板壳理论

薛大为　编著

北京工业学院出版社

前　言

在工程中大量采用板壳结构，因此板壳理论历来就受到广大科技工作者的重视，也已成了高等学校的课程之一。许多国内外专家，在这一领域内作出贡献，使之日趋广博和完善。在我国，最早作出重大贡献的著名科学家，首推钱伟长和钱学森。钱学森对稳定问题考虑大变形的论述，钱伟长对板壳内靡理论的创立，都曾举世瞩目，至今仍放光彩。

本书为作者在北京工业学院讲授《板壳理论》课的讲稿整理而成，在写讲稿时，参考了国内外有关专著、论文和教材，不少内容，直接取自这些文献。虽然目前张量工具已越来越多地被一些论文的作者所采用，但由于工程界还未及普遍熟悉这一方法，所以本书未按张量的方式书写，这就限制了在本书中介绍一些很精彩的内容。我们相信，熟悉了本书的内容，要进一步研究板壳理论，是不难的。

由于时间仓促以及限于学术水平，本书中的缺点乃至错误在所难免，尚祈广大学人，惠予指正。

薛大为

1987年2月于北京工业学院

内 容 简 介

本书介绍了板和壳体的基本理论和计算方法。为了便于工程实际应用，内容侧重于弹性板和壳的工程理论。同时，对塑性范围内的一些问题以及大变形问题、夹层板壳问题、精确理论问题、冲击问题、变分原理问题等，均作了一定程度的阐述。一些内容是初次收入书籍；有的内容是第一次发表于本书；书中注意介绍了我国学者的部分成果。

本书可供军工、力学、土建、水利、机械、化工、造船、航空等专业的设计和科研人员参考，也可作为上述专业的高年级大学生和研究生的教本和教学参考书。

板 壳 理 论

薛大为　编著

•

北京工业学院出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

通县向阳印刷厂印刷

•

850×1168毫米　32开本　13.75印张　354千字

1988年6月第一版　1988年6月第一次印刷

ISBN7-81013-011-0 O·2

印数：1—3500册　定价：3.45元

目 录

第一章 弹性薄板弯曲的工程理论及其经典解法

§1.1 基本概念及假定

如两表面关于某一平面为对称，则由此两表面与垂直于该平面的柱面或棱柱面所围成的片状结构称为板。称此平面为板的中面；称垂直于中面的两表面对应点之间的距离为板厚；板厚可以是变量或常量。如板厚远小于中面的最小尺寸(例如，小于中面最小尺寸的1/8)，则称为薄板，薄板在工程上有广泛的应用。

作用于板上的外载，一般可分为沿中面及垂直于中面两部分，前者对板的作用常按平面应力问题处理，后者则一般是薄板弯曲理论所研究的对象。

取板的中面为 xy 平面，z 轴垂直于中面且与 xy 轴形成右手螺旋(图1.1)，则板的工程理论所赖以建立的基本假设可陈述如下：

1. 变形前垂直于中面的线段，在板变形后仍垂直于变形后的中面且长度不变。此假设通常称为克希霍夫(Kirchhoff)假设。

2. 薄板中面内各点没有平行于中面的位移。这就是说假设 $u_0=0$ 及 $v_0=0$，其中 u_0 及 v_0 分别为中面上任一点沿 x 轴向及 y 轴向的位移。

3. 应力分量 σ_z、τ_{xz} 及 τ_{yz} 远小于其它三个应力分量 σ_x、σ_y 及 τ_{xy}。

根据假设1，如令 w 为板沿 z 轴向的位移(即板的挠度)，则有

$$w=w(x,\ y) \tag{1.1}$$

又由 $\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$ 可得

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0$$

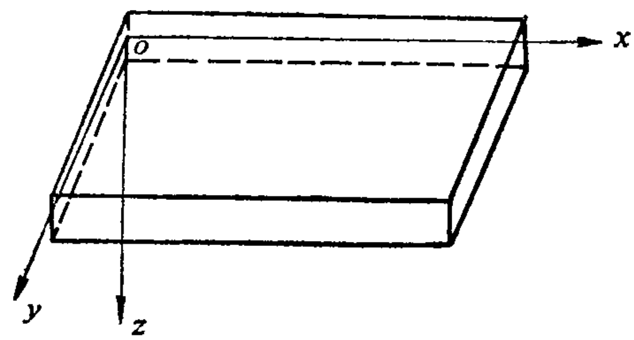

图 1.1

积分上式，得

$$u=-z\frac{\partial w}{\partial x}+u_0(x,\ y), \qquad v=-z\frac{\partial w}{\partial y}+v_0(x,\ y)$$

再根据假定 2，得

$$u=-z\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad v=-z\frac{\partial w}{\partial y} \tag{1.2}$$

由假定 3，得

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y), \qquad \varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x)$$

$$\gamma_{xy}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \tag{1.3}$$

式中 ε_x，ε_y 及 γ_{xy} 为应变分量，E 为杨氏(young)模量，ν 为泊松(Poisson)比；u，v，w 分别为沿 x，y 及 z 方向的位移。

τ_{xz} 及 τ_{yz} 为平衡所必需，不能由 $\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$ 通过虎克(Hooke)定律而等于零。

§1.2 弹性薄板的基本微分方程

由(1.2)式可得

$$
\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = z\chi_x \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = z\chi_y \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2z\chi_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{1.3'}
$$

其中 χ_x、χ_y 及 χ_{xy} 分别为板变形后中面的曲率和扭率。将上式代入虎克定律

$$
\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)
$$

$$
\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)
$$

$$
\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}
$$

得

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\
\sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\
\tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{1.4}
$$

由(1.1)及(1.4)二式显见，三个应力分量均为 z 的线性函数。

注意到(1.4)式，定义单位长度的内力矩为(图1.2)

$$
\left.\begin{aligned}
M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \mathrm{d}z = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\int_{-h/2}^{h/2} z^2 \mathrm{d}z \\
&= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\
&\text{同理} \\
M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \mathrm{d}z = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\
M_{xy} &= M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \mathrm{d}z = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{1.5}
$$

其中

$$
D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}
$$

称为抗弯刚度。

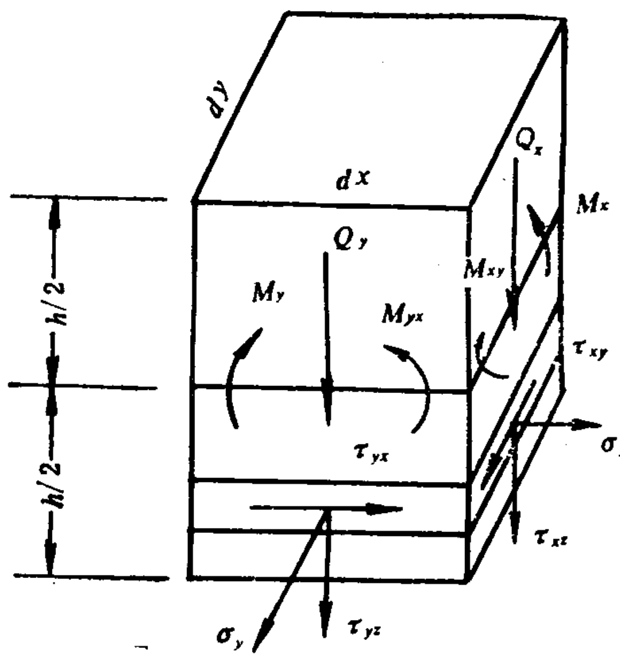

图 1.2

根据弹性力学的微元平衡方程

$$
\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=-\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}-\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}
$$

得[注意到(1.4)式]

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)=\frac{Ez}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w$$

其中

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

为平面拉普拉斯(Laplace)算子。积分上式，得

$$\tau_{zx}=\frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w+f(x,\ y)$$

其中 $f(x,\ y)$为任意函数，但因在 $z=\pm h/2$ 处 $\tau_{zx}=0$，根据此条件由上式确定了函数 f 后，得横剪应力 τ_{zx} 为

$$\left.\begin{aligned}\tau_{zx}&=\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(z^2-\frac{h^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w\\ &\text{同理}\\ \tau_{zy}&=\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(z^2-\frac{h^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w\end{aligned}\right\}\tag{1.6}$$

由(1.6)式可见，横剪应力沿板厚为抛物线分布。

将(1.6)式代入单位长度的横剪力的下述定义式中，得

$$\left.\begin{aligned}Q_x&=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{zx}\mathrm{d}z=-D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w\\ Q_y&=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{zy}\mathrm{d}z=-D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w\end{aligned}\right\}\tag{1.7}$$

取板的一微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$(图1.3)并列出此微元的平衡式，得

$$\left.\begin{aligned}Q_x=\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\ ,\ Q_y=\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}\\ \frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=0\end{aligned}\right\}\tag{1.8}$$

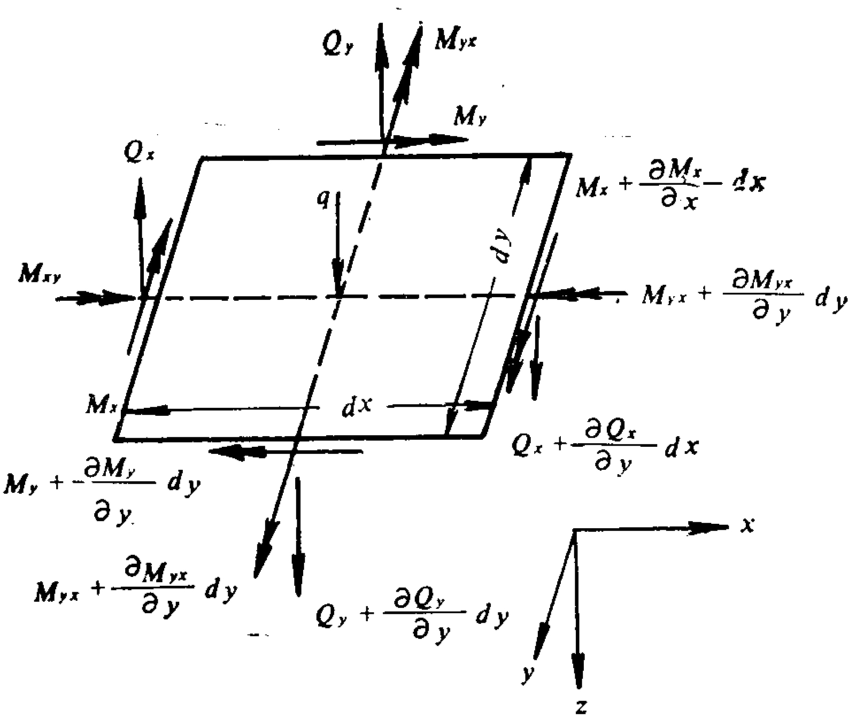

图 1.3

将上式的前二式代入第三式，得

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+q=0 \tag{1.9}$$

将(1.5)式代入上式，得

$$D\nabla^2\nabla^2 w\equiv D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q \tag{1.10}$$

将(1.5)式代入(1.4)式，又将(1.7)式代入(1.6)式，可得

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_x=\frac{12M_x}{h^3}z,\ \sigma_y=\frac{12M_y}{h^3}z,\ \tau_{xy}=\tau_{yx}=\frac{12M_{xy}}{h^3}z\\&\tau_{xz}=\frac{6Q_x}{h^3}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right),\ \tau_{yz}=\frac{6Q_y}{h^3}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

(1.10)式为弹性薄板工程理论的基本方程。结合边界条件解方程(1.10)得出 w 后，由(1.5)式及(1.7)式即可求出板的内力

M_x，M_y，M_{xy}，Q_x及Q_y，再由(1.11)式，即可求出应力分量σ_x，σ_y，τ_{xy}，τ_{xz}及τ_{yz}。

注意到(1.11)式及(1.8)式，由

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=-\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}-\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}=-\frac{6}{h^3}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}\right)$$
$$=\frac{6q}{h^3}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)$$

积分得

$$\sigma_z=\frac{6q}{h^3}\left(\frac{h^2}{4}z-\frac{z^3}{3}\right)+f_1(x,\ y)$$

其中$f_1(x,\ y)$为任意函数。因在$z=h/2$处$\sigma_z=0$，即可求出$f_1=-q/2$，然后再代回上式，得

$$\sigma_z=-2q\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{h}\right)^2\left(1+\frac{z}{h}\right)\tag{1.12}$$

上式正好满足在$z=-h/2$处$\sigma_z=-q$的条件。

§1.3 边界条件

要求解(1.10)式得到挠曲函数w，必须配有边界条件。本节以矩形薄板为例来阐明如何列出边界条件。如图1.4，设板的$x=0$边为简支边；$y=0$边为固支边；$x=a$边及$y=b$边为自由边。

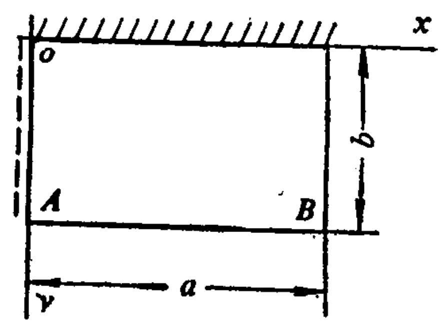

图 1.4

当简支边界处没有外加弯矩时，则有

在$x=0$处：$w=M_x=0$

注意到(1.5)式，上述条件可写成

在 $x=0$ 处：　　$w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$　　(1.13)

如果在简支边 $x=0$ 处有外加弯矩$\overline{M}$，则上述条件 $M_x=0$ 应代以 $M_x=\overline{M}$，它又可写成

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-\frac{\overline{M}}{D}$$

对固支边 $y=0$，显然有

在 $y=0$ 处：$w=0$，$\frac{\partial w}{\partial y}=0$　　(1.14)

对于自由边，例如 $y=b$ 边，如该边上不受外载，则应有

在 $y=b$ 处：$M_y=0$，$M_{yx}=0$，$Q_y=0$

但薄板工程理论的基本微分方程(1.10)是四阶偏微分方程，它只能满足两个边界条件，由此可见，弹性薄板的工程理论从数学提法上就存在着问题。

为了近似地解决这一问题，可以考察任一边界(不一定是自由边界)上所承受的扭矩 M_{yx}。如图 1.5，设在微长 CD 上作用有内力 $M_{yx}\mathrm{d}x$，此内力可近似地认为等价于在 C 处有一集中力 M_{yx} 的作用且在 D 处有的反向的集中力 M_{yx} 的作用。同理，微长 DE 内的内力素$\left(M_{yx}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x$ 可近似地认为等价于在 D 处作用一集中力 $M_{yx}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}\mathrm{d}x$，而在$E$处作用一反向的集中力 $M_{yx}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}\mathrm{d}x$。由此可见，$D$处作用了由扭矩折算的横剪力

$$M_{yx}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}\mathrm{d}x-M_{yx}=\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}\mathrm{d}x$$

这一横剪力的作用范围可以认为等于以 D 处为中心长为 $\mathrm{d}x$ 的区间，因此单位长度上的横剪力为$\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$。由于 D 为边界上任意

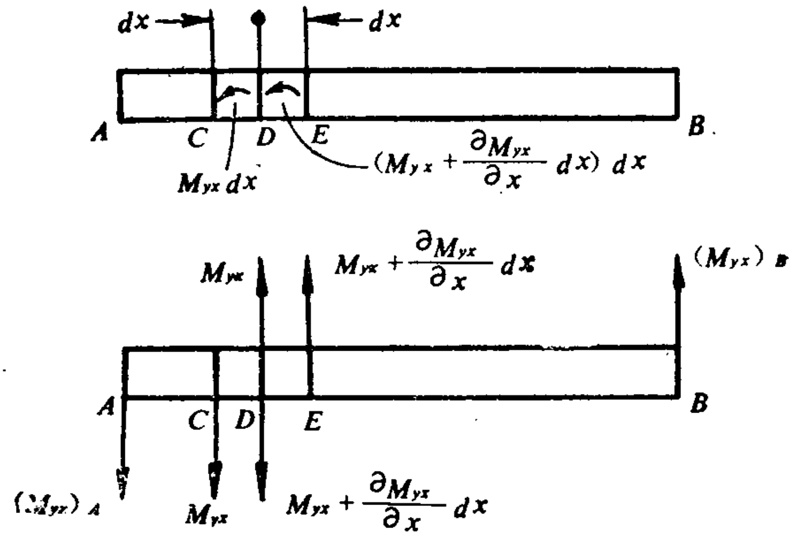

图 1.5

一点，故上述结论对边界上任一点均成立。于是，可以认为有一折算剪力

$$V_y=Q_y+\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \tag{1.15}$$

作用于边界上任一点处。同时我们看到，此时在边界的两端有未被抵消的集中剪力 R

$$R_{AB}=(M_{yx})_A,\quad R_{BA}=(M_{yx})_B \tag{1.16}$$

的作用。

于是，对于自由边界上的边界条件可以近似写成

在 $y=b$ 处：$M_y=0$，$V_y\equiv Q_y+\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}=0$

上式后一条件表示总的分布剪力为零，它将原有的两个边界条件合而为一。注意到(1.5)式和(1.7)式，可将此边界条件写成

在 $y=b$ 处：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\,;\qquad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}=0 \tag{1.17}$$

当然，如果在自由边上的外载已给，则不难列出相应的边界条件。

在两条自由边相交的点上，例如图 1.4 的 B 点处，有总的集中反力

$$R_B=R_{BA}+R_{BC}=(M_{yx})_B+(M_{xy})_B=2(M_{xy})_B$$

根据(1.5)式，可将上式写成

$$R_B=-2D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_B \tag{1.18}$$

因此，如 B 点没有支承对板施以此集中力，则在求挠曲函数w时，还需加上角点条件

$$\text{在 } x=a,\quad b\text{ 处：}\ \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0 \tag{1.19}$$

如果在 B 点处有支座能对薄板施加反力，则有下述角点条件：

$$\text{在 } x=a,\ y=b\text{处：}\ w=0 \tag{1.20}$$

此时反力的大小即为(1.18)式所示。

§1.4 简 例

本节举几个简例来阐明某些薄板问题的解的求法。

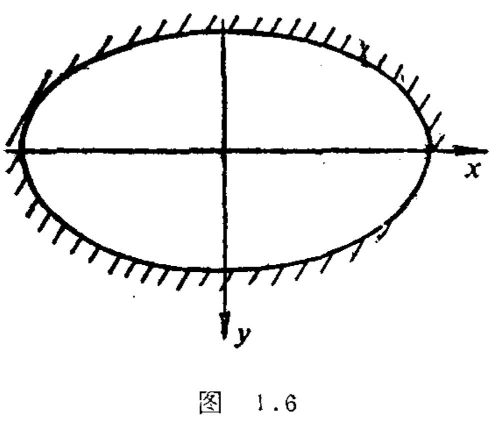

图 1.6

1. 均布载荷 q 作用下的周边固支椭圆形板。设椭圆形板(图1.6)的边界方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{a}$$

如取挠曲函数表达式为

$$w=m\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2 \tag{b}$$

上式已满足了在边界上挠度等于零的要求。由

$$\frac{\partial w}{\partial n}=\frac{\partial w}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial w}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial n}$$