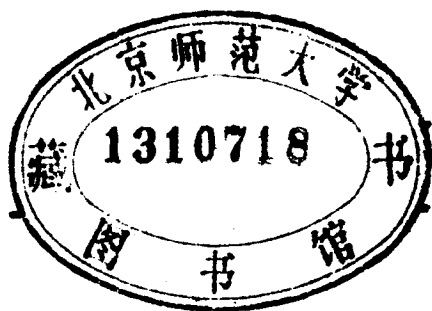


Lie群及其Lie代数

严志达 许以超

JJ1139118



高等教育出版社

本书是在严志达著《李群和微分几何》(人民教育出版社, 1960年)的基础上改写并扩充而成。

全书共有五章。第一章介绍 Lie 群的基本概念和初步性质; 第二章介绍紧 Lie 群的分类; 第三章介绍紧 Lie 群的自同构群和紧 Lie 代数的有限维复表示论; 第四章给出了紧 Lie 代数的对合自同构的共轭分类; 第五章介绍实半单 Lie 代数的分类及其自同构群。

本书前三章可作为数学系高年级的选修课教材或研究生基础课一学期的教材; 后两章可作为研究生较专门课程一学期的教材, 也可供有关数学工作者参考。

Lie 群及其 Lie 代数

严志达 许以超

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
河北省香河印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 10.625 字数 250,000

1985 年 10 月第 1 版 1985 年 10 月第 1 次印刷

印数 00,001—4,550

书号 13010·01097 定价 2.45 元

序

本书是在严志达 1960 年所写的介绍性小册子《李群和微分几何》的基础上改写并扩充而成。作为教科书，本书初稿在 1982 年为中国科学技术大学、1983 年为中国科学院研究生院以及南开大学，1984 年为北京大学等四个单位的数学系研究生开的“Lie 群”课上分别讲过一遍，再由著者根据教学实践的情况加以修改和整理定稿。

全书共分五章。第一章介绍了 Lie 群的基本概念和初步性质；第二章详细介绍了紧 Lie 群的分类；第三章详细介绍了紧 Lie 群的自同构群和紧 Lie 代数的有限维复表示论；第四章给出了紧 Lie 代数的对合自同构的共轭分类，这是为下一章作准备的；第五章详细介绍了实半单 Lie 代数的分类及其自同构群。前三章可以作为一般研究生的基础课一学期教材，后两章可以作为研究生较专门课程一学期教材。

由于紧半单 Lie 代数的分类和复半单 Lie 代数的分类完全一致，所以本书实际上也给出了复半单 Lie 代数的分类和表示。但是我们略去了复半单 Lie 代数的判定条件以及基本表示的具体实现，这可参考万哲先编著的《李代数》（科学出版社，1964 年）一书。

作为一本教科书，由于篇幅的限制，我们略去了一些重要定理的证明。这特别体现在第一章中。不过我们认为这样并不会影响全书的完整性。另外，我们也不得不删去实半单 Lie 代数理论中的重要部分：Satake 图以及实半单 Lie 群理论中的重要部分——对称 Riemann 空间以及紧 Lie 群的表示的特征理论。

需要指出的是：由于实半单 Lie 群和它所确定的对称

Riemann 空间几乎包括了经典几何中所涉及的所有空间,因此这个理论在近年来表现出了它的重要性以及在很多方面的应用. 这不仅限于纯粹数学的许多领域,在物理中也有着决定性的作用. 所以它成为很多数学工作者所必须具备的基础知识之一. 它的进一步发展,例如: **Lie** 群的无限维表示和调和分析,离散子群和自守函数论,齐性空间和其上的函数论,无限维 **Lie** 代数及一般域上 **Lie** 代数理论,以及 **Lie** 群理论推广到代数群等等,使 **Lie** 群理论和代数、几何、分析等各方面密切相关,而且发展非常迅速.

孟道骥同志在南开大学对 **Lie** 群研究生用此稿子试教了一年,在试教过程中提出了许多宝贵的修改意见,并且承担了抄写和校对工作. 著者在此表示感谢. 同时,对编辑、排版及印刷的同志也表示感谢. 本书错误难免,欢迎读者指正.

严志达、许以超

1984年1月1日

目 录

第一章 Lie 群	1
§ 1.1 拓扑群.....	1
§ 1.2 Lie 群的定义和重要例子.....	11
§ 1.3 Lie 群的局部性质.....	23
§ 1.4 子群和单参数子群.....	39
§ 1.5 同态和同构.....	54
§ 1.6 覆盖群.....	62
§ 1.7 表示和伴随表示.....	74
§ 1.8 商空间和商群.....	90
第二章 紧 Lie 群的结构	99
§ 2.1 约化 Lie 群的分解.....	99
§ 2.2 紧 Lie 群的不变内积.....	105
§ 2.3 紧 Lie 代数的 Cartan 子代数.....	112
§ 2.4 实紧 Lie 群的 Cartan 子群的共轭性.....	138
§ 2.5 紧 Lie 代数的分类.....	155
第三章 紧 Lie 群的自同构群和表示论	166
§ 3.1 紧 Lie 代数的自同构群.....	166
§ 3.2 紧 Lie 代数的复表示论.....	203
§ 3.3 紧 Lie 代数的实表示论.....	224
第四章 紧半单 Lie 代数的对合自同构	236
§ 4.1 紧半单 Lie 代数的特征子代数.....	236
§ 4.2 紧半单 Lie 代数的对合自同构.....	245
§ 4.3 紧单 Lie 代数的对合自同构的标准形.....	260
§ 4.4 紧单 Lie 代数的对合自同构决定的特征子代数的结构.....	277

第五章 实半单 Lie 代数的构造	300
§ 5.1 复 Lie 代数的实形式	300
§ 5.2 实半单 Lie 代数的 Cartan 分解的存在性及共轭性	308
§ 5.3 实半单 Lie 代数的分类	319
§ 5.4 实半单 Lie 代数的自同构群	327

第一章 Lie 群

§ 1.1 拓 扑 群

定义 Hausdorff 拓扑空间 G 中如果能引进乘法, 使 G 构成一个群, 且映射 $(x, y) \rightarrow xy^{-1}$ 是 $G \times G$ 到 G 上的连续映射, 则 G 称为拓扑群.

例 1 n 维实(或复)Euclid 空间 R^n (或 C^n)按向量加法构成拓扑群. 它是可交换群.

例 2 通常的群按离散拓扑构成拓扑群.

一般地说, 拓扑群都是无限群. 显然, 有限群作为拓扑群, 它的拓扑必然离散.

由定义可知, 任取 $g \in G$, 则

$$L_g: x \rightarrow gx, \quad \forall x \in G$$

及

$$R_g: x \rightarrow xg, \quad \forall x \in G$$

都是拓扑群 G 的自同胚. L_g 称为左平移, R_g 称为右平移. 它们有性质

$$L_g^{-1} = L_{g^{-1}}, \quad R_g^{-1} = R_{g^{-1}}, \quad \forall g \in G.$$

记

$$\text{ad}g = L_g R_g^{-1}, \quad \forall g \in G$$

则 $\text{ad}g$ 不仅仅是拓扑群 G 的自同胚, 而且是拓扑群 G 的普通的同构.

由拓扑群的定义, 显然有

引理 1.1.1 设 e 为拓扑群 G 的单位元素, 则存在 e 的基本

邻域组 $\mathcal{U}$, 它适合下面条件

$$(1) \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \{e\};$$

(2) 任取 $U, V \in \mathcal{U}$, 则存在 $W \in \mathcal{U}$, 使得

$$W \subset U \cap V;$$

(3) 任取 $U \in \mathcal{U}, g \in G$, 则存在 $V \in \mathcal{U}$, 使得

$$gVg^{-1} \subset U;$$

(4) 任取 $U \in \mathcal{U}$, 则存在 $V \in \mathcal{U}$, 使得

$$V^{-1} \subset U;$$

(5) 任取 $U \in \mathcal{U}$, 则存在 $V \in \mathcal{U}$, 使得

$$V^2 \subset U.$$

这里 $V^{-1} = \{v^{-1} \in G \mid \forall v \in V\}$, $gVg^{-1} = \{gvg^{-1} \in G \mid \forall v \in V\}$,

$V^2 = \{v_1v_2 \in G \mid \forall v_1, v_2 \in V\}$. 一般, 我们记 G 中两子集 S_1, S_2 的乘积

$$S_1S_2 = \{s_1s_2 \in G \mid \forall s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}.$$

对拓扑群 G 中任一点 g , 它有基本邻域组

$$\mathcal{U}_g = \{gU \mid \forall U \in \mathcal{U}\},$$

也有基本邻域组

$$\mathcal{U}'_g = \{Ug \mid \forall U \in \mathcal{U}\}.$$

这些结论由左平移 L_g 及右平移 R_g 都是拓扑群 G 的自同胚推出, 由此可知自同胚 L_g 及 R_g 的重要性.

拓扑群有下面基本性质

引理 1.1.2 拓扑群 G 作为拓扑空间, 它是正则拓扑空间.

证 要证拓扑群 G 中, 对任一闭集 F 及一点 $p \notin F$, 一定存在两个不相交的开集将闭集 F 与点 p 分离.

由于左平移为自同胚, 所以无妨取点 p 为 G 的单位元素 e . 今 F 为 G 中闭集, 所以 $G \setminus F = O$ 为 G 中开集, 它包含了 e , 由于 $e \cdot e^{-1}$

$=e$, 于是存在 e 的开邻域 V , 使得 $VV^{-1} \subset O$.

我们来证 $\bar{V} \subset O$. 任取 $g \in \bar{V}$, 则点 g 的邻域 gV 有 $gV \cap V \neq \emptyset$. 取 $a \in gV \cap V$, 则存在 $b \in V$, 使 $a = gb$, 即 $g = ab^{-1} \in VV^{-1} \subset O$. 这就证明了 $\bar{V} \subset O = G \setminus F$. 于是 G 中开集 $U = G \setminus \bar{V} \supset F$, 且 $U \cap V = \emptyset$. 这证明了 G 中闭集 F 及单位元素 e 可分别用开集 U 及 V 分离. 引理证完.

引理 1.1.3 任取正整数 n 及 $U \in \mathcal{U}$, 则存在 $V \in \mathcal{U}$, 使得 $V^{-1} = V, V^n \subset U$.

证 今 $e^n = e$, 由拓扑群乘法的连续性可知, 对 G 的单位邻域 U , 存在单位邻域 $V_1, V_2, \dots, V_n$, 使得 $V_1 V_2 \cdots V_n \subset U$. 取 $V_0 = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$, 它仍为单位邻域. 显然 $V_0^n \subset V_1 V_2 \cdots V_n \subset U$.

由于拓扑群的取逆运算 $g \rightarrow g^{-1}$ 为自同胚, 而 $e^{-1} = e$, 所以对单位邻域 V_0, V_0^{-1} 也是单位邻域. 取 $V = V_0 \cap V_0^{-1}$, 它仍为单位邻域. 且显然 $V^{-1} = V, V^n \subset V_0^n \subset U$. 这就证明了引理.

引理 1.1.4 连通拓扑群 G 由任一单位邻域 U 生成. 确切地说, 有

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n.$$

证 存在单位开邻域 $V \subset U$, 今 $V^n, n=1, 2, \dots$ 都是单位开邻域, 所以 $V_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$ 为 G 中开集. 由于拓扑群 G 连通, 所以为了证明 $V_0 = G$, 只要证 V_0 为 G 中闭集即可.

任取 $g \in \bar{V}_0$, 则 gV^{-1} 为 g 的邻域, 所以有 $gV^{-1} \cap V_0 \neq \emptyset$. 由 $V_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$, 所以存在正整数 m , 使得 $gV^{-1} \cap V^m \neq \emptyset$. 这证明了 $g \in V^{m+1} \subset V_0$, 即证明了 $\bar{V}_0 \subset V_0$. 所以 $V_0 = G$.

显然 $G \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n = V_0 = G$. 至此证明了 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$.

引理证完.

定义 拓扑群 G 的子集, 如果对群的运算构成子群(或正规子群), 且按拓扑空间 G 的诱导拓扑, 它仍为拓扑群, 称为拓扑群的子群(或正规子群).

引理 1.1.5 设拓扑群 G 局部连通, 则它的单位分支(即 G 作为拓扑空间, 含单位元素 e 的连通分支) G_e 为 G 的开正规子群. 且 G 的任一连通分支可以记作 gG_e , 其中 g 为这个连通分支的代表元素.

证 由于任取 $g \in G_e$, 则 L_g 为 G 的自同胚, 所以 $L_g^{-1}(G_e) = g^{-1}G_e$ 仍为 G 的连通分支. 然而, $e = g^{-1}g \in g^{-1}G_e$. 这证明了 $g^{-1}G_e$ 仍为 G 的单位连通分支. 所以 $g^{-1}G_e = G_e, \forall g \in G_e$. 这就证明了 $G_e^{-1}G_e = G_e$, 即 G_e 为 G 的子群.

再任取 $g \in G$, 则由于 $\text{ad } g$ 为 G 的自同胚, 所以 $(\text{ad } g)G_e = gG_e g^{-1}$ 仍为 G 的连通分支. 然而 $e = geg^{-1} \in gG_e g^{-1}$, 这证明了 $gG_e g^{-1} = G_e, \forall g \in G$. 即证明了 G_e 为 G 的正规子群.

由于左平移为自同胚, 所以引理的后一断言显然成立, 引理证完.

引理 1.1.6 拓扑群 G 的开子群必闭, 且当 G 局部连通时, 则为 G 的一些连通分支之并.

证 显然只证前一断言即可. 今设拓扑群 G 的子群 H 为开子集. 任取 $g \in G \setminus H$, 则 $L_g(H) = gH$ 仍为 G 中开集, 由于 H 为子群, 所以 $gH \cap H = \emptyset$. 且

$$\left(\bigcup_{g \in G \setminus H} gH \right) \cap H = \emptyset, \left(\bigcup_{g \in G \setminus H} gH \right) \cup H = G.$$

今由 $\bigcup_{g \in G \setminus H} gH$ 为 G 的开子集, 它的补集为 H , 所以 H 为 G 的闭子集. 引理证完.

引理 1.1.7 拓扑群 G 的子群 (正规子群) H 的闭包 $\bar{H}$ 必为 G 的闭子群 (闭正规子群).

证 显然, 只要证 $H\bar{H}^{-1}=H$ 即可. 今任取 $a, b \in H$. 任取 ab^{-1} 的邻域 W , 由于 $(x, y) \rightarrow xy^{-1}$ 连续, 所以存在 a 的邻域 U 及 b 的邻域 V , 使得 $UV^{-1} \subset W$. 由于 $a, b \in H$, 所以 $U \cap H \neq \emptyset, V \cap H \neq \emptyset$, 即存在 $c \in U \cap H, d \in V \cap H$, 而 $cd^{-1} \in HH^{-1}=H$, 又 $cd^{-1} \in UV^{-1} \subset W$, 这证明了 $W \cap H \neq \emptyset$. 所以 $ab^{-1} \in H$, 即 $H\bar{H}^{-1} \subset H$. 引理证完.

引理 1.1.8 拓扑群 G 的中心

$$C = \{c \in G \mid gc = cg, \forall g \in G\}$$

是 G 的闭正规子群.

证明是很容易的, 在此略去.

引理 1.1.9 连通拓扑群的离散正规子群 Γ 必包含在 G 的中心 C 里.

证 任取 $\gamma \in \Gamma$, 由于 Γ 为正规子群, 所以 $g \rightarrow g\gamma g^{-1}$ 给出了 G 到 Γ 内的连续映射. 但是 G 连通, Γ 离散, 所以 $g\gamma g^{-1} = e\gamma e^{-1} = \gamma$. 这证明了 $\gamma g = g\gamma$, 即 $\gamma \in C$. 证完.

定义 拓扑群 G_1 到拓扑群 G_2 内的单值映射, 如果是普通的群同态, 又是拓扑空间的连续映射, 则称为拓扑群的同态映射, 这时称拓扑群 G_1 和 G_2 同态.

如果拓扑群 G_1 到拓扑群 G_2 上的一一映射是普通的群同构, 又是拓扑空间的同胚映射, 则称为拓扑群的同构映射, 这时称拓扑群 G_1 和 G_2 同构.

显然, 同态关系有传递性, 而同构关系是等价关系. 拓扑群在同构下的分类是拓扑群的根本问题. 只有在极强的拓扑群类, 才解决了同构分类问题.

为了建立同态基本定理, 需要引进旁集空间, 即商空间的

概念.

记 H 为拓扑群 G 的闭子群, G 关于 H 的左旁集空间

$$\{gH \mid \forall g \in G\}$$

记作 G/H . 于是可以定义单值映射

$$\pi: g \rightarrow gH$$

它将 G 映到旁集空间 G/H 上. 映射 π 称为自然映射.

可以证明, 在旁集空间 G/H 中存在最细的拓扑结构, 使得 π 为连续映射. 由于这时 H 为闭子群, 所以这个拓扑为 Hausdorff 拓扑空间, 且可以证明这时自然映射 π 为开映射. 这时旁集空间 G/H 称为拓扑群 G 关于闭子群 H 的商空间.

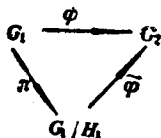
定义 记 H 为拓扑群 G 的闭正规子群. 则商空间 G/H 对 G 的乘法运算, 诱导了普通的商群. 易证这时 G/H 仍为拓扑群, 称为拓扑群 G 关于闭正规子群 H 的商群.

回到拓扑群的同态的定义. 设拓扑群 G_1 到拓扑群 G_2 内有同态映射 φ . 记拓扑群 G_i 的单位元素为 e_i , $i=1, 2$. 则同态核 $\varphi^{-1}(e_2)$ 为拓扑群 G_1 的闭正规子群, 又同态像 $\varphi(G_1)$ 为拓扑群 G_2 的子群.

定理 1.1.10 (同态基本定理) 设 φ 为拓扑群 G_1 到拓扑群 G_2 上的开同态, 记 $H_1 = \varphi^{-1}(e_2)$ 为同态核, 则存在商群 G_1/H_1 到 G_2 上的同构 $\tilde{\varphi}$, 使得对自然映射 $\pi: G_1 \rightarrow G_1/H_1$, 有

$$\varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi.$$

换句话说,



为交换图.

证 任取 $g_1 \in G_1$, 则 $\varphi(g_1) = g_2 \in G_2$, 且 $\varphi^{-1}(g_2) = g_1 H_1 \in G_1/H_1$.

定义商群 G_1/H_1 到拓扑群 G_2 上的映射

$$\tilde{\varphi}: g_1 H_1 \rightarrow \varphi(g_1)$$

易证它是拓扑群 G_1/H_1 到 G_2 上的同构.

今自然映射 π 的定义为 $\pi(g_1) = g_1 H_1, \forall g_1 \in G_1$,

于是

$$\varphi(g_1) = \tilde{\varphi}(g_1 H_1) = \tilde{\varphi}(\pi(g_1)) = (\tilde{\varphi} \circ \pi)(g_1), \forall g_1 \in G_1.$$

这证明了 $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$. 定理证完.

由同态基本定理可知同态与闭正规子群密切相关. 在引理 1.1.5 和引理 1.1.6 中已经证明了拓扑群的单位分支为闭正规子群. 进一步, 我们有

引理 1.1.11 拓扑群 G 关于单位分支 G_e 的商群为完全不连通群.

证明很容易, 在此从略.

最后, 引进齐性空间的概念.

定义 拓扑空间 $\mathfrak{M}$ 上一批自同胚构成的拓扑群 G , 使 $G \times \mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{M}$ 上的映射 $(g, x) \rightarrow g(x)$ 连续, 这里 $g \in G, x \in \mathfrak{M}$. 则拓扑群 G 称为拓扑空间 $\mathfrak{M}$ 上的连续变换群.

设拓扑群 G 为拓扑空间 $\mathfrak{M}$ 上的连续变换群. 对 $\mathfrak{M}$ 中任一点 p , 则

$$\{g(p) \mid \forall g \in G\}$$

为 $\mathfrak{M}$ 中子集, 并称为 G 的过点 p 的轨道.

显然, 任两不同的轨道互不相交, 且拓扑空间 $\mathfrak{M}$ 为 G 的所有轨道之併集. 对任一轨道按诱导拓扑构成拓扑空间, G 中元诱导了此轨道上的自同胚, 所有这种自同胚仍构成拓扑群, 它为此轨道上的连续变换群.

最特殊的例子是 $\mathfrak{M}$ 由 G 的一个轨道组成. 确切地说, 我们可以引进下面一系列概念.

若 G 在 $\mathfrak{M}$ 上可递, 即对 $\mathfrak{M}$ 中任两点 x, y 存在 $g \in G$, 使得 $g(x) = y$, 则 $\mathfrak{M}$ 称为齐性空间. 这时取定 $\mathfrak{M}$ 中一点 x , 则

$$H_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$$

称为点 x 的迷向子群.

显然, 设 $\mathfrak{M}$ 为齐性空间, 则任一点的迷向子群为闭子群. 且对 $\mathfrak{M}$ 上可递连续变换群 G , 则任两迷向子群在 G 下共轭. 确切地说: 对 $\mathfrak{M}$ 中任两点 x, y 存在 $g \in G$, 使 $y = g(x)$. 则点 x 及 y 的迷向子群 H_x 及 H_y 有

$$H_y = H_{g(x)} = gH_xg^{-1}.$$

定义 Hausdorff 拓扑空间 X 称为仿紧的, 如果 X 是可数个紧集之并, 且 X 是局部紧的, 即对 X 中每一点 x , 必存在点 x 的邻域 U_x , 使 U_x 的闭包 $\bar{U}_x$ 是紧的.

我们有

定理 1.1.12 设 $\mathfrak{M}$ 为齐性空间, G 为 $\mathfrak{M}$ 上可递连续变换群. 设 $\mathfrak{M}$ 及 G 作为拓扑空间都是仿紧拓扑空间. 则有

(1) 对 $\mathfrak{M}$ 中任取一点 x , 则点 x 的迷向子群 H_x 中 G 的正规子群只有 $\{e\}$.

(2) 商空间 G/H_x 到齐性空间 $\mathfrak{M}$ 内的映射

$$\varphi: gH_x \rightarrow g(x), \quad \forall g \in G$$

是 G/H_x 到 $\mathfrak{M}$ 上的同胚映射.

证明极繁, 在此从略.

由这个定理知, 在仿紧条件下, 齐性空间 $\mathfrak{M}$ 和商空间 G/H_x 有相同的拓扑结构, 所以为了研究 $\mathfrak{M}$, 只要研究 G/H_x 就可以了.

我们再来考察 G 在 $\mathfrak{M}$ 上的作用诱导了 G/H_x 上的什么变换. 今任取 $a \in G$, 则 $\varphi(aH_x) = a(x)$, 取定 $g \in G$, 则在商空间 G/H_x 上引进映射

$$\mathcal{A}_g: aH_x \rightarrow gaH_x,$$

易证这时 $\mathcal{A}_g$ 为 G/H_* 上自同胚, 且有 $g \circ \varphi(aH_*) = g(\varphi(aH_*)) = ga(x) = \varphi(gaH_*) = \varphi \circ \mathcal{A}_g(aH_*)$, $\forall a \in G$.

这证明了

$$g \circ \varphi = \varphi \circ \mathcal{A}_g, \quad \forall g \in G.$$

由于在定理 1.1.12 的条件下, φ 为同胚, 于是

$$\mathcal{A}_g = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi, \quad \forall g \in G$$

为 G/H_* 上的自同胚. 记

$$\mathcal{A}_G = \{\mathcal{A}_g | \forall g \in G\},$$

即

$$\mathcal{A}_G = \varphi^{-1} \circ G \circ \varphi,$$

容易证明 $g \rightarrow \mathcal{A}_g$, $\forall g \in G$ 定义了 G 到 $\mathcal{A}_G$ 上的同态映射. 在这意义下, 我们可以仍用 g 表示 $\mathcal{A}_g$, $\forall g \in G$, 即 G 为 G/H_* 上一批自同胚构成的拓扑群, 它是 G/H_* 上可递连续变换群.

从上面讨论, 使我们可以对拓扑群 G 不加仿紧条件, 来讨论 G 关于闭子群 H 的商空间 G/H .

首先, 在商空间 G/H 上引进自同胚 $\mathcal{A}_g: aH \rightarrow gaH$, $\forall a \in G$, 它们全体构成集合

$$\mathcal{A}_G = \{\mathcal{A}_g | \forall g \in G\}.$$

显然, 在 $\mathcal{A}_G$ 中引进乘法

$$\mathcal{A}_a \mathcal{A}_b = \mathcal{A}_{ab}, \quad \forall a, b \in G,$$

则有

$$\mathcal{A}_g^{-1} = \mathcal{A}_{g^{-1}}, \quad \forall g \in G,$$

且 $\mathcal{A}_G$ 为普通的群. 引进拓扑群 G 到普通群 $\mathcal{A}_G$ 上的普通同态 $g \rightarrow \mathcal{A}_g$. 在 $\mathcal{A}_G$ 中引进拓扑, 使这个映射 $g \rightarrow \mathcal{A}_g$ 为连续映射, 则不难证明这时 $\mathcal{A}_G$ 为拓扑群, 且映射 $g \rightarrow \mathcal{A}_g$ 为连续开映射, 它是拓扑群 G 到拓扑群 $\mathcal{A}_G$ 上的同态映射. 另一方面, 还可证 $\mathcal{A}_G$ 为商空间 G/H 上可递连续变换群, 使点 eH 的迷向子群为 $\mathcal{A}_H$.

引理 1.1.13 拓扑群 G 到拓扑群 $\mathcal{A}_G$ 上的同态映射

$$g \rightarrow \mathcal{A}_g,$$

它的同态核为

$$N = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}.$$

容易证明, N 为 G 的闭子群 H 中 G 的最大正规子群.

证 由定义*

$$N = \{g \in G \mid \mathcal{A}_g = \text{id}_{G/H}\}.$$

今任取 $a \in G$, 则 $\mathcal{A}_g(aH) = aH$ 当且仅当 $gaH = aH$, 即当且仅当 $g \in aHa^{-1}$ 时, $\mathcal{A}_g(aH) = aH$. 所以证明了

$$N = \bigcap_{a \in G} aHa^{-1} \subset eHe^{-1} = H,$$

其中 e 为拓扑群 G 的单位元素. 由 N 的表达式立即可证 N 为 H 中 G 的最大正规子群. 引理证完.

很自然地要提出这样的问题: 设 $g_1, g_2 \in G$, 则 $\mathcal{A}_{g_1} = \mathcal{A}_{g_2}$ 的充分必要条件是什么? 设 $a \in G$, 则 $\mathcal{A}_{g_1}(aH) = \mathcal{A}_{g_2}(aH)$ 当且仅当 $g_1aH = g_2aH$, 当且仅当 $g_2^{-1}g_1 \in aHa^{-1}, \forall a \in G$, 即当且仅当 $g_2^{-1}g_1 \in N$. 此即 g_1 和 g_2 属于 G 关于闭正规子群 N 的同一个左旁集.

由此可知, 若 $N = \{e\}$, 则 $\mathcal{A}_{g_1} = \mathcal{A}_{g_2}$ 当且仅当 $g_1 = g_2$, 即 $g \rightarrow \mathcal{A}_g$ 为拓扑群 G 到 $\mathcal{A}_G$ 上的同构.

为了简化符号, 我们将 $\mathcal{A}_g$ 看作是 g , 即 $\mathcal{A}_g(aH) = g(aH) = \langle ga \rangle H$. 这时拓扑群 G 可看作商空间 G/H 上的自同胚集. 我们称 G 作用于 G/H 上.

当 $N = \{e\}$, 即 H 中 G 的正规子群只有 $\{e\}$ 时, G 中不同元素在 G/H 上作用不同. 这时称 G 在 G/H 上作用有效. 否则, 即当 $N \neq \{e\}$ 时, 称 G 在 G/H 上作用非有效.

* 本书记 id_G 为集合 G 的恒等映射, 有时简记作 id .