

板壳理论

薛大为 编著

北京工业学院出版社

前 言

在工程中大量采用板壳结构，因此板壳理论历来就受到广大科技工作者的重视，也已成了高等学校的课程之一。许多国内外专家，在这一领域内作出贡献，使之日趋广博和完善。在我国，最早作出重大贡献的著名科学家，首推钱伟长和钱学森。钱学森对稳定问题考虑大变形的论述，钱伟长对板壳内禀理论的创立，都曾举世瞩目，至今仍放光彩。

本书为作者在北京工业学院讲授《板壳理论》课的讲稿整理而成，在写讲稿时，参考了国内外有关专著、论文和教材，不少内容，直接取自这些文献。虽然目前张量工具已越来越多地被一些论文的作者所采用，但由于工程界还未及普遍熟悉这一方法，所以本书未按张量的方式书写，这就限制了在本书中介绍一些很精彩的内容。我们相信，熟悉了本书的内容，要进一步研究板壳理论，是不难的。

由于时间仓促以及限于学术水平，本书中的缺点乃至错误在所难免，尚祈广大学人，惠予指正。

薛大为

1987年2月于北京工业学院

内 容 简 介

本书介绍了板和壳体的基本理论和计算方法。为了便于工程实际应用，内容侧重于弹性板和壳的工程理论。同时，对塑性范围内的一些问题以及大变形问题、夹层板壳问题、精确理论问题、冲击问题、变分原理问题等，均作了一定程度的阐述。一些内容是初次收入书籍；有的内容是第一次发表于本书；书中注意介绍了我国学者的部分成果。

本书可供军工、力学、土建、水利、机械、化工、造船、航空等专业的设计和科研人员参考，也可作为上述专业的高年级大学生和研究生的教本和教学参考书。

板 壳 理 论

薛大为 编著

北京工业学院出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

通县向阳印刷厂印刷

850×1168毫米 32开本 13.75印张 354千字

1988年6月第一版 1988年6月第一次印刷

ISBN7-81013-011-0 O·2

印数：1—3500册 定价：3.45元

目 录

第一章 弹性薄板弯曲的工程理论及其经典解法	(1)
§1.1 基本概念及假定	(1)
§1.2 弹性薄板的基本微分方程	(3)
§1.3 边界条件	(7)
§1.4 简例	(10)
§1.5 简支矩形板的纳维埃解法	(14)
§1.6 具有对边简支的矩形板的列维解法	(16)
§1.7 坐标的转换问题	(18)
§1.8 圆形薄板的轴对称弯曲	(22)
§1.9 弹性薄板工程理论的改进	(24)
§1.10 平面应力状态下的弹性薄板问题	(33)
§1.11 广义平面应力状态下的薄板	(37)
§1.12 均布外载 q 作用下的薄板	(41)
§1.13 薄板理论的进展	(43)
参考文献	(45)
第二章 弹性薄板的稳定与振动	(47)
§2.1 纵向及横向载荷共同作用下的弹性薄板	(47)
§2.2 弹性薄板的临界荷载	(51)
§2.3 四边简支矩形板的临界荷载	(51)
§2.4 两对边简支矩形板的稳定问题	(55)
§2.5 圆形薄板的稳定问题	(58)
§2.6 弹性薄板的自由振动	(63)
§2.7 圆薄板的自由振动	(67)
§2.8 板的强迫振动	(69)
§2.9 动力稳定的概念	(70)
§2.10 在剪应力作用下四边简支矩形板的稳定性	(77)

参考文献	(79)
第三章 弹性薄板理论的若干问题	(80)
§3.1 弹性薄板大挠度的基本方程	(80)
§3.2 圆板轴对称大挠度问题的基本方程	(85)
§3.3 文荪的载荷摄动法	(87)
§3.4 以载荷为摄动参数的系统近似法	(89)
§3.5 以挠度为摄动参数的系统近似法——钱伟长法	(92)
§3.6 变厚度板	(95)
§3.7 变厚度薄圆板的轴对称问题	(99)
§3.8 各向异性板	(102)
§3.9 夹层板	(107)
§3.10 边界为固支与简支的组的矩形板	(117)
§3.11 映象法	(118)
§3.12 圆孔周围的应力分布	(120)
§3.13 任意形状的多连通板的位移单值条件	(123)
参考文献	(132)
第四章 差分法·权余法和能量法解弹性薄板问题	(134)
§4.1 差分法解薄板弯曲问题	(134)
§4.2 权余法	(141)
§4.3 薄板的应变能	(143)
§4.4 虚功原理和功的互等定理	(146)
§4.5 最小势能原理的建立及其应用	(150)
§4.6 里兹法	(158)
§4.7 最小余能原理的建立及其应用	(161)
§4.8 巴博考维奇法	(165)
§4.9 二类变量的广义变分原理	(167)
§4.10 建立广义变分原理的一种方法	(176)
参考文献	(182)
第五章 薄板的极限分析和动力问题	(184)
§5.1 圆板极限分析的基本方程和条件	(185)
§5.2 部分受均布外载的简支圆板	(190)
§5.3 均布载荷作用下的固支圆板	(195)

§5.4	矩形板的极限载荷	(197)
§5.5	受集中力作用的简支多边形板	(204)
§5.6	用极限分析的变分原理求板的极限载荷	(205)
§5.7	圆板在冲击载荷作用下的刚塑性分析	(208)
§5.8	泰勒-钱伟长的撞击理论	(220)
§5.9	长杆弹垂直侵彻半无限厚靶板的简化理论	(231)
§5.10	弹塑性靶板的变形理论	(237)
	参考文献	(239)
第六章	壳体的一般理论	(241)
§6.1	正交曲线坐标系	(241)
§6.2	正交曲线坐标下物体的几何方程	(251)
§6.3	壳体的几何方程	(253)
§6.4	壳体的物理方程	(258)
§6.5	壳体的平衡方程	(261)
§6.6	壳体问题的边界条件	(265)
§6.7	薄壳的应变能	(268)
§6.8	薄壳的变形连续方程	(269)
§6.9	薄壳的无矩理论	(271)
§6.10	薄壳的体积应变和转动分量	(274)
§6.11	后记	(277)
	参考文献	(277)
第七章	柱壳	(278)
§7.1	柱壳的无矩理论	(278)
§7.2	半无矩理论	(281)
§7.3	泊松系数不为零的情形	(285)
§7.4	悬臂圆柱壳在自由端受一力矩作用时的解和一端受一集中力作用时的解	(288)
§7.5	柱壳的有矩理论	(297)
§7.6	轴对称问题	(303)
§7.7	爆炸载荷作用下的圆柱壳	(309)
	参考文献	(316)
第八章	旋转壳	(317)

§8.1	旋转壳中面的几何性质	(317)
§8.2	旋转壳的无矩理论	(319)
§8.3	旋转壳的轴对称弯曲问题	(324)
§8.4	边缘载荷作用下球壳的弯曲	(331)
§8.5	球壳轴对称弯曲问题的近似解	(336)
§8.6	组合壳体的计算	(341)
§8.7	圆锥壳	(343)
§8.8	表层不等厚的夹层旋转壳	(345)
	参考文献	(367)
第九章	扁壳	(368)
§9.1	扁壳的基本方程	(368)
§9.2	等厚度各向同性扁壳	(375)
§9.3	以 ω 和 φ 为基本未知函数时的边界条件	(378)
§9.4	常曲率扁壳的分析	(382)
§9.5	关于扁壳的热应力问题	(389)
§9.6	四边简支矩形底球面扁壳的简化计算	(399)
§9.7	扁壳的广义变分原理	(407)
§9.8	其它问题·夹层扁壳	(412)
§9.9	扁壳的动力问题	(419)
§9.10	扁壳理论的其它进展	(423)
	参考文献	(425)
参考书目		(429)

第一章 弹性薄板弯曲的工程理论 及其经典解法

§1.1 基本概念及假定

如两表面关于某一平面为对称，则由此两表面与垂直于该平面的柱面或棱柱面所围成的片状结构称为板。称此平面为板的中面；称垂直于中面的两表面对应点之间的距离为板厚；板厚可以是变量或常量。如板厚远小于中面的最小尺寸(例如，小于中面最小尺寸的 $1/8$)，则称为薄板，薄板在工程上有广泛的应用。

作用于板上的外载，一般可分为沿中面及垂直于中面两部分，前者对板的作用常按平面应力问题处理，后者则一般是薄板弯曲理论所研究的对象。

取板的中面为 xy 平面， z 轴垂直于中面且与 xy 轴形成右手螺旋(图1.1)，则板的工程理论所赖以建立的基本假设可陈述如下：

1. 变形前垂直于中面的线段，在板变形后仍垂直于变形后的中面且长度不变。此假设通常称为克希霍夫(Kirchhoff)假设。

2. 薄板中面内各点没有平行于中面的位移。这就是说假设 $u_0=0$ 及 $v_0=0$ ，其中 u_0 及 v_0 分别为中面上任一点沿 x 轴向及 y 轴向的位移。

3. 应力分量 σ_z 、 τ_{xz} 及 τ_{yz} 远小于其它三个应力分量 σ_x 、 σ_y 及 τ_{xy} 。

根据假设1，如令 w 为板沿 z 轴向的位移(即板的挠度)，则有

$$w = w(x, y) \quad (1.1)$$

又由 $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ 可得

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

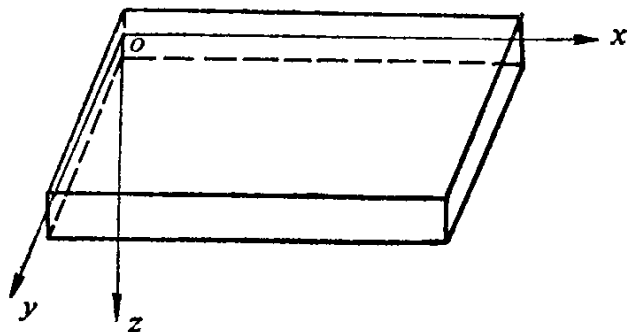


图 1.1

积分上式，得

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y), \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y)$$

再根据假定 2，得

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.2)$$

由假定 3，得

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), & \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (1.3)$$

式中 ε_x , ε_y 及 γ_{xy} 为应变分量， E 为杨氏(young)模量， ν 为泊松(Poisson)比； u , v , w 分别为沿 x , y 及 z 方向的位移。

τ_{xz} 及 τ_{yz} 为平衡所必需，不能由 $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ 通过虎克(Hooke)定律而等于零。

§1.2 弹性薄板的基本微分方程

由(1.2)式可得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = z \chi_x \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = z \chi_y \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2z \chi_{xy} \end{aligned} \right\} (1.3')$$

其中 χ_x 、 χ_y 及 χ_{xy} 分别为板变形后中面的曲率和扭率。将上式代入虎克定律

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} (1.4)$$

由(1.1)及(1.4)二式显见，三个应力分量均为 z 的线性函数。

注意到(1.4)式，定义单位长度的内力矩为(图1.2)

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = - \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \\
 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 \text{同理} \\
 M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 M_{xy} &= M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

其中

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

称为抗弯刚度。

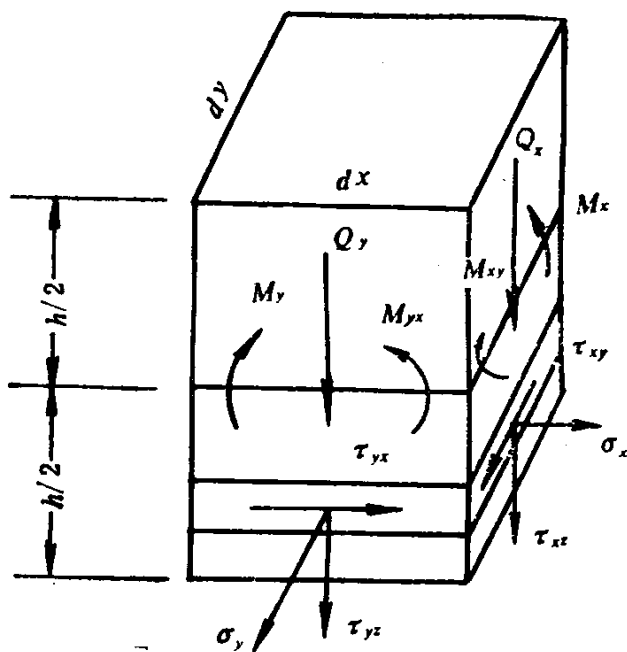


图 1.2

根据弹性力学的微元平衡方程

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

得[注意到(1.4)式]

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w$$

其中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

为平面拉普拉斯(Laplace)算子。积分上式, 得

$$\tau_{zx} = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + f(x, y)$$

其中 $f(x, y)$ 为任意函数, 但因在 $z = \pm h/2$ 处 $\tau_{zx} = 0$, 根据此条件由上式确定了函数 f 后, 得横剪应力 τ_{zx} 为

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \\ \text{同理} \\ \tau_{zy} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

由(1.6)式可见, 横剪应力沿板厚为抛物线分布。

将(1.6)式代入单位长度的横剪力的下述定义式中, 得

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} dz = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \\ Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy} dz = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

取板的一微元 $dx dy$ (图1.3) 并列此微元的平衡式, 得

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

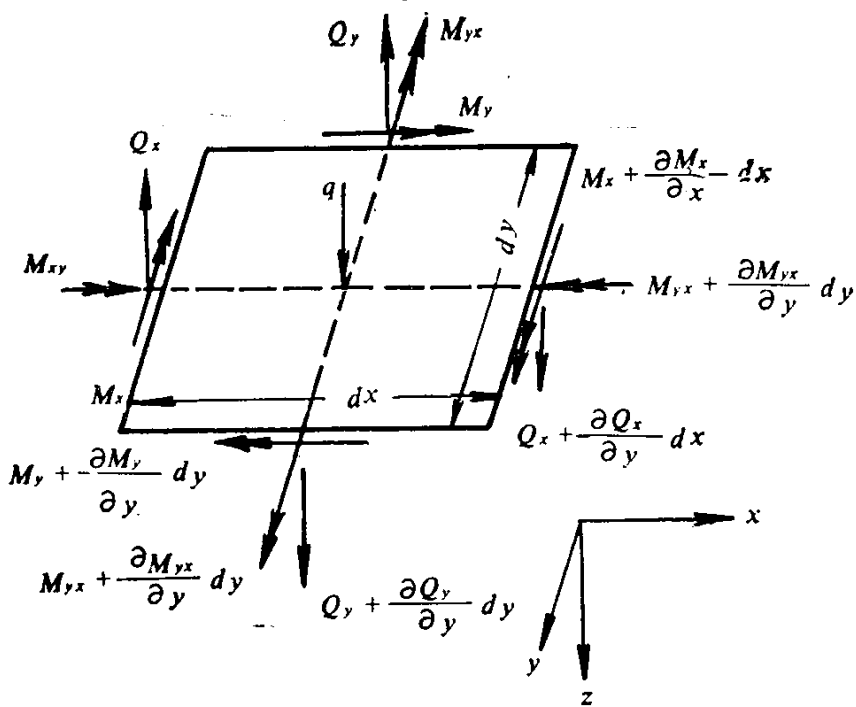


图 1.3

将上式的前二式代入第三式，得

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad (1.9)$$

将(1.5)式代入上式，得

$$D \nabla^2 \nabla^2 w \equiv D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q \quad (1.10)$$

将(1.5)式代入(1.4)式，又将(1.7)式代入(1.6)式，可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{12M_x}{h^3} z, \quad \sigma_y = \frac{12M_y}{h^3} z, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{12M_{xy}}{h^3} z \\ \tau_{xz} &= \frac{6Q_x}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right), \quad \tau_{yz} = \frac{6Q_y}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

(1.10)式为弹性薄板工程理论的基本方程。结合边界条件解方程(1.10)得出 w 后，由(1.5)式及(1.7)式即可求出板的内力

M_x, M_y, M_{xy}, Q_x 及 Q_y , 再由(1.11)式, 即可求出应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ 及 τ_{yz} 。

注意到(1.11)式及(1.8)式, 由

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= -\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = -\frac{6}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) \\ &= \frac{6q}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \end{aligned}$$

积分得

$$\sigma_z = \frac{6q}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} z - \frac{z^3}{3} \right) + f_1(x, y)$$

其中 $f_1(x, y)$ 为任意函数。因在 $z=h/2$ 处 $\sigma_z=0$, 即可求出 $f_1=-q/2$, 然后再代回上式, 得

$$\sigma_z = -2q \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h} \right)^2 \left(1 + \frac{z}{h} \right) \quad (1.12)$$

上式正好满足在 $z=-h/2$ 处 $\sigma_z=-q$ 的条件。

§ 1.3 边界条件

要求解(1.10)式得到挠曲函数 w , 必须配有边界条件。本节以矩形薄板为例来阐明如何列出边界条件。如图 1.4, 设板的 $x=0$ 边为简支边; $y=0$ 边为固支边; $x=a$ 边及 $y=b$ 边为自由边。

当简支边界处没有外加弯矩时, 则有

在 $x=0$ 处: $w=M_x=0$

注意到(1.5)式, 上述条件可写成

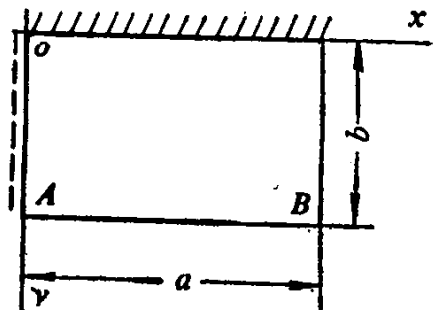


图 1.4

$$\text{在 } x=0 \text{ 处: } w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1.13)$$

如果在简支边 $x=0$ 处有外加弯矩 \bar{M} , 则上述条件 $M_x=0$ 应代以 $M_x=\bar{M}$, 它又可写成

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\bar{M}}{D}$$

对固支边 $y=0$, 显然有

$$\text{在 } y=0 \text{ 处: } w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (1.14)$$

对于自由边, 例如 $y=b$ 边, 如该边上不受外载, 则应有

$$\text{在 } y=b \text{ 处: } M_y=0, \quad M_{yx}=0, \quad Q_y=0$$

但薄板工程理论的基本微分方程(1.10)是四阶偏微分方程, 它只能满足两个边界条件, 由此可见, 弹性薄板的工程理论从数学提法上就存在着问题。

为了近似地解决这一问题, 可以考察任一边界(不一定是自由边界)上所承受的扭矩 M_{yx} 。如图 1.5, 设在微长 CD 上作用有内力 $M_{yx}dx$, 此内力可近似地认为等价于在 C 处有一集中力 M_{yx} 的作用且在 D 处有的反方向的集中力 M_{yx} 的作用。同理, 微长 DE 内的内力素 $(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dx)dx$ 可近似地认为等价于在 D 处作用一集中力 $M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dx$, 而在 E 处作用一反方向的集中力 $M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dx$ 。由此可见, D 处作用了由扭矩折算的横剪力

$$M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dx - M_{yx} = \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dx$$

这一横剪力的作用范围可以认为等于以 D 处为中心长为 dx 的区间; 因此单位长度上的横剪力为 $\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$ 。由于 D 为边界上任意

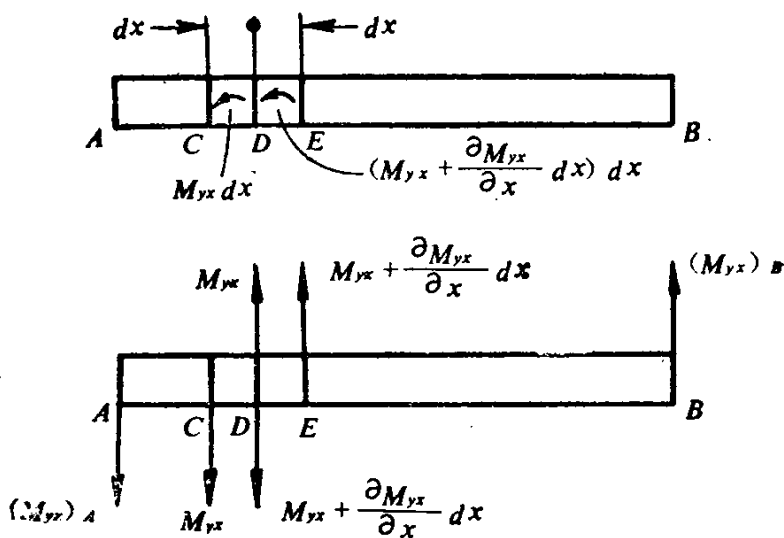


图 1.5

一点，故上述结论对边界上任一点均成立。于是，可以认为有一折算剪力

$$V_v = Q_v + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \quad (1.15)$$

作用于边界上任一点处。同时我们看到，此时在边界的两端有未被抵消的集中剪力 R

$$R_{AB} = (M_{yx})_A, \quad R_{BA} = (M_{yx})_B \quad (1.16)$$

的作用。

于是，对于自由边界上的边界条件可以近似写成

$$\text{在 } y=b \text{ 处: } M_y = 0, \quad V_v \equiv Q_v + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = 0$$

上式后一条件表示总的分布剪力为零，它将原有的两个边界条件合而为一。注意到(1.5)式和(1.7)式，可将此边界条件写成

在 $y=b$ 处:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad (1.17)$$

当然，如果在自由边上的外载已给，则不难列出相应的边界条件。

在两条自由边相交的点上, 例如图 1.4 的 B 点处, 有总的集中反力

$$R_B = R_{BA} + R_{BC} = (M_{yx})_B + (M_{xy})_B = 2(M_{xy})_B$$

根据(1.5)式, 可将上式写成

$$R_B = -2D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_B \quad (1.18)$$

因此, 如 B 点没有支承对板施以此集中力, 则在求挠曲函数 w 时, 还需加上角点条件

$$\text{在 } x=a, \quad b \text{ 处: } \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.19)$$

如果在 B 点处有支座能对薄板施加反力, 则有下列角点条件:

$$\text{在 } x=a, \quad y=b \text{ 处: } w = 0 \quad (1.20)$$

此时反力的大小即为(1.18)式所示。

§1.4 简 例

本节举几个简例来阐明某些薄板问题的解的求法。

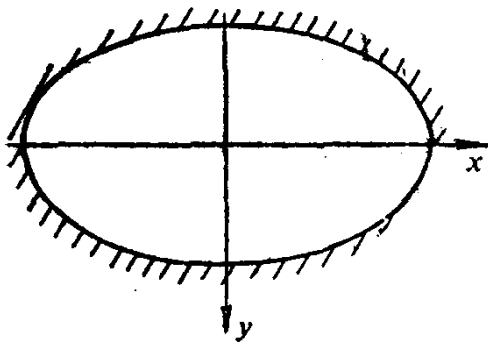


图 1.6

1. 均布载荷 q 作用下的周边固支椭圆形板。设椭圆形板(图 1.6)的边界方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a)$$

如取挠曲函数表达式为

$$w = m \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 \quad (b)$$

上式已满足了在边界上挠度等于零的要求。由

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n}$$