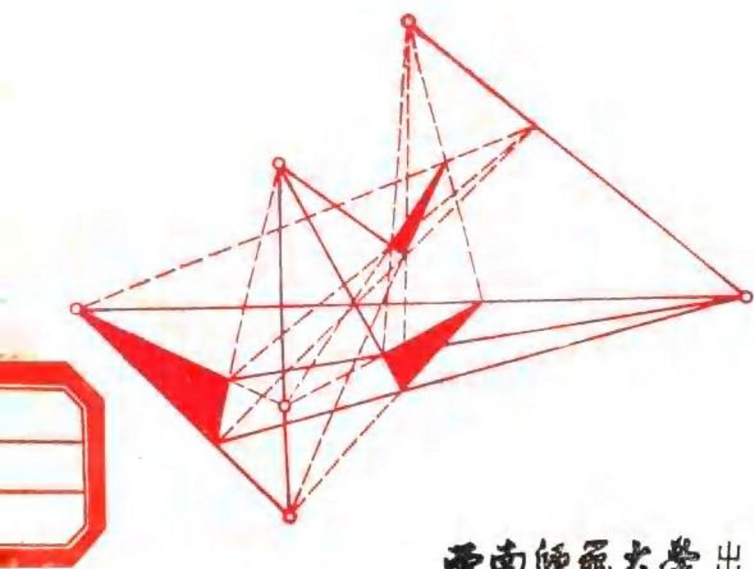


高等几何 学习指南

赵宏量 编著



西南师范大学出版社

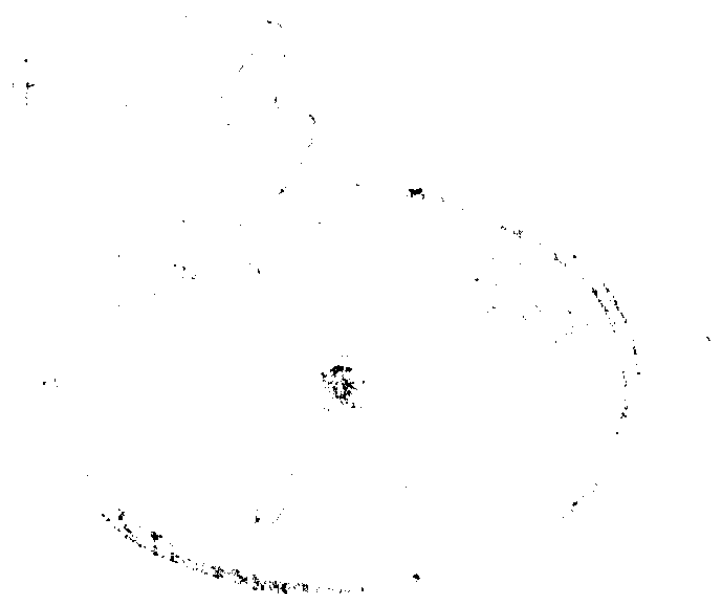
0856-1



科工委学院802 2 0046193 6

高等几何学习指南

赵宏量



西南师范大学出版社

一九八七·重庆

08569

赵宏量 编著

高等几何学习指南

西南师范大学出版社出版
(重庆 北碚)

新华书店重庆发行所发行
隆昌县印刷厂印刷

开本: $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张: 13 字数: 278 千

1987年6月第一版 1987年6月第一次印刷

印数: 1—3500

ISBN 7—5621—0075—X

G · 73

统一书号: 7405 · 29 定价: 2.64 元

前 言

本书根据高等师范院校高等几何教学大纲的要求，以及编者三十多年来从事几何教学的经验和积累的有关资料，经过若干次不同情况的教学实践，特别是近几年来通过对数学系本科、教师进修班、本科函授生、短期培训班等等各种不同形式和层次，各种不同的年龄和特征，各种不同的要求和反映的教学过践而写成。

书中全面、系统地介绍了射影几何的基本内容和研究方法。在导言中，简略地介绍了几何发展史，使读者明确几何学内容丰富，范围广大，应用面宽，引起学习这科目的兴趣。

本书内容按专题编写，共分十五课，包含了高等几何学及其选学内容的全部，而且主要是针对学习下列各项不同的高等几何学版本来进行研讨，它们是：

- (1) 孙泽瀛的《近世几何学》，
- (2) 叶菲莫夫的《高等几何学》，
- (3) 切特维鲁新的《射影几何学》，
- (4) *Busemann and kelly*《射影几何与射影测度》，
- (5) 荷尔盖蒂的《射影纯正几何学》，
- (6) 朱德祥的《高等几何》，
- (7) 梅向明等的《高等几何》，
- (8) 方德植等的《射影几何》。

同时，还吸收了大量师范院校的交流讲义的优点。因此，本书有较为广泛的适应性，它既适宜于高等师范院校有关专业的学生作为学习的主要参考书；也适合于师范专科学校、教育学院、教师进修学院、高师函授、职大、夜大等有关师生作为参考；还可以作为中学数学教师及有志自学者的参考。

本书的编写注意到教材要理论联系实际的原则。尽可能从实际出发。注意从直观和已知概念来引入问题，注意联系中学教学以及生活、生产的实际，特别注意培养和发展抽象思维的能力以及独立思考解决问题的能力。

中国数学会沈阳会议（1982）曾经指出，高等学校数学专业的学习，首先要学好数学分析、高等代数、高等几何这三门主要基础课。然而，高等几何这门课程在将近二十年的时间里被轻率地砍去，在所谓的“打倒欧家店”的错误口号影响下，各门几何学科的教学都受到了不同程度的削弱，由于这种貌似“革命”，其实荒谬的口号的影响，使得多年来几何学的教学受到了严重的善伤。使“空间形式”这一重要的组成部分搞得肢离破碎；高等几何的教材，国家长期没有出版；高等几何的教学参考书更是一本没有。这些，无疑都对目前高等几何的教学带来许多困难，因此，搞好这门学科的教材建设，既是四化建设的需要，也是每个几何教师的职责，编者就是本着这种想法来编写教材和学习参考书的。

本书的材料，从初稿于1980年问世以来，经过了多次的修改，这次正式出版，作了全面地修改，增删了不少内容，特别又增添了新的一章，这是过去教材中没有的。

本书在长期教学实践的基基上形成，采众书之长，取长

补短，删繁就简写出来的，特别着重教材分析、教学的重、难点的剖析；对教学方法的研究和探讨，注意解题技术和解题教学法，这是本书的一个特点，也是时代赋予我们的任务。

在处理方法上，既用综合法，又用代数法探讨射影几何的内容，既能发挥几何直观活生生的作用，又能使用线性代数作为驾驭一些较复杂问题的工具，这正是高等师范院校开设本课程的目的。采用这种方法讲解射影几何，不仅使学生理解两种方法的本质，而且能够掌握研究射影几何的逻辑结构，并加强几何与代数的联系和相互间的促进作用。

本书注重解决初等几何，解析几何和一些作图应用问题，学习这门课程对未来的中学教学，对自身能力的提高，都是大有帮助的。

本书承蒙我国几何界的老前辈，著名几何学家朱德祥教授的仔细审阅，提供了许多宝贵中肯的意见，使本书增色不少，在此表示衷心地感谢。

赵 宏 量

1986年6月于西南师范大学

目 录

第一课：导 论	(1)
1. 关于几何学的定义问题.....	(2)
2. 几何学所使用的方法.....	(6)
3. 几何元素及其坐标.....	(8)
4. 关于几何学的维.....	(9)
5. 射影几何学的沿革.....	(11)
6. 导言课的教学是一个不可缺少的环节.....	(12)
第二课：仿射几何的基本概念	(13)
1. 仿射变换的定义.....	(13)
2. 仿射变换的合成.....	(13)
3. 透视仿射变换下的对应图形.....	(14)
4. 仿射变换的代数表示及有关习题.....	(16)
第三课：射影空间的构造	(21)
1. 中心射影法与无穷远元素.....	(21)
2. 解释用的模型.....	(24)
3. 例题与习题.....	(27)
第四课：一维射影几何学	(33)
1. 研究的主要对象.....	(33)
2. 关于交比.....	(33)
3. 射影交换的定义.....	(37)

4. 关于透视对应·····	(39)
5. 关于对合对应·····	(39)
6. 补充教材·····	(41)
7. 例题与习题·····	(46)
第五课：几个著名的定理及其应用 ·····	(67)
1. <i>Desargues</i> 定理·····	(67)
2. 完全四点形与完全四线形·····	(68)
3. 关于 <i>Desargues</i> 定理的一些补充材料·····	(70)
4. 例题与习题·····	(72)
第六课：射影坐标系与射影变换 ·····	(92)
1. 射影坐标系·····	(92)
2. 平面内的射影变换·····	(98)
3. 例题与习题·····	(99)
第七课：几何学的群论原则、变换群 ·····	(122)
1. 变换群的概念·····	(123)
2. 射影几何和它的群·····	(123)
3. 仿射几何和它的群·····	(123)
4. 欧氏几何和它的群·····	(124)
5. 各种几何学的比较·····	(124)
6. 例题与习题·····	(125)
第八课：一维射影几何学复习提纲 ·····	(137)
1. 导论部分·····	(137)
2. 平面仿射几何部分·····	(138)
3. 射影空间的构造部分·····	(138)
4. 一维射影几何学的基本内容·····	(139)
5. 复习思考题·····	(144)

6. 几个值得进一步讨论的问题.....	(146)
〔问题 1〕平面射影几何基本定理的另证.....	(146)
〔问题 2〕有关点曲线与线曲线的问题.....	(150)
〔问题 3〕关于对偶原理的有关问题.....	(154)
〔问题 4〕关于交比的一些问题.....	(160)

第九课：二阶曲线与二级线束..... (167)

1. 二阶曲线与二级线束的定义.....	(167)
2. 二次曲线的基本定理.....	(169)
3. <i>Pascal</i> 定理与 <i>Brianchon</i> 定理.....	(171)
4. 二阶曲线与二级线束的关系.....	(175)
5. 二次曲线上的射影对应.....	(176)
6. 例题选讲.....	(178)
7. 习题及解答.....	(181)

第十课：二次曲线的配极对应..... (207)

1. 极点与极线.....	(207)
2. 配极对应.....	(209)
3. <i>Hesse</i> 定理.....	(211)
4. 例题选讲.....	(216)
5. 习题及解答.....	(222)
6. 问题的提出.....	(236)
7. 有关的结论.....	(239)
8. 有关二阶曲线的极点的定义.....	(240)
6. 平面上的配极变换.....	(241)
10. 有关配极共轭关系.....	(244)

第十一课：二次曲线的射影分类..... (246)

1. 二阶曲线的射影分类·····	(246)
2. 几个典型的化简实例·····	(249)
〔例 1〕坐标三角形与曲线相切的情形·····	(249)
〔例 2〕坐标三角形有两边与曲线相切时·····	(252)
〔例 3〕任意选取二阶曲线的一个自配极三角形为坐标 三角形时·····	(253)
〔例 4〕用几种不同方法化简的范例·····	(257)
第十二课：二阶曲线的仿射性和度量性·····	(261)
1. 仿射平面和仿射变换·····	(261)
2. 二阶曲线的仿射性·····	(262)
3. 圆锥曲线的中心、渐近线和直径·····	(263)
4. 二阶曲线的仿射分类表·····	(265)
5. 仿射么模群、面积·····	(267)
6. 二阶曲线的度量性·····	(271)
第十三课：二维射影几何学复习提纲·····	(276)
1. 古典射影几何的基本问题·····	(276)
2. 二次形象的射影性质·····	(280)
3. 配极对应·····	(284)
4. 射影分类·····	(287)
5. 二次形象的射影生成法·····	(288)
6. 二阶曲线的仿射性质和度量性质·····	(303)
第十四课：总复习例题选讲·····	(308)
1. 关于仿射几何的基本概念的例题·····	(308)
2. 一维射影几何学的有关例题·····	(313)
(包括有关中心射影、无穷远元素、交比、透视对应、 射影对应、对合对应以及若干个重要的作图问题的举例	

等.)	(340)
3. 有关 <i>Desargues</i> 定理的应用举例	(340)
(包括共点共线问题以及不可到达点的作图问题等.)...	(345)
4. 有关射影坐标与射影变换的例题	(345)
(包括射影坐标、三线坐标、重心坐标、坐标变换、射影 变换以及如何求射影变换下的固定元素等.)	(362)
5. 有关变换群与几何学的例题	(362)
6. 有关二次曲线的射影理论的例题	(367)
(包括二次曲线的极点、极线、接触点、二级线束的包 络、射影生成法、配极变换等有关理论和计算等.)...	(387)
第十五课：几点注记	(388)
1. 关于 <i>Pascal</i> 构形的探讨	(388)
2. 关于 <i>Pappus</i> 定理的证明	(395)
3. 关于对偶原理的证明	(398)

第 一 课

导 论

高等几何学是高等师范院校数学系（科）必修的一门基础课。它是继初等几何、解析几何后的一门几何课程。高等几何学有不同的涵义，有的把几何基础与射影几何合称为高等几何，例如叶菲莫夫编著的，裘光明译的《高等几何学》上、下册就是这样的。有的则单独把射影几何称为高等几何，例如苏步青编的《高等几何讲义》。又有的把射影几何与拓扑学导论称为高等几何等等。在方法上，有的编著者纯粹采用解析法，有的纯粹采用综合法，有的两者兼用，在我们编写的这本书中，采用了解析法与综合法并重的形式。这种处理方式，经验证明对于加强师范性是有益的。

师范院校高等几何学这门课程的开设，是在学生已学过初等几何、解析几何与高等代数的基础上来系统地讲授射影几何的基本知识，使学生明确射影空间的基本特征和研究方法，以及射影空间与仿射空间、欧氏空间的内在联系，从而发展几何空间概念，能够更深入地掌握初等几何与解析几何的知识，为进一步学习现代数学作准备。

这份材料是根据作者多年从事高等几何教学的积累，特别是针对各种不同情况，注意了对教材教法的探讨；同时也

对各种不同版本，不同体系的高等几何教材，提出了作者的见解。

为了叙述方便，以后本书对孙泽瀛编《近世几何学》简称“孙书”，对朱德祥编《高等几何》简称“朱书”，对梅向明等编《高等几何》简称“梅书”，对方德植等编《射影几何》简称“方书”等等。

本书在一定程度上综合了现行各种教材的基本点，使读者易于抓住要领。

更由于高等几何学在提高学生观点方面，具有独特的作用。在培养学生思考问题方面，具有巧妙灵活的特点。在联系初等几何与解析几何的教学方面，又具有直接的渊源。它在某些方面是其它课程无法谈到而作为一个中学数学教师又是应该了解的。所以我们可以把高等几何学习目的简要地概括为下面十六个字：

提高观点，扩大视野，

活跃思想，加深认识。

1. 关于几何学的定义问题

这是学习几何课程首先要涉及到的一个问题，过去的教材都称几何学是研究外部物质世界的空间形式的学科。无疑研究空间形式和与之相关的几何量的就是几何学。它的内容就是分析空间形式，然而这种说法也是极为抽象和空洞，不能令人满意的。直到最近世界著名的几何学家陈省身教授，

对于“几何”是什么？讲了下面一段话，我认为是很值得学习几何学的人参考。他说：“许多世纪以来几何的发展情况？几何当前的动态和问题？如果可能，窥测一下将来，几何是什么这个问题是不会有确切的回答的。对于《几何》这个词的含义，不同的时期和不同的数学家都有不同的看法。在欧几里德（*Euclid*）看来，几何（希腊文为γεωμετρία）是由一组公理引出的逻辑推论所组成。随着几何范围的不断扩展，这样的说法显然是不够的。1932年大几何学家*O. Veblen*说过：“数学的一个分支所以称为几何，是因为这个名称对于相当多的有威望的人，在感情和传统上看起来是好的。”这个看法，得到了法国大几何学家*E. Cartan*的热情赞同，……。”最近我的朋友，韦依（*A. Weil*）说：“从心里学角度来看，真实的几何直观也许是永远不可能弄明白的，以前它主要意味着三维空间中的形象的了解力，现在高维空间已经把比较初等的问题基本上都排除了，形象的了解力至多只能是部分的或象征性的，某种程度的触觉的想象也似乎牵涉进来了，……，现在，我们还是抛开这个问题，来看一些具体问题为好。……”

因为几何学已经从三角形发展到流形。十七世纪笛卡儿引进了坐标，引起了几何学的革命。用*H. 韦尔*的话来说，“以坐标的形式把数引进几何学，是一种暴力行为”。按他的意思，从此图形和数就会——象天使和魔鬼那样，——争夺每个几何学家的灵魂。在平面上，一点的笛卡儿坐标 (x, y) 是它到两条互相垂直的固定直线（坐标轴）的距离（带正负号）。一条直线是满足线性方程 $ax + by + c = 0$ 的点的轨迹。这样产生的后果是从几何到代数的转化。解析几何一

旦闯进了大门，别的坐标系也就纷纷登台，这里面有平面上的极坐标、空间的球坐标、柱坐标、以及平面和空间的椭圆坐标，后者适用于共焦的二次曲面的研究，特别是椭球的研究，地球就是一个椭球！

还需要有更高维数的坐标空间，虽然我们原来只习惯于三维空间，但相对论要求把时间作为第四维，描写质点的运动状态（位置和速度）需要六个坐标（速矢端线），这是一个比较初等的例子。全体一元连续函数组成一个无穷维空间，其中平方可积的函数构成一个希尔伯特（*Hilbert*）空间，它有可数个坐标。在这里我们考察具有规定性质的函数的全体，这种处理问题的手法在数学中是基本的。

由于坐标系统的大量出现，自然需要一个关于坐标的理论，一般的坐标只需要能够把坐标与点等同起来，即坐标与点之间存在一一对应，至于它是怎么来的，有什么意义，这些都不是本质的。

如果你觉得接受一般的坐标概念有困难，那么你有一个好的伙伴，爱因斯坦从发表狭义相对论（1908年）到发表广义相对论（1915年）花了七年时间。他对延迟这么久的解释是：“为什么建立广义相对论又用了七年时间呢？主要原因是：要摆脱‘坐标必须有直接的度量意义’这个旧概念是不容易的。”

在几何学研究中有了坐标这个工具之后，我们现在希望摆脱它的束缚，这就引出了流形这一重要概念，一个流形在局部上可用坐标刻划，但这个坐标系是可以任意变换的。换言之，流形是一个具有可变的或相对的坐标（相对性原则）的空间。或许我们可以用人类穿着衣服来做个比喻，“人开

始穿着衣服”是一件极端重要的历史事件，“人会改换衣服”的能力也有着同样重要的意义。如果把几何看作人体，坐标看作衣服，那么可以象下面这样描写几何进化史：

综合几何——裸体人

坐标几何——原始人

流形——现代人

由此可见，流形这一概念，是相当抽象的，即使对于数学家来说也是不简单的。

鉴于上述种种原因，所以我们如果想要给几何学下一个确切的定义，实在是不大可能。因为几何学也是随着时代在不断地发展着，展望未来，几何学还是大有可为的，我想，不管数学如何发展，时代如何进步，人们对空间形式的探索和表述是永远不会停止的，这是无法改变的。在几何学中，表现各种空间形式的便是某一特定的空间本身以及其中相应的图形，当然图形也是一个空间，从点几何学的观点看，初等几何里的各种图形都可以看成是三维欧氏空间里的点集；反之，任何已知空间的所有非空点集也可视为图形或空间。到今天，我们已经推广了图形和空间的概念，大大发展了几何理论，拓广了几何学应用的天地，几何发展到今天，空间形式变化无穷，研究几何学的方法多种多样，新的发展层出不穷。然而，作为数学三大分支的传统看法的几何学，进入六十年后受到了很大的削弱，特别反映在学校教育中，甚至是极为严重的削弱。它已经对我国数学的发展产生了一些不

良的影响。最近几年，开始在高等师范院校恢复高等几何、微分几何的教学，这可以说明几何学又开始有了生机。过去二十年来不正常的现象正在得到逐步改正，这是令人高兴的。还是让我国现代大几何学家陈省身教授一九八〇年九月兴致勃勃的一首诗来作回答吧，诗曰：

物理几何是一家，一同携手到天涯；
黑洞单极穷奥秘，纤维连络织锦霞；
进化方程孤立异，曲率对偶瞬息空；
畴算竟得千秋用，尽在拈花一笑中。

2. 几何学所使用的方法

我们说几何学的整个内容，是建立在它的公理体系的基础上的，例如初等几何就是纯粹利用一些几何公理和几何命题，从它们出发，可以不借助于代数和解析而运用逻辑推理导出一连串的定理和命题，引出一些新的概念，这就是我们熟知的**综合法**，也称为古典公理法。由于在初等几何中所列出的公理不完全，所以在推导定理的过程中，暗地里引用了一些既没有被证明过而公理中又没有的命题。有些因为在直观上看来是显然的，所以被不自觉地引用了。为克服这些缺点给出完整的公理体系，并从它出发，不凭借任何直观，完全逻辑地展开几何内容的推导。这便是近代公理法，概括起来说，利用若干基本概念，包括**元素**和**联系**，以及若干公