高等学校教学参考用书

地球形状及外部重力场

下册

管泽霖　宁津生　编

测绘出版社

地球形状及外部重力场

下　　册

管泽霖　宁津生编

测绘出版社

本书共分六部分叙述，前三部分已编入上册，现将利用地面资料研究全球重力场及地球形状的方法，卫星重力学以及地球重力固体潮三部分编为下册，全书介绍问题系统，阐述较为详尽，说理清晰，公式推导较简明。

本书可供有关高等院校作教材或教学参考用书，也可作为大地测量，天文、地球物理及空间技术等有关方面的科技人员参考。

地球形状及外部重力场（下册）

管泽霖　宁津生编

*

测绘出版社出版

北京市朝阳区会中寺印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本787×1092 1/32·印张13 1/2·字数300千字

1981年12月第一版·1983年11月第2次印刷

印数3,501—5,800册·定价1.45元

统一书号：15039·新201

目　录

第四部分　利用地面资料研究全球重力场及地球形状的方法

第五部分　卫星重力学

第六部分　地球重力固体潮

第四部分　利用地面资料研究全球重力场及地球形状的方法

第十二章　利用地面资料确定全球重力场

§12-1　概　述

研究地球形状及其外部重力场，两者是一个不可分割的整体。所谓研究地球形状有几种不同的含义，例如可以将地球形状当作一个圆球、椭球体、三轴椭球体、梨形体来研究，也可将它当作均衡面、大地水准面以及真正地球表面来研究。这些都可以称为研究地球形状。在我们这里研究这个问题是指确定大地水准面或真正地球表面的形状。

如果单纯地用传统的几何法，即应用大陆上的弧度测量资料来确定地球形状，则由于大陆只占整个地球的30%左右，同时各个大陆或各个国家之间的天文大地网不一定联系得很好或互不联系，因此使确定地球形状的工作存在着一定的困难。据此解出的椭球体就其大小和形状来说也不是平均地球椭球体。

地面重力测量资料也可以用来确定地球形状，例如可以按斯托克司公式和维宁·曼尼兹公式用全球重力异常计算大地水准面差距和垂线偏差等等。由于可以通过海洋重力测量

和航空重力测量获得海洋上和陆地困难地区的重力资料，所以它所获得观测资料的范围要比陆地上大地测量的范围广泛多了。由此可知，若综合应用地面天文大地和重力测量资料来确定地球形状，则比单纯采用几何法来确定具有更多的优越性。当然现时在地球上很大部分的地区内尚缺乏重力资料，尤其是海洋和陆地困难地区更是如此，因此近年来对发展海洋和航空重力测量给予很大的注意。

本书的这一部分，主要讨论利用地面重力资料以及一并利用天文大地和重力资料来确定地球形状的方法。其次还讨论利用地面重力资料确定空中重力场的问题。

这一部分与第三部分不同之处在于第三部分是确定一个国家或地区的地球形状，称为区域性地球形状的研究，而这一部分则是以整个地球为研究对象，称为全球地球形状的研研。

§12-2 用球函数解算边值问题，斯托克司级数

一、斯托克司级数

在§6-5中，我们曾用格林方法解算了边值问题，求出了扰动位，导得了用积分形式表示的计算大地水准面差距的斯托克司公式。除此之外，还可以用球函数方法来解算边值问题，用级数形式来表示大地水准面差距，称为斯托克司级数。它与斯托克司积分公式是等值的。在确定地球形状及其外部重力场时经常用到它，所以首先来讨论这个问题。

我们利用单元立体角 $d\omega$ 来代替面元 $d\sigma$。对于半径为 R 的球面有：

$$d\sigma = R^2 d\omega \tag{12-2-1}$$

上式按（6-2-10）式求得。将它代入（1-76）式中，并将V，及$f(\theta',\lambda')$分别用外部扰动位T及球面上的扰动位T_R来表示，则可写出

$$T=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^{n+1}}{\rho^{n+1}}\frac{2n+1}{4\pi}\int_{\sigma}T_R P_n(\cos\psi)d\omega \qquad (12\text{-}2\text{-}2)$$

设$T_n=Y_n$，则（1-78）式为

$$T_n=\frac{2n+1}{4\pi}\int_{\sigma}T_R P_n(\cos\psi)d\omega \qquad (12\text{-}2\text{-}3)$$

将它代入（12-2-2）式中，则得

$$T=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^{n+1}}{\rho^{n+1}}T_n \qquad (12\text{-}2\text{-}4)$$

式中
$$T_n=A_n P_n(\cos\theta)+\sum_{k=1}^{n}(A_n^k\cos k\lambda + B_n^k\sin k\lambda)P_n^k(\cos\theta) \qquad (12\text{-}2\text{-}5)$$

为了说明方便起见，将上式中的A_n、A_n^k及B_n^k称为位球函数系数或位系数。

顺便提及，将（12-2-4）和（12-2-5）式与第五章的引力位的球函数展开式（5-1-19）式比较，立刻可以看出这里的位球函数系数与第五章中的位系数$\overline{A}_n$，$\overline{A}_n^k$及$\overline{B}_n^k$（为了避免混淆，这里将第五章的位系数改用$\overline{A}_n$，$\overline{A}_n^k$及$\overline{B}_n^k$来表示）有如下的关系：

$$\overline{A}_n=R^{n+1}A_n$$
$$\overline{A}_n^k=R^{n+1}A_n^k$$
$$\overline{B}_n^k=R^{n+1}B_n^k$$

将（12-2-4）式对ρ取导数，得

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{\rho^{n+2}}(n+1)T_n \qquad (12\text{-}2\text{-}6)$$

由于第六章在解第三边值问题时采用了平均椭球体，而平均椭球体的质量与地球的质量相等，平均椭球体的中心与地球的质心重合，所以在扰动位中不包含零阶和一阶球函数。这样当 $\rho = R$时，(12-2-4)及(12-2-6)式为：

$$T_0 = \sum_{n=2}^{\infty} T_n \qquad (12\text{-}2\text{-}7)$$

$$\left.\frac{\partial T_0}{\partial \rho}\right|_{\rho=R} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{R} T_n \qquad (12\text{-}2\text{-}8)$$

将上两式代入(6-4-8)式中，得

$$g_0 - \gamma_0 = -\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{R} - \frac{n+1}{R}\right)T_n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{R} T_n \qquad (12\text{-}2\text{-}9)$$

我们就利用这个边值条件按球函数方法解算在球外是调和的并在无穷远是正则的扰动位 T，该函数在球面上满足条件(12-2-9)式。

由于重力异常 $g_0 - \gamma_0$ 是扰动位 T_0 的函数，所以也可以将它写成球函数展开式。在形式上它与扰动位的展开式相似，但球函数的系数是不一样的，这里用 a_n、a_n^k 及 b_n^k 来表示，称为重力异常的球函数系数，因此重力异常球函数展开式的一般形式为：

$$g_0 - \gamma_0 = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta g_n \qquad (12\text{-}2\text{-}10)$$

$$\Delta g_n = a_n P_n(\cos\theta) + \sum_{k=1}^{n} (a_n^k \cos k\lambda + b_n^k \sin k\lambda) P_n^k(\cos\theta) \qquad (12\text{-}2\text{-}11)$$

按附录一（1-67）式，上式中的系数a_n、a_n^k及b_n^k分别为：

$$\left.\begin{aligned}a_n&=\frac{2n+1}{4\pi}\int_\sigma(g_0-\gamma_0)P_n(\cos\theta')d\omega\\a_n^k&=\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int_\sigma(g_0-\gamma_0)\\&\quad\cdot P_n^k(\cos\theta')\cos k\lambda'd\omega\\b_n^k&=\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int_\sigma(g_0-\gamma_0)\\&\quad\cdot P_n^k(\cos\theta')\sin k\lambda'd\omega\end{aligned}\right\}\tag{12-2-12}$$

从上式可以看出，如果地球上（$g_0-\gamma_0$）是已知的，则a_n、a_n^k、b_n^k是可以求得的。再将（12-2-11）式与(12-2-9)式进行比较，就可以求得位球函数系数与重力异常球函数系数之间的关系为：

$$\left.\begin{aligned}A_n&=\frac{R}{n-1}a_n\\A_n^k&=\frac{R}{n-1}a_n^k\\B_n^k&=\frac{R}{n-1}b_n^k\end{aligned}\right\}\tag{12-2-13}$$

由于重力异常球函数系数是已知的，因此位球函数系数就可求得。

顾及(12-2-7)、(12-2-9)及(12-2-10)式，大地水准面上的扰动位可以直接用重力异常球函数展开式表示为：

$$T_0=\sum_{n=2}^{\infty}T_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{R}{n-1}\Delta g_n\tag{12-2-14}$$

将上式代入（6-4-2）布隆斯公式得大地水准面差距为：

$$N=\frac{T_0}{\gamma}=\frac{R}{\gamma}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Delta g_n}{n-1} \qquad (12\text{-}2\text{-}15)$$

上式称为斯托克司级数，它与（6-6-1）斯托克司积分公式是等值的。

二、大地水准面差距及垂线偏差的球函数展开式

和扰动位一样，大地水准面差距也可以表示成一般形式的球函数展开式：

$$N=\sum_{n=2}^{\infty}N_n \qquad (12\text{-}2\text{-}16)$$

而

$$N_n=\overline{a_n}P_n(\cos\theta)+\sum_{k=1}^{n}(\overline{a_n^k}\cos k\lambda+\overline{b_n^k}\sin k\lambda)\cdot P_n^k(\cos\theta)$$

式中$\overline{a_n}$，$\overline{a_n^k}$及$\overline{b_n^k}$是大地水准面差距的球函数系数。按（12-2-13）式及（12-2-15）式可以得到它们与位球函数系数及重力异常球函数系数之间的关系为：

$$\left.\begin{aligned}\overline{a_n}&=\frac{A_n}{\gamma}=\frac{R}{\gamma}\frac{a_n}{n-1}\\ \overline{a_n^k}&=\frac{A_n^k}{\gamma}=\frac{R}{\gamma}\frac{a_n^k}{n-1}\\ \overline{b_n^k}&=\frac{B_n^k}{\gamma}=\frac{R}{\gamma}\frac{b_n^k}{n-1}\end{aligned}\right\} \qquad (12\text{-}2\text{-}17)$$

因此，如果已知重力异常球函数系数或位球函数系数，则可按上式求得大地水准面差距球函数系数，然后代入（12-2-16）式求得大地水准面差距。

现在再来推导垂线偏差的球函数展开式。在（6-4-6）式中用$B=90^\circ-\theta$置换，可以求得垂线偏差分量为：

$$
\left.\begin{aligned}
\xi'' &= \sum_{n=2}^{\infty}\xi_n \\
\xi_n &= \frac{\rho''\,\overline{a}_n}{R}\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}+\frac{\rho''}{R}\sum_{k=1}^{n}(\overline{a}_n^k\cos k\lambda \\
&\quad+\overline{b}_n^k\sin k\lambda)\frac{dP_n^k(\cos\theta)}{d\theta} \\
\eta'' &= \sum_{n=2}^{\infty}\eta_n \\
\eta_n &= -\sum_{k=1}^{n}\Big(-\frac{\rho''\,\overline{a}_n^k}{R\sin\theta}k\sin k\lambda \\
&\quad-\frac{\rho''\,\overline{b}_n^k}{R\sin\theta}k\cos k\lambda\Big)P_n^k(\cos\theta)
\end{aligned}\right\}\quad(12\text{-}2\text{-}18)
$$

式中 $-\dfrac{dP_n^k(\cos\theta)}{d\theta}=(n+k)\csc\theta P_{n-1}^k(\cos\theta)$

$-n\,\mathrm{ctg}\,\theta P_n^k(\cos\theta)$ (12-2-19)

该公式的推导见附录（1-94）式。

将（12-2-19）式代入（12-2-18）式中，可将ξ、η表示成一般形式的球函数展开式，则有

$$
\left.\begin{aligned}
\xi'' &= -\csc\theta\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\xi}_n+\mathrm{ctg}\,\theta\sum_{n=2}^{\infty}\overline{\xi}_n \\
\eta'' &= -\csc\theta\sum_{n=2}^{\infty}\overline{\eta}_n
\end{aligned}\right\}\quad(12\text{-}2\text{-}20)
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
\overline{\xi}_n &= [\overline{\overline{a}}_nP_n(\cos\theta)+\sum_{k=1}^{n}\overline{\overline{a}}_n^k\cos k\lambda \\
&\quad+\overline{\overline{b}}_n^k\sin k\lambda]P_n^k(\cos\theta) \\
\overline{\overline{\xi}}_n &= [\overline{\overline{a}}'_nP_n(\cos\theta)+\sum_{k=1}^{n}\overline{\overline{a}}'^k_n\cos k\lambda \\
&\quad+\overline{\overline{b}}'^k_n\sin k\lambda]P_n^k(\cos\theta) \\
\overline{\eta}_n &= \sum_{k=1}^{n}(\overline{\overline{a}}_n^k\cos k\lambda \\
&\quad+\overline{\overline{b}}_n^k\sin k\lambda)P_n^k(\cos\theta)
\end{aligned}\right\}\quad(12\text{-}2\text{-}21)
$$

（12-2-20）式中△表示n为有限值时求和的上限应为$n-$

1。$\overline{\overline{a}}_n$、$\overline{\overline{a}}_n^k$、$\overline{\overline{b}}_n^k$、$\overline{\overline{a'}}_n$、$\overline{\overline{a'}}_n^k$、$\overline{\overline{b'}}_n^k$及$\overline{\overline{\overline{a}}}_n^k$、$\overline{\overline{\overline{b}}}_n^k$为垂线偏差球函数系数。顾及(12-2-17)、(12-2-18)、(12-2-20)和(12-2-21)式可以得出它们与位球函数系数，重力异常球函数系数以及大地水准面差距球函数系数之间的关系为：

$$
\left.\begin{aligned}
\overline{\overline{a}}_n &= \frac{\rho''(n+1)}{R}\overline{a}_{n+1} = \frac{\rho''(n+1)}{n\overline{\gamma}}a_{n+1} \\
&= \frac{\rho''(n+1)}{R\overline{\gamma}}A_{n+1} \\
\overline{\overline{a}}_n^k &= \frac{\rho''(n+k+1)}{R}\overline{a}_{n+1}^k \\
&= \frac{\rho''(n+k+1)}{n\overline{\gamma}}a_{n+1}^k = \frac{\rho''(n+k+1)}{R\overline{\gamma}}A_{n+1}^k \\
\overline{\overline{b}}_n^k &= \frac{\rho''(n+k+1)}{R}\overline{b}_{n+1}^k = \frac{\rho''(n+k+1)}{n\overline{\gamma}}\overline{b}_{n+1}^k \\
&= \frac{\rho''(n+k+1)}{R\overline{\gamma}}B_{n+1}^k \\
\overline{\overline{a'}}_n &= \frac{\rho''n}{R}\overline{a}_n = \frac{\rho''n}{(n-1)\overline{\gamma}}a_n = \frac{\rho''n}{R\overline{\gamma}}A_n \\
\overline{\overline{a'}}_n^k &= \frac{\rho''n}{R}\overline{a}_n^k = \frac{\rho''n}{(n-1)\overline{\gamma}}a_n^k = \frac{\rho''n}{R\overline{\gamma}}A_n^k \\
\overline{\overline{b'}}_n^k &= \frac{\rho''n}{R}\overline{b}_n^k = \frac{\rho''n}{(n-1)\overline{\gamma}}b_n^k = \frac{\rho''n}{R\overline{\gamma}}B_n^k \\
\overline{\overline{\overline{b}}}_n^k &= \frac{\rho''k}{R}\overline{a}_n^k = \frac{\rho''k}{(n-1)\overline{\gamma}}a_n^k = \frac{\rho''k}{R\overline{\gamma}}A_n^k \\
\overline{\overline{\overline{a}}}_n^k &= -\frac{\rho''k}{R}\overline{b}_n^k = -\frac{\rho''k}{(n-1)\overline{\gamma}}b_n^k \\
&= -\frac{\rho''k}{R\overline{\gamma}}B_n^k
\end{aligned}\right\} \qquad (12\text{-}2\text{-}22)
$$

根据上式，只要已知位球函数系数，重力异常球函数系数或大地水准面差距球函数系数，就可求得垂线偏差球函数系数，然后代入（12-2-20）式，则可算出垂线偏差分量。

从以上讨论可以看出，在用球函数方法解边值问题时，为了计算大地水准面差距和垂线偏差，则必须已知位球函数系数或重力异常球函数系数，而这些系数可以通过地面实测重力异常资料（在第六章已讲过）或卫星轨道摄动的观测资料（将在本书第五部分讨论）求得。不管这些系数是采用那一种资料求得的，而最后计算大地水准面差距和垂线偏差的球函数展开式都是一样的。

以上只是从传统的调整后地球形状的角度来讨论这个问题。因为研究真正地球表面形状情况类似，所以不再加以讨论。

§12-3 斯托克司公式和平均椭球体的关系

有了重力异常和大地水准面差距的球函数表达式，就可以根据球函数的一些性质，对斯托克司公式和平均椭球体作一些较深入的讨论。

一、斯托克司积分和斯托克司级数之间的转换

因为斯托克司级数（12-2-15）式和斯托克司积分（6-6-1）式等值，因此它们之间是可以转换的。

由于扰动位T中不包含零阶和一阶球函数，所以（12-2-4）式可以写成：

$$T=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{R^{n+1}}{\rho^{n+1}}T_n \qquad (12\text{-}3\text{-}1)$$

另外，在附录一的（1-78）式中令$\Delta g_n=y(\theta,\lambda)$，则得

$$\Delta g_n=\frac{2n+1}{4\pi}\int_{\sigma}(g_0-\gamma_0)P_n(\cos\psi)d\omega \qquad (12\text{-}3\text{-}2)$$

将上式代入（12-2-14）式，得

$$T_n = \frac{R}{4\pi} \cdot \frac{2n+1}{n-1} \int_\sigma (g_0 - \gamma_0) P_n(\cos\psi) d\omega$$

再将上式代入（12-3-1）式中，可得

$$T = \frac{R}{4\pi} \int_\sigma (g_0 - \gamma_0) \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \frac{R^{n+1}}{\rho^{n+1}} \cdot P_n(\cos\psi) \right] d\omega \tag{12-3-3}$$

我们就利用上式来推导斯托克司级数和积分式之间的关系。如果能证明（6-5-8）式广义斯托克司函数$S(\rho、\psi)$为：

$$S(\rho,\psi) = \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \frac{R^{n+1}}{\rho^{n+1}} P_n(\cos\psi) \tag{12-3-4}$$

则问题就得到解决。

在（12-3-4）式中令 $x = \frac{R}{\rho}$，则有

$$S(\rho,\psi) = \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(2 + \frac{3}{n-1} \right) x^{n+1} P_n(\cos\psi) \tag{12-3-5}$$

再按附录一（1-48）式 $\frac{1}{r}$ 可以写成：

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho(1+x^2-2x\cos\psi)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos\psi) \tag{12-3-6}$$

或写成：

$$\frac{1}{(1+x^2-2x\cos\psi)^{\frac{1}{2}}} - 1 - x\cos\psi = \sum_{n=2}^{\infty} x^n P_n(\cos\psi)$$

两边同乘以 $\frac{dx}{x^2}$，并对 x 在区间 0 到 x 进行积分，得

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}P_n(\cos\psi)=\int_0^x\left[\frac{1}{(1+x^2-2x\cos\psi)^{\frac{1}{2}}}\right.$$

$$\left.-1-x\cos\psi\right]\frac{dx}{x^2} \tag{12-3-7}$$

从积分表中可以查得当$X=a+bx+cx^2$，$a>0$时，

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{X}}=-\frac{\sqrt{X}}{ax}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$$

而

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}=-\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(\frac{\sqrt{X}+\sqrt{a}}{x}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)$$

在（12-3-7）式右边积分第一项中，$a=1$，$b=-2\cos\psi$，$c=1$，则

$$\int_0^x\frac{dx}{x^2(1+x^2-2x\cos\psi)^{\frac{1}{2}}}=\left[-\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2-2x\cos\psi}\right.$$

$$\left.-\cos\psi\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2-2x\cos\psi}+1}{x}-\cos\psi\right)\right]_0^x$$

$$=\left(-\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2-2x\cos\psi}\right.$$

$$-\cos\psi\ln\left(\sqrt{1+x^2-2x\cos\psi}+1-x\cos\psi\right)$$

$$\left.+\cos\psi\ln x\right]_0^x$$

（12-3-7）式中右边的另两项积分为

$$-\int_0^x\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{x}\Bigg|_0^x$$

$$-\int_0^x x\cos\psi\frac{dx}{x^2}=-\cos\psi\ln x\Big|_0^x$$

将以上三式代入（12-3-7）式中，则

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}P_n(\cos\psi)=\Big[\frac{1}{x}(1-\sqrt{1+x^2-2x\cos\psi})$$

$$-\cos\psi\ln(\sqrt{1+x^2-2x\cos\psi}+1-x\cos\psi)\Big]_0^x \tag{12-3-8}$$

将下限的积分用 I 来表示，即当 $x=0$ 时，得

$$\lim_{x\to 0}\mathrm{I}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(1-\sqrt{1+x^2-2x\cos\psi})-\cos\psi\ln 2$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big[1-(1+\frac{1}{2}(2x\cos\psi-x^2)\cdots\cdots\Big]$$

$$-\cos\psi\ln 2$$

因 x 很小，可略去 x^2 以上各项，则上式变为

$$\lim_{x\to 0}\mathrm{I}=\cos\psi-\cos\psi\ln 2$$

因此（12-3-8）式的结果为

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}P_n(\cos\psi)=\frac{1}{x}[1-x\cos\psi$$

$$-\sqrt{1+x^2-2x\cos\psi}]$$

$$-\cos\psi\ln\frac{\sqrt{1+x^2-2x\cos\psi}+1-x\cos\psi}{2}$$

将上式和（12-3-6）式代入（12-3-5）式中，则得

$$S(\rho,\psi)=\frac{1}{R}\sum_{n=2}^{\infty}\Big(2+\frac{3}{n-1}\Big)x^{n+1}P_n(\cos\psi)$$