钱的排列所对应的折线必与横线l相接或相交，如图1－1中的折线(b)；而不等待找钱的排列所对应的折线则与l不接触，如图1－1中的折线(a)．

为了计算等待找钱的排列的个数，就需要将它们所对应的折线从众多的折线中分离出来．为此目的可利用反射的办法，当折线首次与 l 接触时，将此折线在接触点以后的部分关于 l 进行反射．反射以后的折线仍以原点 O 为起点，但却以点 $B(2n,-2)$ 为终点．容易算出，这种折线有 $n-1$ 个上升段，有 $n+1$ 个下降段．所以这种折线有 C_{2n}^{n-1} 个（根据定理 1）．

于是不等待找钱的排列数为

$$C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n-1}=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}. \quad \square$$

上述例子清楚地说明了折线法的思想及其在解决组合问题时所起的作用，在应用折线法时，必须会计算两个整点间能够连接的折线个数和反射原理．我们总结出如下两个定理．

定理 2　设 $A(m,a)$ 和 $B(n,b)$ 是平面上的两个整点，$n>m$．A 与 B 能够用折线相连的条件是

$$n-m\geqslant|b-a|,\qquad n-m\equiv b-a\pmod{2}. \tag{1}$$

当此条件满足时，A 与 B 之间可以连接 C_{n-m}^{α} 条折线，其中

$$\alpha=\frac{(n-m)+(b-a)}{2}.$$

证明　若 A 与 B 能够用折线相连，其折线必定不止一条．这些折线必有同样多的上升段，也必有同样多的下降段．设有 x 个上升段，y 个下降段，则

$$\begin{cases}x+y=n-m,\\ x-y=b-a.\end{cases}$$

解之可得

$$x=\frac{(n-m)+(b-a)}{2}=\alpha,$$

$$y=\frac{(n-m)-(b-a)}{2}.$$

条件(1)保证了 x 与 y 都是非负整数，因而 A 与 B 可用折线

连接. 再由定理 1 即得折线有 $C_{n\ \ m}^{x}=C_{n-m}^{a}$个. □

定理 3(反射原理) 设点 A 与 B 皆在横线 l 的同侧，点 C 与 B 关于 l 对称. 如果 A 与 C 可用折线相连，则 A 与 B 也可用折线相连，并且连接 A 与 B 的折线中触到或穿过 l 的折线个数等于从 A 到 C 的折线个数.

证明 从 A 到 C 的折线必与 l 相交. 从第一个交点起，将折线的以后部分关于 l 进行反射，就得到从 A 到 B 的一条折线，且此折线必与 l 接触或相交，因而 A 与 B 可用折线相连. 反之，从 A 到 B 的折线若与 l 接触或相交，经过如上的反射之后，必可得到一条从 A 到 C 的折线，因此二者之间可以建立一一对应，所以个数相等. □

注: 反射的方法可以改变，将第一个接触点前面的折线部分进行反射也可得到同样的结论.

下面的例子是著名的选票问题，它首先由伯川(J. L. F. Bertrand)于 1887 年解决.

例 2 在一次选举中，候选人 A 得到 a 张选票，候选人 B 得到 b 张选票，$a>b$. 现将选票排列后一张一张地计数统计，问有多少种排列方法使得在每一时刻 A 得到的选票数都多于 B 得到的选票数?

解 用斜上对角线表示 A 的选票，斜下对角线表示 B 的选票，从(0,0)点出发作折线，则此折线的终点是点$(a+b,a-b)$. 如图 1-2 所示. 选票的每种排列都对应一条折线，而所要求的排列对应的是除(0,0)点外不再与 x 轴接触的折线. 这种折线必须经过(1,1)点，因此可以只考虑从(1,1)点出发的折线.

由定理 2 可知，从(1,1)点到$(a+b,a-b)$点的全部折线，包括与 x 轴接触或相交的折线共有 C_{a+b-1}^{a-1}条. 如果折线与 x 轴接触或相交，从第一个交点处，将前面的折线部分关于 x 轴反射，所得到的折线必过(1，-1)点，而终点不动. 由定理 3 与定理 2 可知，从

(1,1)点出发碰到 x 轴的折线有 C_{a+b-1}^{a} 条，于是碰不到 x 轴的折线个数为

$$C_{a+b-1}^{a-1}-C_{a+b-1}^{a}=\frac{a-b}{a+b}C_{a+b}^{a}.\qquad\square$$

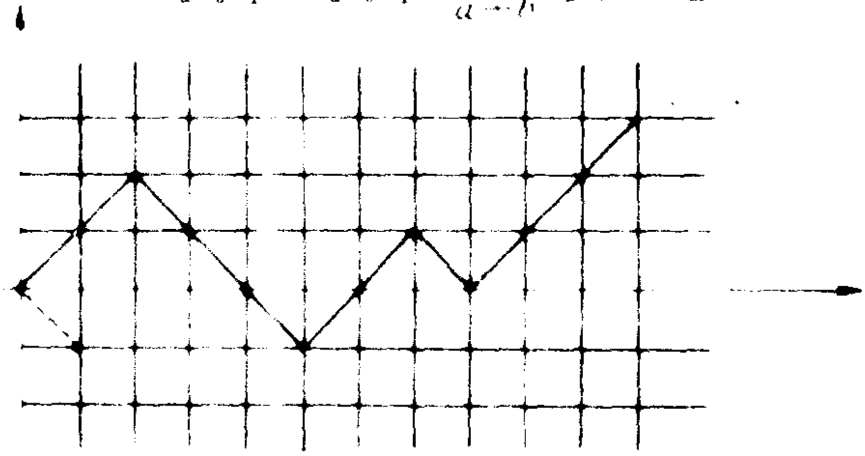


图 1-2

§3 分组与分堆

本节将组合数 C_n^m 加以推广，首先研究固定分组问题.

定理 1 将 n 个不同元素分成 r 个带有固定编号的组：A_1，A_2，…，A_r，使得 A_1 中有 n_1 个元素，A_2 中有 n_2 个元素，…，A_r 中有 n_r 个元素. 其中 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$，则分组方法有

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}\tag{1}$$

种，此数简记作 $\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}$.

证明 先从 n 个不同元素中取出 n_1 个作为 A_1，共有 $C_n^{n_1}$ 种取法. 再以剩下的 $n-n_1$ 个元素中取出 n_2 个作为 A_2，这一步有 $C_{n-n_1}^{n_2}$ 种取法. 如此继续下去，最后剩下的 n_r 个元素作为 A_r. 根据积则，则固定分组方法共有

$$C_n^{n_1}C_{n-n_1}^{n_2}\cdots C_{n_r}^{n_r}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}\text{ 种}.\qquad\square$$