置换群与组合结构

【英】诺·比格斯 阿·怀特著　赵春来译

置换群与组合结构

诺·比格斯
阿·怀特 著

赵春来 译

北京大学出版社

内 容 提 要

本书是英国剑桥大学数学系高年级学生和研究生教材。篇幅虽不大，但内容丰富，阐述精炼，引人入胜。书中深入浅出地介绍了置换群、有限几何、设计、群和图、地图等内容，每章后面的课外题为读者进一步学习提供了极好的帮助。读者只要具有抽象代数和有限群论的基础知识即可阅读此书。

本书可作为大学数学系高年级学生和研究生教材，也可供数学工作者参考。

N. L. Biggs and A. T. White
PERMUTATION GROUPS AND COMBINATORIAL STRUCTURES CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS 1979

置换群与组合结构

赵春来　译
责任编辑：王明舟

*

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

787×1092毫米　32开本　5.375印张　123千字
1987年12月第一版　1987年12月第一次印刷
印数：00001—3,600册
统一书号：13209·184　定价：1.60元

前　言

这本书的目的是代替我们原来的那本书《有限自同构群》（"Finite Groups of Automorphisms" (No.6 in the L. M. S. Lecture Note Series)）。原来的那本书至今仍有很大的需要量。正是由于这一点，我们决定对那本书进行全面的修订，这比再版要更好一些。我们希望通过这次修订，能把这些年来的教学经验和读者对原书的修改意见体现出来，同时介绍一些新的资料，以使得新书能够合于时代的要求。

全书都重新改写了。第一、二、三章的某些部分编排得更紧凑了；在另外一些部分(特别是1.5，1.6，2.4，2.5，3.4，3.5各节)对所述内容采取了与原来不同的处理方法。第四章(群和图)的观点是新的，即从置换群的图表示入手。邻接矩阵的代数理论仅被应用于强正则图，因为这个理论在更复杂的图上的推广在其它书（第四章的参考文献[1]）中已有讨论。关于 Higman-Sims 群的篇幅大大增加了。第五章(地图)完全是新的。我们希望这本书的内容能够使读者对于一个体现了数学各个领域的思想的题材产生新的兴趣。

我们力图使本书能够成为高年级大学生和研究生的合适的教材。为此，我们在书中编入了十三节"课外题目"。这些题目可以用来检验学生们是否真正理解了教材，其中有些题目在以后的几章中偶而会用到(请见后面的注释)。

在这里，我们对那些同事们表示衷心的感谢。他们从1978年1月到3月每周一次来到在皇家霍洛威学院举行的关于本书内容的研究小组，进行讨论。他们提供了宝贵的支持。同时，我们也从其它一些学者那里得到了许多有益的意见和建议，这些学者中包括P. J. Cameron, A. D. Cardiner和W. M. Kantor。Cadiner博士的帮助使得第1.5，3.7和4.6节有了重大的改进。最后，我们感谢I.M.James教授的鼓励和剑桥大学出版社的大力支持。

关于“课外题目”的注释

这些题目并不是通常的习题，它们都是很大的题目。一般来讲，在一个课外题目上学生可能要花上几天时间，也可能不得不求助于许多书籍、同学以至老师。可能没有哪个学生会有足够的时间作完所有这些题目，但是熟悉一下这些题目中的结果也将是有益的。有些题目上加了星号，这表示它们或者很难，或者太费时间。

目　录

第一章 置 换 群

“如果这本书能够唤起英国数学家们对于一个越钻研越令人着迷的纯数学分支的兴趣，我将会感到非常满意。”

摘自 W·Burnside 的《Theory of Groups of Finite order》一书的序言。

1.1 预 备 知 识

本节的内容我们认为读者应当是熟悉的。读者可以很快地读完这一节，主要目的是使自己能够习惯于全书通篇都要用到的一些符号。

设X是一个有限集合。所谓X的一个**置换**是指X到自身的一个一一对应（即双射）α：$X\to X$。两个这样的置换α，β可以合成为一个新的置换$\alpha\beta$：$X\to X$，其定义为

$$\alpha\beta(x)=\alpha(\beta(x)),$$

这就是说，我们把函数符号写在左边，而按照通常习惯的顺序进行合成。X的所有置换组成的集合在这种合成运算下构成一个群，记为$\mathrm{Sym}(X)$，称为X上的**对称群**。如果X是集合$\{1,2,\cdots,n\}$，我们就用记号S_n代替$\mathrm{Sym}(X)$。不难看出$|S_n|=n!$，这里$|\ \ |$表示基数。

如果G是$\mathrm{Sym}(X)$的一个子群，我们就把有序对(G,X)称为一个$|X|$**次的置换群**，并且说G**作用在**X**上**。更一般

地，如果由一个群G到$\mathrm{Sym}(X)$内有一个同态$g\mapsto\hat{g}$，我们则称这个同态是G的一个**置换表示**；如果这个同态是单射，我们就说这个置换表示是**忠实的**。在这种情形下，我们常常把G与它在$\mathrm{Sym}(X)$中的像等同起来，于是就重新回到置换群的情形了。

$\mathrm{Sym}(X)$中的任一置换α可以分解为一些**无缘的轮换**的合成（所谓“无缘的”，意即不同的轮换中不含有相同的元素）：

$$\alpha=(a_1\ a_2\ \cdots\ a_k)(b_1\ b_2\ \cdots\ b_l)\cdots$$

这个记号的含意是

$$\alpha(a_1)=a_2,\alpha(a_2)=a_3,\cdots,\alpha(a_k)=a_1,$$

依此类推。α的这种分解在本质上是唯一的，即α的不同分解仅可能有各个轮换先后顺序的差别。两个元素构成的轮换$(a\ b)$被称为一个**对换**。不难验证，轮换$(x_1\ x_2\ \cdots\ x_r)$等于对换的合成：

$$(x_1\ x_r)(x_1\ x_{r-1})\cdots(x_1\ x_2)。$$

由此可知，任一置换都可以表示为一些对换的合成（当然这些对换不一定是无缘的）。这种表示法并不是唯一的。但是，若有

$$\alpha=\tau_1\tau_2\cdots\tau_k=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_l$$

（这里τ_i与σ_j都是对换），则必有

$$k\equiv l(\mathrm{mod}\ 2)。$$

当$k\equiv0(\mathrm{mod}\ 2)$时，我们称$\alpha$为**偶置换**，并记为$\mathrm{sgn}(\alpha)=1$；而当$k\equiv1(\mathrm{mod}\ 2)$时，我们称$\alpha$为**奇置换**，并记为$\mathrm{sgn}(\alpha)=-1$。这里的函数sgn实际上是由$\mathrm{Sym}(X)$到乘法群$\{-1,1\}$的一个同态。此同态的核（即所有偶置换的集合）是$\mathrm{Sym}(X)$

的一个正规子群。这就是所谓的**交错群**，记为 $\mathrm{Alt}(X)$。S_n 的交错子群用 A_n 表示。容易看出

$$|\mathrm{Sym}(X):\mathrm{Alt}(X)|=2,\quad |A_n|=n!/2.$$

如果 α 和 π 都是 X 的置换，并且 α 有前面给出的轮换分解式，则

$$\pi\alpha\pi^{-1}=(\pi a_1\ \pi a_2\ \cdots\ \pi a_k)(\pi b_1\ \pi b_2\ \cdots\ \pi b_l)\cdots.$$

我们称 $\pi\alpha\pi^{-1}$ 为 α 在 π 下的**共轭元**。$\mathrm{Sym}(X)$ 中的两个元素在 $\mathrm{Sym}(X)$ 中是共轭的当且仅当它们的无缘轮换分解式形状相同。所以，S_n 中共轭类的个数恰好等于集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的不同划分方法的数目。例如，在 S_5 中，我们有

划分	共轭类代表	类中元素个数
1,1,1,1,1	幺元	1
1,1,1,2	(1 2)	10
1,1,3	(1 2 3)	20
1,4	(1 2 3 4)	30
5	(1 2 3 4 5)	24
1,2,2	(1 2)(3 4)	15
2,3	(1 2)(3 4 5)	20
		120 = 5!

在这里，按照常例，我们没有写出长度为 1 的轮换。

1.2 计数原理

组合数学的一个基本技巧是：用两种不同的方法计算同一个集合中元素的个数，然后把所得的两个结果列成等式。

准确地说，设U和V是两个有限集，S是$U\times V$的一个子集。定义

$$S(a,\cdot)=\{v\in V\mid(a,v)\in S\},$$
$$S(\cdot,b)=\{u\in V\mid(u,b)\in S\}.$$

则$S(a,\cdot)$与S中由那些$u=a$的有序对(u,v)组成的子集之间有一个自然的一一对应。当a取遍U中的元素时，这些子集恰好拼成S。对$S(\cdot,b)$也有类似的结果。所以，我们有

1.2.1 $$|S|=\sum_{a\in U}|S(a,\cdot)|=\sum_{b\in V}|S(\cdot,b)|.$$

如果在某种情况下，我们可以证明

$$|S(a,\cdot)|=r\text{ 及 }|S(\cdot,b)|=s$$

与a，b无关，则有

1.2.2 $$r|U|=s|V|.$$

我们把这种方法应用于置换群(G,X)上。现在引入一个临时性的记号：

$$G(x\mapsto y)=\{g\in G\mid g(x)=y\}.$$

我们可以在X上定义一个等价关系：x与y等价当且仅当$G(x\mapsto y)$非空(容易验证这确实是一个等价关系)。以Gx表示x所在的等价类。如果$y\in Gx$，则存在$g_0\in G(x\mapsto y)$，借助g_0，就可以建立下面的一一对应：

$$G(x\mapsto x)\longleftrightarrow G(x\mapsto y),$$
$$h\longleftrightarrow g_0h.$$

现在应用上面的计数原理：在X中取定一个点x，以P_x表示$G\times X$中那些满足$y=g(x)$的有序对(g,y)组成的子集，则$P_x(\cdot,y)$就恰好是$G(x\mapsto y)$。于是

$$|P_x(\cdot,y)| = \begin{cases} |G(x\mapsto x)|, & \text{如果 } y\in Gx, \\ 0, & \text{如果 } y\notin Gx. \end{cases}$$

又对于任一 $g\in G$，总有 $|P_x(g,\cdot)|=1$，故由公式1.2.2，有

1.2.3 $|G(x\mapsto x)||G_x| = |G|$.

这个等式是置换群论中的一个基本关系式。集合 Gx 称为 x **的轨道**，$G(x\mapsto x)$ 称为 x **的稳定子群**——它是 G 的一个子群，通常记为 G_x。于是等式1.2.3就变成了

1.2.4 $|Gx| = |G:G_x|$.

下面我们考虑如何计算 G 在 X 上作用的轨道数。下面的定理将给出用所谓**不动点集** $F(g)$（即满足 $g(x)=x$ 的所有 x 组成的 X 的子集）计算轨道数的公式。这个定理通常被称为“伯恩赛德引理”(Burnside's Lemma)，尽管它源自弗若宾纽斯(Frobenius)。

1.2.5 **定理** 以 t 表示 (G,X) 的轨道数，则

$$t|G| = \sum_{g\in G}|F(g)|.$$

证明 令 $E=\{(g,x)\in G\times X \mid g(x)=x\}$，则

$$E(g,\cdot)=F(g),\quad E(\cdot,x)=G_x.$$

应用计数原理1.2.1，我们得到

$$\sum_{g\in G}|F(g)| = \sum_{x\in X}|G_x|.$$

现在令 $x_1,x_2,\cdots,x_t$ 分别为 t 条轨道的代表。如果 x 属于轨道 Gx_i，且 g 是 $G(x\mapsto x_i)$ 的任一元素，则容易看出 x 的稳定子群 G_x 是 $g^{-1}G_{x_i}g$。由此知 $|G_x| = |G_{x_i}|$。于是我们可以合并上式右端的相等的项，得到

$$\sum_{g\in G}|F(g)| = \sum_{i=1}^{t}\sum_{x\in G_{x_i}}|G_x|$$

$$= \sum_{i=1}^{t}|G_{x_i}||G_{x_i}|$$

$$= \sum_{i=1}^{t}|G| \quad \text{(应用了公式1.2.4)}$$

$$= t|G|. \ \blacksquare$$

例如，以 $X=\{1,2,3,4\}$表示一个正方形 按右旋方向排列的四个顶点。令 $G=D_8$(即 8 阶二面体群)，它可以看作是平面上的某些旋转和反射，从而成为X上的一个置换群。群 G 的元素 g 以及相应的不动点集的基数$|F(g)|$如下：

g:	幺元	(1 3)	(2 4)	(1 3)(2 4)	(1 2 3 4)
$\|F(g)\|$:	4	2	2	0	0

g:	(1 4 3 2)	(1 2)(3 4)	(1 4)(2 3)
$\|F(g)\|$:	0	0	0

于是 $t=(1/8)(4+2+2)=1$，即(G,X)只有一条轨道。

1.3 传 递 性

1.3.1 定义 如果X在G的作用下只有一条轨道，则称置换群(G,X)是传递的。

我们可以应用伯恩赛德引理去检验一个给定的置换群是否是传递的（就像在上节末尾那样）。另一个更直接的方法是选定X的一个元素 x，然后对X中的任一元素 y，寻找G中能把 x 变到 y 的元素。在上节末尾的例中，置换(1 2 3 4)

及其方幂就能把 1 变到X中所有的点。请注意，在(G, X)是传递群时，上节所得到的基本的公式 1.2.4 和 1.2.5 变成了

1.3.2 $|X| = (G:G_x)$，$|G| = \sum_{g\in G} |F(g)|$。

现在我们考虑G_x在X上的作用。

1.3.3 定理 设(G,X)是传递的。以$r(x)$表示G_x在X上的轨道数，则

$$r(x)|G| = \sum_{g\in G} |F(g)|^2,$$

且$r(x)$与x的选择无关。

证明 由伯恩赛德引理1.2.5，我们有

$$(*) \qquad r(x)|G_x| = \sum_{g\in G_x} |F(g)|.$$

此式右端恰好是集合$\{(g,w)|g\in G_x, g(w)=w\}$的基数。对于任一$y\in X$，上述集合与$\{(k,z)|k\in G_y, k(z)=z\}$之间有一个一一对应：$(g,w)\longleftrightarrow(hgh^{-1},h(w))$，其中$h$是$G$中使得$h(x)=y$的任一元素。由此即知(*)式右端与$x$无关。又由于$|G| = |X||G_x|$，故有

$$r(x)|G| = r(x)|X||G_x| = \sum_{x\in X}\sum_{g\in G_x} |F(g)|.$$

交换此式右端二重求和的次序，我们得到

$$r(x)|G| = \sum_{g\in G}\sum_{x\in F(g)} |F(g)| = \sum_{g\in G} |F(g)|^2.$$

由于此式右端与x无关，故$r(x)$也与x无关。 |

1.3.4 定义 传递群(G,X)的秩定义为G_x在X上的轨

道数。

在前面提到的D_8作用于正方形四个顶点的例中，我们有$r=(1/8)(4^2+2^2+2^2)=3$。顶点1的稳定子群的轨道为$\{1\},\{2,4\}$和$\{3\}$。

我们特别感兴趣的是$r=2$的情形。此时G_x在$X-\{x\}$上是传递的。由此不难推知，X的任意两个元素构成的有序对总可以由G中的某个元素变到任意指定的另外一个有序对。把这种情形加以推广，我们有下面的定义：

1.3.5 定义 如果对于任意两个由X中的k个不同元素构成的有序组$(x_1,\cdots,x_k)$和$(y_1,\cdots,y_k)$，总存在G中的某个元素g，使得

$$g(x_i)=y_i,\quad \forall i=1,\cdots,k,$$

则称置换群(G,X)是k**重传递的**。

显然，如果$1\leqslant l\leqslant k$，则一个k重传递群也必是l重传递群。通常我们说G在X上是k重传递的，实际上意味着k是传递重数中的最大者。我们把$k(\geqslant 2)$重传递群统称为**多重传递群**。不难看出，多重传递群的秩为2。在多重传递群的情形，不动点公式1.2.5和1.3.3变成了

$$|G|=\sum|F(g)|,\quad 2|G|=\sum|F(g)|^2.$$

下面的引理将有助于判定或构造多重传递群。

1.3.6 引理 设G是X上的传递群。则(G,X)是k重传递的当且仅当$(G_x,X-\{x\})$是$(k-1)$重传递的。

证明 我们先证明充分性。设G_x在$X-\{x\}$上是$(k-1)$重传递的。对于任意给定的由X中不同元素构成的两个k元有序组$(x_1,\cdots,x_k)$和$(y_1,\cdots,y_k)$，我们可以在G中选取两个元素g_1,g_2，并在G_x中选取h，使得

$$g_1(x_1)=x,\quad g_2(y_1)=x,$$
$$h(g_1(x_i))=g_2(y_i),\quad \forall i=2,\cdots,k.$$

于是 $g_2^{-1}hg_1$就把有序组$(x_1,\cdots,x_k)$变到$(y_1,\cdots,y_k)$。这就证明了充分性。必要性的证明是显而易见的。|

这样，为了判定一个置换群(G,X)是否是k重传递群，我们只要逐个地考察 $G_x,G_{xy}=(G_x)_y$ 等等。如果G在X上是k重传递的，并且$|X|=n$，则反复地应用1.3.2的第一个公式，就能得到一个非常有用的结果：

1.3.7 $|G|=n(n-1)\cdots(n-k+1)|\,G_{x_1x_2\cdots x_k}|$，

此式右端的群表示G中保持$x_1,x_2,\cdots,x_k$各点不动的稳定子群。特别地，我们看到G的阶一定被$n(n-1)\cdots(n-k+1)$整除。

如果G在X上是k重传递的，并且G的幺元是保持X中k个点不动的唯一的元素，则(G,X)被称为**精确的k重传递群**。这种群的阶恰好是$n(n-1)\cdots(n-k+1)$。

特别重要的精确传递群是1重传递的。这时我们称G在X上是**正则的**。此时有$|G|=|X|$。事实上，在X中任意取定一个元素x_0以后，映射$g\longleftrightarrow g(x_0)$是$G$与$X$之间的一个一一对应。

1.3.8 定理 在集合$\{1,2,\cdots,n\}(n\geqslant 3)$上，$S_n$是$n$重传递的，$A_n$是$(n-2)$重传递的。

证明 定理的第一个结论是显然的，这因为S_n含有集合$\{1,2,\cdots,n\}$的所有置换。关于交错群A_n的结论，我们用归纳法来证明。当$n=3$时，A_3含有轮换(1 2 3)，所以A_3是1重传递的。由于元素n在A_n中的稳定子群是A_{n-1}，所以，根据引理1.3.6，可知归纳步骤是成立的。剩下的问题