

空间结构论文选集

中国土木工程学会桥梁及结构
工程学会空间结构委员会 编



科学出版社

前 言

中国土木工程学会桥梁及结构工程学会于1982年3月在福建省福州市举行了第一届空间结构学术交流会。本书所收集的二十篇文章,就是在该次会议上所交流的论文的基础上,由空间结构委员会委员推荐并组织审查而选人的,内容包括薄壳、折板、网架、网壳、悬索和充气结构等方面,基本上反映了近几年来我国空间结构的设计、施工与科研成果。

空间结构是工程结构领域中的一个重要组成部分,自本世纪五十年代以来,在我国已打下了一定的基础,理论研究与实际应用都取得了不少成就,近年来发展更快,特别是网架和折板结构,已经达到了广泛应用的程度。本书中,涉及到网架结构的内容最多,既有理论分析,又有工程设计和施工方法;由此可以看出,我国在这方面已经具有较高的水平。钢筋混凝土V形折板在我国已大量用于实际工程,取得了丰富的经验,并有不少文章发表;本文集比较集中地讨论了这种折板结构的计算与试验。至于薄壳结构,虽然近年来用于实际工程不多,但理论上却取得了相当进展,因此本书着重讨论了有关理论问题。除此之外,对于近年来在我国兴起的网壳、悬索、充气等结构,本书也反映了有关的进展。

希望这本论文选集的出版,能够促进我国空间结构的发展。由于编者水平有限;文中难免存在着不足或欠妥之处,敬请读者指正。

内 容 简 介

本书的文章选自中国土木工程学会桥梁及结构工程学会第一届空间结构学术交流会所交流的论文,内容包括薄壳、折板、网架、网壳、悬索及充气结构的理论分析与工程实践等问题。

本文集可供从事空间结构设计与施工的科技工作者和高等院校有关专业的师生参考。

空间结构论文选集

中国土木工程学会桥梁及结构
工程学会空间结构委员会 编

责任编辑 杨家福

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1985年2月第一版 开本:787×1092 1/16

1985年2月第一次印刷 印张:14 3/4

印数:0001—3,500 字数:841,000

统一书号:15031·635

本社书号:3928·15—10

定价: 3.45 元

目 录

任意二次型双曲面扁薄壳的基本解	何广乾、林春哲 (1)
地下旋转薄壳顶盖考虑岩体抗力作用的计算方法	张维岳、施炳华 (14)
长双曲抛物面负高斯曲率壳实用算法	林 颖 (17)
V形折板屋盖设计中的几个计算问题	陈醒辉、林元坤、李镇强、胡佛根 (26)
网架结构最优设计的研究——网架的最优几何外形及选型	蓝倜恩、俞建麟、钱若军 (36)
蜂窝形三角锥网架计算的新方法——下弦内力法	董石麟、宦荣芬 (49)
空间组合板架的结构分析与试验研究	洪肖秋 (73)
圆柱形网壳弹塑性分析及破坏机理的探讨	邹 浩、黄友明 (87)
上海工业展览馆充气结构的分析	戴国祥 (101)
悬臂预应力 V 形折板试验	林培源、万玉清、刘祖琪 (113)
网架结构十字板节点的试验研究	杨嘉谔、严 慧、朱国元 (122)
网架结构空心球节点承载能力的试验研究及合理设计	谭玉成、蓝倜恩、杨永德、钱若军 (135)
工业建筑中的钢筋混凝土薄壳屋盖	冯良经、殷灿宝 (148)
网架结构选型	张运田 (159)
上海体育馆大跨度网架结构	姜国渔、姚念亮 (168)
新型蜂窝形三角锥组合网架的设计与试验	张澄亚 (177)
预应力混凝土网状筒拱设计与施工	益德清、盛承楷 (185)
无拉环圆形双层悬索屋盖结构的设计与施工	朱思荣、赵璧荣、冯淑卿、陈新兴 (195)
网架结构高空滑移法施工研究	肖 焱、杨宗放 (213)
网架结构的升板法整体提升施工	高 浚 (224)

CONTENTS

The Fundamental Solution of Shallow Shells of Arbitrary Quadratic Middle Surface	He Guangqian, Lin Chunzhe (10)
A Method of Analysing Underground Thin Shell Roofs of Revolution Considering the Action of Rock Resistance	Zhang Weiyue, Shi Binghua (16)
A Practical Method for Calculating Long Hyperbolic Paraboloid Shell with Negative Gaussian Curvature	Lin Ying (25)
Some Calculating Problems in the Design of V-Shaped Folded Plate Roof	Chen Xiaohui, Lin Yuankun, Li Zhenqiang, Hu Fogen (35)
A Study on the Optimum Design of Space Trusses—Optimal Geometrical Configuration and Selection of Type	Lan Tien, Yu Jianlin, Qian Ruojun (48)
A New Method for Analysing Triangular Pyramid Space Grids of Honeycomb Pattern—Bottom Chord Internal Force Method	Dong Shilin, Huan Rongfen (72)
Structural Analysis and Experimental Investigation of Composite Space Frame	Hong Xiaoqi (86)
An Investigation on the Elastoplastic Behavior and Collapse Mechanism of Latticed Cylindrical Shell	Zou Hao, Huang Youming (100)
Analysis of the Pneumatic Structure for the Exhibition Hall of Shanghai Industrial Exhibition Center	Dai Guoxian (112)
Test on a Prestressed Cantilevered V-Shaped Folded Plate	Lin Peiyuan, Wan Yuqing, Liu Zuqi (121)
An Experimental Research on the Cruciform Gusset Plate of Space Truss	Yang Jiarong, Yen Hui, Zhu Guoyuan (134)
Experimental Investigation of the Load-Bearing Behavior of Hollow Spherical Joint for Space Truss and its Rational Design	Tan Yucheng, Lan Tien, Yang Yongde, Qian Ruojun (147)
Reinforced Concrete Shells for the Roof of Industrial Buildings	Feng Liangjing, Yin Canbao (158)
Selection of Type for Space Truss	Zhang Yuntian (167)
A Long Span Space Truss for Shanghai Sports Arena	Jiang Guoyu, Yao Nianliang (176)
The Design and Testing of a New Type of Triangular Pyramid Composite Space Grids of Honeycomb Pattern	Zhang Chengya (184)
Design and construction of Prestressed Concrete Latticed Cylindrical Shell	Yi Deqing, Sheng Chengkai (194)
Circular Double-Layer Cable Suspended Roof Structure with No-Tension Ring	Zhu Sirong, Zhao Birong, Feng Shuqing, Chen Xinxing (212)
A Study on the Construction of Space Truss by Sliding Method in Elevated Position	Xiao Zhi, Yang Zhongfang (223)
Erection of a Space Truss by the Lift-Slab Method	Guo Jun (230)

任意二次型双曲面扁薄壳的基本解

何广乾 林春哲

(中国建筑科学研究院)

提 要

本文对任意二次型双曲面扁薄壳的八阶偏微分方程,采用平面波分解和小参数法,导出了任意二次型双曲面扁薄壳的基本解。其表现形式比较简单,应用比较方便,可用数值方法求值,计算工作量较少。这种求基本解的方法比较简捷,所得的结果具有实用意义,适用于分析任意荷载作用下薄壳结构的内力与位移,使工程技术人员在设计薄壳结构时能较快地求出给定荷载作用下薄壳结构的内力与变形。

在上述基本解的基础上,还得出了薄壳结构边界为无限远的任意二次型双曲面扁薄壳在集中荷载作用下的格林函数。这个格林函数,表达形式比较简单,可以用于边界积分法分析薄壳结构,并能使二维问题化为一维问题来处理,降低了求解矩阵的阶数,较有限单元法能节省计算机的内存和缩短分析时间。此外,这个格林函数也可以在其它有关薄壳结构积分方程中作为核函数用。

一、引 言

由于薄壳结构在体形上、功能要求上以及节约用材和受力合理性上于其适用范围内较其它结构具有显著的优越性,引起了工程技术人员的重视。实践证明,在一些工程建设中,如大跨度公共建筑与工业建筑的屋盖,高耸薄壁塔框结构,贮液池与料仓,地下建筑,压力容器与原子能核电站外壳,水工结构与浅海平台等,当其适合于采用壳体结构时,均能获得较好的效果。

任意二次型双曲面扁薄壳是工程建设中常用的一类壳体结构。它具有造型简单和便于预制装配等优点,特别是负高斯曲率的二次型双曲面薄壳结构,可以用两组正交直线组成,更能显示这方面的优越性。

近百年来,尽管从事薄壳结构设计、施工和科研的工程技术人员提供了大量的科研成果和丰富的实践经验,使人们对薄壳结构的性能和作用有了较深刻的认识,同时在理论和应用方面也取得了不少的进展,但是由于薄壳结构的控制方程是八阶偏微分方程,它的求解是比较复杂的。即便采用一般的离散分析方法,例如有限单元法、有限差分法等,也是比较烦琐冗长,所得总体矩阵阶数较高,在推广应用时,遇到了不少困难。

从薄壳结构的强度设计而言,工程设计人员要求能较快地求出薄壳结构在给定的荷载作用下的内力与变形。为此,对常用的任意二次型双曲面薄壳结构,找一个便于实用的

基本解，以适应这方面的要求是有其现实意义的。

二、基本解的基础微分方程

任意二次型双曲面薄壳的曲面方程由下式给出：

$$z = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2) \quad (2.1)$$

式中 k_1 、 k_2 分别为薄壳结构在 x 、 y 方向的主曲率。可以证明，如果令 $\phi_1(x, y)$ 、 $\phi_2(x, y)$ 、 $\phi_3(x, y)$ 分别为薄壳结构 u 、 v 、 w 的三个位移函数，则有

$$L(\phi_1) = -\frac{X(x, y)}{D} \quad (2.2 a)$$

$$L(\phi_2) = -\frac{Y(x, y)}{D} \quad (2.2 b)$$

$$L(\phi_3) = -\frac{Z(x, y)}{D} \quad (2.2 c)$$

式中 $X(x, y)$ 、 $Y(x, y)$ 、 $Z(x, y)$ 分别为薄壳在 x 、 y 、 z 方向的作用力， L 为微分算子，由式 (2.3) 给出：

$$L = \Delta^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{\delta^2} \Delta_k^2 \quad (2.3)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \Delta_k &= k_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ D &= \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

其中 δ 为壳体的厚度， ν 为泊桑系数。当求得 ϕ_1 、 ϕ_2 、 ϕ_3 后，薄壳结构任意点的位移分量 u 、 v 、 w 可由下列矩阵方程求得：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ \text{对} & D_{22} & D_{23} \\ \text{称} & & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} D_{11} &= \frac{\delta^2}{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Delta^2 + (k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ &\quad + 2(1+\nu) k_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ D_{12} = D_{21} &= -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\delta^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta^2 - (k_1 - k_2)^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ D_{13} = D_{31} &= (k_1 + \nu k_2) \frac{\partial^3}{\partial x^3} + [(2+\nu)k_1 - k_2] \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$D_{22} = \frac{\delta^2}{12} \left(\frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Delta^2 + 2(1+\nu) k_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ + (k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$D_{23} = D_{32} = (\nu k_1 + k_2) \frac{\partial^3}{\partial y^3} + [(2+\nu) k_2 - k_1] \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}$$

$$D_{33} = \Delta^2$$

求得位移分量 u, v, w 后, 可按下式计算薄壳结构的各项内力:

$$\begin{bmatrix} T_1(x, y) \\ T_2(x, y) \\ S(x, y) \end{bmatrix} = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \nu \frac{\partial}{\partial y} & -(k_1 + \nu k_2) \\ \nu \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & -(\nu k_1 + k_2) \\ \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.7 a)$$

$$\begin{bmatrix} M_1(x, y) \\ M_2(x, y) \\ M_{12}(x, y) \end{bmatrix} = -D \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} [w] \quad (2.7 b)$$

$$\begin{bmatrix} Q_1(x, y) \\ Q_2(x, y) \end{bmatrix} = -D \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} [\Delta w] \quad (2.7 c)$$

综上所述, 式 (2.2 a)、(2.2 b)、(2.2 c) 的解可以归结为求下列偏微分方程的解:

$$L(\phi) = \frac{\delta(x, y)}{D} \quad (2.8)$$

式中 $\delta(x, y)$ 为狄拉克函数. 解得式 (2.8) 后, 则薄壳结构在任意荷载作用下的位移函数即可用下式求得:

$$\phi_1(x, y) = - \iint_{\sigma} \phi(x - \xi, y - \eta) X(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.9 a)$$

$$\phi_2(x, y) = - \iint_{\sigma} \phi(x - \xi, y - \eta) Y(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.9 b)$$

$$\phi_3(x, y) = - \iint_{\sigma} \phi(x - \xi, y - \eta) Z(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.9 c)$$

然后, 利用式 (2.5) — (2.7) 可求出薄壳结构的全部内力与位移. 为此, 我们可以称式 (2.8) 的解为薄壳结构的基本解. 此外, 从式 (2.8) 的形式来看, 它又相当于薄壳结构在单位集中荷载作用下的解. 在工程实践中, 大跨薄壳屋顶下大吊灯的荷重、压力容器的喷口荷载、薄壳在预应力锚固端的集中力以及预制薄壳施工吊装时的吊点集中力等, 均属集中荷载在壳体上的作用. 薄壳结构在集中荷载作用下的内力分析是个较难解决的问题之

一. 由于在集中荷载附近应力的奇异性, 一般常规方法不能求解, 即使采用离散方法求解, 尽管在荷载作用点附近加密网格, 也难得到要求的精确结果.

自从 1947 年 Reissner^[1] 求得球壳在单位法向集中荷载作用下的解之后, 许多作者对于任意二次型双曲面薄壳在集中荷载作用下的内力与位移分析作了研究. 本文作者也曾于 1963 年用重傅氏积分变换导得了无限大椭圆抛物面薄壳在集中荷载作用下的精确解^[2], 但解的形式为重积分的表达式. 虽然对其中一项的主要积分采用了级数展开, 但计算起来还是不够方便. 日本的 T. Matsui 及 O. Matsuoka^[3] 于 1978 年用平面波分解法求得了任意二次型曲面薄壳完整的基本解, 但是其最终表达式采用了三重级数. 虽然通过运算, 其级数是收敛的, 但是, 运算工作量相当烦琐费时. 本文参考了这篇文献, 也是从平面波分解出发, 但是采用了不同的求解方法, 得出了较之简捷的基本解. 此外, 在基本解的基础上, 还得到了无限大任意二次型双曲扁薄壳在集中荷载作用下的计算公式, 便于工程实际应用.

三、任意二次型双曲面薄壳的基本解

任意二次型双曲面扁薄壳的基本解, 可以归结为求式 (2.8) 的解, 也就是求下列微分方程的解:

$$\Delta^4 \phi + \frac{12(1-\nu^2)}{\delta^2} \Delta_k^2 \phi = \frac{\delta(x, y)}{D} \quad (3.1)$$

按平面波分解, 在二维的问题上, 令

$$\rho = w_1 x + w_2 y \quad (3.2)$$

式中 (w_1, w_2) 为单位圆周上任意点的坐标. 显然,

$$w_1 = \cos \theta \quad w_2 = \sin \theta \quad (3.3)$$

$\phi(x, y)$ 可以展开为

$$\phi(x, y) = \int_0^{2\pi} \tilde{\phi}(w_1 x + w_2 y) d\theta \quad (3.4)$$

$\delta(x, y)$ 函数也可以展开为

$$-\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} (w_1 x + w_2 y)^{-2} d\theta \quad (3.5)$$

又由于

$$\frac{\partial}{\partial x} = w_1 \frac{d}{d\rho} = \cos \theta \frac{d}{d\rho}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = w_2 \frac{d}{d\rho} = \sin \theta \frac{d}{d\rho},$$

式 (3.1) 可以改写作

$$\frac{d^8 \tilde{\phi}}{d\rho^8} + 4\lambda^4 \frac{d^4 \tilde{\phi}}{d\rho^4} = -\frac{\rho^{-2}}{4\pi^2 D} \quad (3.6)$$

式中

$$4\lambda^4 = \frac{12(1-\nu^2)(k_2 \cos^2 \theta + k_1 \sin^2 \theta)^2}{\delta^2} = g^2 \quad (3.7)$$

显然 ε^2 是壳体结构分析中的一个小参数。令方程 (3.6) 的解为:

$$\tilde{\phi}(\rho) = \tilde{\phi}_0(\rho) + \varepsilon^2 \tilde{\phi}_1(\rho) + \varepsilon^4 \tilde{\phi}_2(\rho) + \varepsilon^6 \tilde{\phi}_3(\rho) + \dots \quad (3.8)$$

将此代入方程 (3.6), 可得

$$\begin{aligned} \frac{d^8 \tilde{\phi}_0}{d\rho^8} &= -\frac{\rho^{-2}}{4\pi^2 D} & \frac{d^8 \tilde{\phi}_1}{d\rho^8} &= -\frac{d^4 \tilde{\phi}_0}{d\rho^4} \\ \frac{d^8 \tilde{\phi}_2}{d\rho^8} &= -\frac{d^4 \tilde{\phi}_1}{d\rho^4} & \frac{d^8 \tilde{\phi}_3}{d\rho^8} &= -\frac{d^4 \tilde{\phi}_2}{d\rho^4} \end{aligned} \quad (3.9)$$

由于

$$\int \frac{\rho^m}{m!} [\ln \rho - \psi(m+1)] d\rho = \frac{\rho^{m+1}}{(m+1)!} [\ln \rho - \psi(m+2)] \quad (3.10)$$

式中

$$\psi(m+1) = -\gamma + \sum_{s=1}^m \frac{1}{s} \quad (3.11)$$

γ 为欧拉常数,

$$\gamma = 0.57721 \quad (3.12)$$

通过小参数法求解, $\tilde{\phi}(\rho)$ 可用下式表示:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\rho) = \frac{1}{32\pi^2 \lambda^6 D} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m+2}}{(4m+2)!} [\ln \sqrt{2} \lambda \rho - \psi(4m+3)] \right. \\ + A_{\phi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m+3}}{(4m+3)!} + B_{\phi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m+2}}{(4m+2)!} \\ + C_{\phi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m+1}}{(4m+1)!} + D_{\phi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m}}{4m!} \\ \left. + E_{\phi} \rho^3 + F_{\phi} \rho^2 + G_{\phi} \rho + H \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

于是

$$\phi(x, y) = \int_0^{2\pi} \tilde{\phi}(\rho) d\theta \quad (3.14)$$

式 (3.13) 和 (3.14) 即构成任意二次型双曲面扁薄壳在单位集中荷载作用下的基本解, 其中式 (3.14) 可用数值积分法很简便地求得。根据平面波分解法, 我们有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^{2\pi} \tilde{u}(\rho) d\theta & v(x, y) &= \int_0^{2\pi} \tilde{v}(\rho) d\theta \\ w(x, y) &= \int_0^{2\pi} \tilde{w}(\rho) d\theta \end{aligned} \quad (3.15)$$

于是

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} & \tilde{D}_{13} \\ \text{对} & \tilde{D}_{22} & \tilde{D}_{23} \\ \text{称} & & \tilde{D}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \\ \tilde{\phi}_3 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

式中

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{11} &= \frac{\delta^2}{12} \left(\cos^2 \theta + \frac{2}{1-\nu} \sin^2 \theta \right) \frac{d^6}{d\rho^6} + [k_1^2 (1 + \sin^2 \theta) + 2\nu k_1 (k_2 \cos^2 \theta \\ &+ k_1 \sin^2 \theta) + k_2^2 \cos^2 \theta] \frac{d^2}{d\rho^2} \\ \tilde{D}_{12} = \tilde{D}_{21} &= -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\delta^2}{12} \sin \theta \cos \theta \frac{d^6}{d\rho^6} - (k_1 - k_2)^2 \sin \theta \cos \theta \frac{d^2}{d\rho^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{D}_{13} = \bar{D}_{31} &= [k_1 \cos \theta (1 + \sin^2 \theta) + \nu \cos \theta (k_2 \cos^2 \theta + k_1 \sin^2 \theta) \\
&\quad - k_2 \cos \theta \sin^2 \theta] \frac{d^3}{d\rho^3} \\
\bar{D}_{22} &= \frac{\delta^2}{12} \left(\frac{2}{1-\nu} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right) \frac{d^6}{d\rho^6} + [k_2^2 (1 + \cos^2 \theta) + 2\nu k_2 (k_2 \cos^2 \theta \\
&\quad + k_1 \sin^2 \theta) + k_1^2 \sin^2 \theta] \frac{d^2}{d\rho^2} \\
\bar{D}_{23} = \bar{D}_{32} &= [k_2 \sin \theta (1 + \cos^2 \theta) + \nu \sin \theta (k_2 \cos^2 \theta + k_1 \sin^2 \theta) \\
&\quad - k_1 \cos^2 \theta \sin \theta] \frac{d^3}{d\rho^3} \\
\bar{D}_{33} &= \frac{d^4}{d\rho^4}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

在(3.1)式中,如果 $\delta(x, y)$ 代表薄壳结构上的法向单位集中荷载,则根据(3.13)、(3.16)、(3.17)式,可得

$$\begin{aligned}
\tilde{w}(\rho) &= \frac{1}{8\pi^2 \lambda^2 D} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m+2}}{(4m+2)!} [\ln |\sqrt{2} \lambda \rho| - \psi(4m+3)] \right. \\
&\quad + A_\phi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m+3}}{(4m+3)!} + B_\phi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m+2}}{(4m+2)!} \\
&\quad \left. + C_\phi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m+1}}{(4m+1)!} + D_\phi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m}}{4m!} \right\}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(\rho) &= \frac{\sqrt{2} K_u}{16\pi^2 \lambda^3 D} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m+3}}{(4m+3)!} [\ln |\sqrt{2} \lambda \rho| - \psi(4m+4)] \right. \\
&\quad + A_\phi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m}}{4m!} + B_\phi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m+3}}{(4m+3)!} \\
&\quad \left. + C_\phi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m+2}}{(4m+2)!} + D_\phi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m+1}}{(4m+1)!} \right\}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(\rho) &= \frac{\sqrt{2} K_v}{16\pi^2 \lambda^3 D} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m+3}}{(4m+3)!} [\ln |\sqrt{2} \lambda \rho| - \psi(4m+4)] \right. \\
&\quad + A_\phi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m}}{4m!} + B_\phi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m+3}}{(4m+3)!} \\
&\quad \left. + C_\phi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m+2}}{(4m+2)!} + D_\phi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m+1}}{(4m+1)!} \right\}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

式中

$$K_u = k_1 \cos \theta (1 + \sin^2 \theta) + \nu \cos \theta (k_2 \cos^2 \theta + k_1 \sin^2 \theta) - k_2 \cos \theta \sin^2 \theta \tag{3.21}$$

$$K_v = k_2 \sin \theta (1 + \cos^2 \theta) + \nu \sin \theta (k_2 \cos^2 \theta + k_1 \sin^2 \theta) - k_1 \cos^2 \theta \sin \theta \tag{3.22}$$

式(3.18)–(3.20)即为任意二次型双曲面扁薄壳在单位法向集中荷载作用下的基本解,至于在单位法向集中荷载作用下的内力,可按式(2.7)求得,不再一一列举。

四、无限大任意二次型双曲面扁薄壳的格林函数

无限大任意二次型双曲面扁薄壳的基本解,在壳体内力与位移的分析中,即为各项内力与位移的格林函数.理论与实验均证明,集中荷载对壳体的影响主要集中在荷载作用点的附近,并且很快地向边缘衰减.利用这一特征并考虑到由式(2.1)定义的中曲面对 x 轴及 y 轴的对称性,可以断定其内力与位移必然出现或者对称或者反对称的现象,即可以得到无限大任意二次型双曲面扁薄壳在法向单位集中荷载下实用的基本解或其格林函数.这里我们略去 ν 的影响,并将荷载作用点的坐标用 (ξ, η) 来表示.

在式(3.18)表达的基本解 $\tilde{w}(\rho)$ 中,根据解的对称性,应有 $A_\phi = C_\phi = 0$,
 $\lambda = \lambda \sin \lambda$ 及

$$\ln \sqrt{2} \lambda \rho = \ln |\sqrt{2} \lambda \rho| \quad (4.1)$$

比较参考文献[2],所取得的精确解

$$\tilde{w}(\rho) = \frac{1}{4\pi^2 D} \int_0^\infty \frac{t \cos \rho t dt}{t^4 + 4\lambda^4} \quad (4.2)$$

当 $\rho = 0$ 时,

$$\tilde{w}(0) = \frac{1}{32\pi^2 \lambda^2 D} \quad (4.3)$$

从(3.18)式,

$$\tilde{w}(0) = \frac{D_\phi}{8\pi^2 \lambda^2 D} \quad (4.4)$$

从而

$$D_\phi = \frac{\pi}{4} \quad (4.5)$$

此外,当 $\rho \rightarrow \infty$, $\tilde{w}(\rho) \rightarrow 0$,所以

$$B_\phi = 0 \quad (4.6)$$

于是

$$\tilde{w}(\rho) = \frac{1}{8\pi^2 \lambda^2 D} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m+2}}{(4m+2)!} [\ln |\sqrt{2} \lambda \rho| - \psi(4m+3)] + \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m}}{4m!} \right\} \quad (4.7)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m+2}}{(4m+2)!} = \text{sh } \lambda \rho \sin \lambda \rho$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m}}{4m!} = \text{ch } \lambda \rho \cos \lambda \rho \quad (4.8)$$

所以

$$\tilde{w}(\rho) = \frac{1}{8\pi^2 \lambda^2 D} \left[\text{sh } \lambda \rho \sin \lambda \rho \ln |\sqrt{2} \lambda \rho| + \frac{\pi}{4} \text{ch } \lambda \rho \cos \lambda \rho - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \psi(4m+3) (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m+2}}{(4m+2)!} \right] \quad (4.9)$$

于是 w 的格林函数为

$$G_w(x, y; \xi, \eta) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{8\pi^2 \lambda^2 D} \left[\text{sh } \lambda \rho' \sin \lambda \rho' \ln |\sqrt{2} \lambda \rho'| \right. \\ \left. + \frac{\pi}{4} \text{ch } \lambda \rho' \cos \lambda \rho' - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \psi(4m+3) (\sqrt{2} \lambda \rho')^{4m+2}}{(4m+2)!} \right] d\theta \quad (4.10)$$

式中

$$\rho' = (x - \xi) \cos \theta + (y - \eta) \sin \theta \quad (4.11)$$

同样, 可得

$$\tilde{u}(\rho) = \frac{K_{\bar{u}}}{16\pi^2 \lambda^2 D} \left[\text{ch } \lambda \rho \sin \lambda \rho \left(\ln |\sqrt{2} \lambda \rho| + \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ \left. - \text{sh } \lambda \rho \cos \lambda \rho \left(\ln |\sqrt{2} \lambda \rho| - \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ \left. - \sqrt{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \psi(4m+4) (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m+3}}{(4m+3)!} \right] \quad (4.12)$$

$$\tilde{v}(\rho) = \frac{K_{\bar{v}}}{16\pi^2 \lambda^2 D} \left[\text{ch } \lambda \rho \sin \lambda \rho \left(\ln |\sqrt{2} \lambda \rho| + \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ \left. - \text{sh } \lambda \rho \cos \lambda \rho \left(\ln |\sqrt{2} \lambda \rho| - \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ \left. - \sqrt{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \psi(4m+4) (\sqrt{2} \lambda \rho)^{4m+3}}{(4m+3)!} \right] \quad (4.13)$$

u, v 的格林函数分别为:

$$G_u(x, y; \xi, \eta) = \int_0^{2\pi} \frac{K_{\bar{u}}}{16\pi^2 \lambda^2 D} \left[\text{ch } \lambda \rho' \sin \lambda \rho' \left(\ln |\sqrt{2} \lambda \rho'| + \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ \left. - \text{sh } \lambda \rho' \cos \lambda \rho' \left(\ln |\sqrt{2} \lambda \rho'| - \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ \left. - \sqrt{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \psi(4m+4) (\sqrt{2} \lambda \rho')^{4m+3}}{(4m+3)!} \right] d\theta \quad (4.14)$$

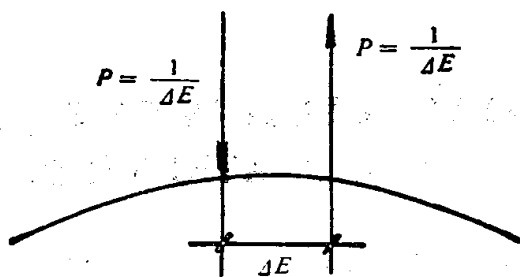
$$G_v(x, y; \xi, \eta) = \int_0^{2\pi} \frac{K_{\bar{v}}}{16\pi^2 \lambda^2 D} \left[\text{ch } \lambda \rho' \sin \lambda \rho' \left(\ln |\sqrt{2} \lambda \rho'| + \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ \left. - \text{sh } \lambda \rho' \cos \lambda \rho' \left(\ln |\sqrt{2} \lambda \rho'| - \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ \left. - \sqrt{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \psi(4m+4) (\sqrt{2} \lambda \rho')^{4m+3}}{(4m+3)!} \right] d\theta \quad (4.15)$$

以上积分均可采用数值积分法求值。当薄壳结构为负高斯曲率时, 它会出现发散积分项, 但只要去掉对应于任意刚体位移项, 就可以进行正则化积分。

关于 $G_{T1}, G_{T2}, G_S, G_{M1}, G_{M2}, G_{M12}, G_{Q1}, G_{Q2}$ 等, 均可仿 G_u, G_v, G_w 通过 (2.7) 式列出, 这里不一一列举了。

以上各格林函数的图形及数值结果与参考文献 [3] 是一致的。

如果作用在壳体上是单位集中力矩, 则可将其化为一对绝对值相同、但方向相反、相隔一个微分距离, 能共同形成单位力矩的法向力如附图所示。



五、结 语

本文给出的任意二次型双曲面扁薄壳的基本解,其表现形式比较简单,应用比较方便,计算工作量较少,可以适用于分析任意荷载作用下薄壳的内力与位移,并可以兼作薄壳结构的格林函数之用。此外,如果采用积分方程法求解薄壳结构的内力与位移,例如边界积分法或其它积分方程法^[4],它还可作这类积分方程的核函数。

本文在验算过程中曾得到邵辣子、彭晓林等同志的协助,谨此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] E. Reissner, Stresses and Small Displacements of Shallow Spherical Shells—Parts I and II, *Journal of Mathematical Physics*, 25, 1947, pp. 80—85, 279—300.
- [2] 何广乾,陈伏,双曲面扁壳在集中荷载作用下的简化计算,力学学报,第6卷,第1期,1963.
- [3] T. Matsui, O. Matsuoka, The Fundamental Solution in the Theory of Shallow Shells, *International Journal of Solids and Structures*, 14, 1978, No. 12, pp. 971—986.
- [4] He Guangqian, Lin Chunzhe, Tang Jun, An Integral Equation Method for the Analysis of Plates and Shells, Proceedings of International Conference on Finite Element Methods, Shanghai, China, 1982.

THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF SHALLOW SHELLS OF ARBITRARY QUADRATIC MIDDLE SURFACE

HE GUANGQIAN LIN CHUNZHE
(*Chinese Academy of Building Research*)

Summary

In this paper has been derived the fundamental solution of shallow shells of arbitrary quadratic middle surface by the method of small parameters through plane wave decomposition of the eighty order partial differential equation of the shells. The resulting fundamental solution is quite simple in presentation, relatively easy in application and the amount of computer work involved in numerical integration is also very limited. Due to the simplicity of the solution, it will become very practical in engineering analysis and convenient for shell designers as they can obtain the deformations and internal stresses of the shells in rather prompt ways.

Based upon the fundamental solution stated above, the Green's functions for the deformations and internal stresses of infinite shallow shells of arbitrary quadratic middle surface subjected to concentrated load have also been obtained. These Green's functions which are again relatively simple in presentation are indispensable in the Boundary Element Method solution of shell structures. By this method of solution, we can reduce two dimensional problems to single dimensional ones so that the order of the final matrix equation is much reduced. This will need less computer storage and computer time as by the Finite Element Methods. Furthermore, the Green's functions thus obtained can also serve as the kernel functions for other Integral Equation Methods in the analysis of shell structures.

地下旋转薄壳顶盖考虑岩体 抗力作用的计算方法

张维岳 施炳华

(中国建筑科学研究院结构所)

提 要

地下工程(如油罐、粮仓、厂房以及其它一些圆形底平面的结构)中常采用旋转薄壳(如球面壳)作为顶盖。在这类结构的计算中,考虑岩体的抗力作用是合理的,比不考虑岩体抗力作用时大大减小壳体及环梁中的拉力及弯矩。本文在文克尔假定的基础上,提出了旋转薄壳结构考虑岩体抗力作用的一种计算方法,详细地给出了壳体与环梁之间侧移及转角的变形协调方程。把岩体作用在壳体结构上的抗力集中于环梁截面形心,所得的抗推力 H_k 和抗力矩 M_k 分别为

$$H_k = -\frac{kA_a \Delta}{b}$$

$$M_k = -\frac{kI_a \psi_a}{b}$$

把这两项计入壳体与环梁的变形协调方程,导出了便于实际应用的计算公式。这些公式在形式上与现行的《钢筋混凝土薄壳顶盖与楼盖结构设计计算规程》(BJG 16-65)中的有关公式是完全统一的。按照本文方法,只要把环梁混凝土的弹性模量 E 改变为本文所导出的考虑岩体抗力作用的折算弹性模量 E_k ,则地下壳体结构的计算就跟不考虑岩体抗力作用时的计算完全一样。

一、前 言

在地下工程中常采用壳体结构作为顶盖。地下结构所承受的荷载一般比地面结构大很多,采用以受压为主的钢筋混凝土薄壳更为有利。因此,在一些跨度较大的油罐、粮仓、厂房以及其它一些圆形平面的地下结构中,旋转薄壳顶盖得到了广泛的应用。

在旋转薄壳中有球面壳、旋转抛物面壳、椭球面壳等,其中以球面壳应用最多。地面结构中旋转薄壳顶盖已有一些行之有效的计算方法,例如参考文献[1]所推荐的具体方法及其配套公式。然而,由于地下结构在结构变形过程中周围岩体的抗力对结构物起着有利的作用,可以大大减小壳体结构,特别是环梁的拉力及弯矩,因此应该在计算中考虑岩体抗力的作用。对此,本文在参考文献[1]计算方法的基础上,补充考虑了岩体抗力的影响,导出了与无抗力作用时同样简单的薄壳结构计算方法。实例计算表明,考虑抗力作用与不考虑抗力作用所得壳体结构内力计算结果相差很大。

地下结构考虑岩体抗力的计算,通常采用基于文克尔弹性地基假定并引入弹性抗力

系数 k (量纲为吨/米³) 的计算方法, 即岩体抗力 q_k 为:

$$q_k = -kw \quad (1.1)$$

其中 w 为结构某点的法向位移, 上式中的负号表明抗力 q_k 的作用方向恰好与法向位移 w 相反. 壳体顶盖所受竖向岩体压力 q_0 随岩体类别的不同而异. 在选择弹性抗力系数 k 时, 同样也随岩体类别的不同而异^[2].

当壳体结构的法向位移沿法线向外时, 岩体将对结构产生抗力, 而沿法线向内时则不产生. 因此, 在一般常用的比较扁的壳体上, 壳面部分的法向抗力是次要的, 甚至有时由于回填不够密实其产生抗力的可靠性还不是太有把握; 然而, 壳体环梁部分的水平抗力却是主要的. 在浇筑环梁部分的混凝土时, 往往就以周围的岩体壁面作为侧模, 因此在环梁与岩体交界面处产生抗力是可靠的. 于是, 我们在结构分析中, 只考虑环梁部分的水平抗力, 而不考虑壳面部分的法向抗力. 这样的简化处理, 不仅抓住了主要因素, 而且也偏于安全. 本文依此提出了简单的计算方法. 按照本文方法, 只要把环梁混凝土的弹性模量 E 改变为考虑岩体抗力作用的折算弹性模量 E_k , 其余计算过程几乎与无抗力壳体的计算完全一样.

二、 旋转薄壳的一般计算公式

按照参考文献 [1] 的近似计算公式, 旋转薄壳在轴对称荷载作用下的内力计算公式为:

$$\begin{aligned} T_\phi &= T_\phi^0 - \operatorname{ctg} \phi \left(\frac{2}{C_\alpha} M_{\phi\alpha} \eta_2 + \tilde{H}_\alpha \eta_4 \sin \phi_\alpha \right) \\ T_\theta &= T_\theta^0 - \frac{2R_{2\alpha}}{C_\alpha} \left(-\frac{M_{\phi\alpha}}{C_\alpha} \eta_4 + \tilde{H}_\alpha \eta_1 \sin \phi_\alpha \right) \\ M_\phi &= M_{\phi\alpha} \eta_3 - C_\alpha \tilde{H}_\alpha \eta_2 \sin \phi_\alpha \\ Q_\phi &= \frac{2}{C_\alpha} M_{\phi\alpha} \eta_2 + \tilde{H}_\alpha \eta_4 \sin \phi_\alpha \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中

$$\begin{aligned} C_\alpha &= 0.76 \sqrt{\delta R_{2\alpha}} \\ \eta_1 &= e^{-S/C_\alpha} \cos \frac{S}{C_\alpha} & \eta_2 &= e^{-S/C_\alpha} \sin \frac{S}{C_\alpha} \\ \eta_3 &= \eta_1 + \eta_2 & \eta_4 &= \eta_1 - \eta_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中 $R_{2\alpha}$ 为壳体边缘处的曲率半径, δ 为壳体厚度, S 为由壳体边缘处量起的经线弧长 (图 1). 当 C_α 较小时, 边界效应现象明显^[3], 采用上述方法是足够准确的. T_ϕ^0 和 T_θ^0 为按薄膜理论计算的内力, 其计算公式可按参考文献 [1] 采用. 例如球面壳在均布竖向岩体压力 q_0 作用下的壳体各点的 T_ϕ^0 和 T_θ^0 为:

$$T_\phi^0 = -\frac{q_0 R}{2} \quad T_\theta^0 = \frac{q_0 R}{2} (1 - 2 \cos^2 \phi) \quad (2.3)$$

与之相应的水平位移 (以向外为正) ΔH^0 为:

$$\Delta H^0 = \frac{T_\theta^0 R}{E \delta} \sin \phi \quad (2.4)$$