

岩石力学的 弹塑粘性理论基础

郑雨天 编著

煤炭工业出版社

内 容 提 要

本书为岩石力学丛书中的一本。书中详细介绍了掌握近代岩石力学所必需的弹性力学、塑性力学和流变学的基本知识。书中引用的计算实例都是岩石力学的实际问题。为便于自学，着重于交代概念和解题思路，并有必要的推导过程。

本书可供采矿和其他地下工程技术人员、科研工作者及高等院校师生阅读，也可作为有关高等院校的教材。

责任编辑：田 克 运

岩石力学的弹塑粘性理论基础

郑 雨 天 编著

*

煤炭工业出版社 出版

(北京安定门外和平里北街21号)

煤炭工业出版社印刷厂 印刷

新华书店北京发行所 发行

*

开本 $850 \times 1168\text{mm}^1/32$

印张12

字数 315 千字

印数1—1,800

1988年8月第1版

1988年8月第1次印刷

ISBN 7-5020-0097-6/TD·93

书号 2872

定价3.50元

第 1 章 绪 论

1.1 岩石力学和近代力学

1.1.1 岩石力学的学科范畴

岩石力学是研究岩体和岩体工程结构物中应力、应变、移动和破坏规律的科学。在工程技术学科领域内，它是矿山工程、水利水电、土木工程等有关岩体工程技术的理论基础。在技术基础学科范围内，它又是建筑在固体力学各个分支基础上的一门应用科学。学科间关系见图1-1。

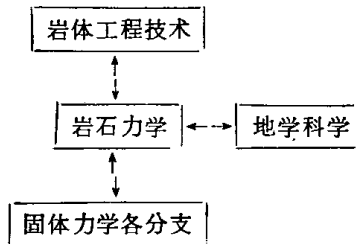


图 1-1 岩石力学和相邻学科的关系

1.1.2 岩石力学的发展

岩石力学是伴随着矿山、土木等工程建设的发展和力学的进步而产生和发展的。它的历史可分为四个时期：

〔经验时期〕在19世纪末以前，岩体工程技术只凭生产实践经验，没有与力学相联系。

〔萌芽时期〕19世纪末到20世纪30年代，开始用材料力学和结构力学方法分析岩石力学问题。例如，众所周知的普罗多吉雅可诺夫(М.М.ПротоДьяконов)的自然平衡拱假说利用了结构力学中压力曲线理论，斯列萨列夫(В.А.Слесарев)的极限跨度理论采用了材料力学中梁和板的计算公式等。这些理论把支护、围

岩和原岩体三者人为地割裂开来。在这些理论指导下，维护措施仅限于采用支架来消极的支承地压。

〔形成时期〕从20世纪30年代起，弹性力学和塑性力学被引入岩石力学。与材料力学不同，弹、塑性力学摒弃了一些过于粗糙的简化假定，采用了较为精确的力学模型，这就扩大了解决实际问题的范围。这个时期提出的学说如：金尼克(А.Н.Динник)的原岩应力公式，金尼克、芬涅尔(R.Fenner 1938)、施米特(H.Schmidt 1925)等提出的巷道围岩弹性和弹塑性应力分布，以及围岩和支架相互作用理论等。在维护措施上也摆脱了支架消极支承地压的做法，采用了能充分发挥围岩自承能力的锚喷支护、柔性支护和二次支护原理等等。

1934年秦巴列维奇(П.П.Цимбаревич)、1948年斯列萨列夫和1957年塔罗勃(J.Talobre)先后发表了“岩石力学”专著，并在大学里开设这门课程，这标志着岩石力学做为独立学科的形成。

〔发展时期〕20世纪60、70年代，地下采矿的深度和广度大为增加，为水电、国防服务的地下硐室数量和规模也大大增加，遇到的工程地质条件更为复杂，这就要求人们采用更为复杂和多种多样的力学模型来分析实际的岩石力学问题。这一时期内形成的力学新分支为之提供了条件。这些分支包括流变学、断裂力学、非连续介质力学、块体力学、颗粒介质力学和复合材料力学等等。电子计算机的应用和现代实验技术的发展更有利于这些分支应用到实际问题中。人们开始根据实际的岩体结构和工程条件选择适当的力学模型和力学分析方法。因此，近代的岩石力学又可以称为岩体结构力学。

综上所述，一方面，采矿、水利水电、土木建筑等岩体工程的发展给岩石力学提出了层出不穷的新课题；另一方面，近代力学的成就为岩石力学提供了取之不尽的新手段，使岩石力学逐步发展成独立的学科体系。

1.1.3 岩石力学和弹、塑、粘性力学

弹、塑、粘性力学对岩石力学的形成和发展起着重要作用，

在现代岩石力学领域中其理论解答仍占据统治地位。例如：原岩应力场的计算，圆形或椭圆形断面巷道围岩的应力场和稳定性分析，考虑围岩和支架相互作用的支护机理和计算方法，挡土墙和边坡的极限平衡分析，采场顶底板和矿柱的应力场和稳定性分析，锚杆支护机理和附加应力场计算，以及光测、电测、声测岩体应力的分析方法等等。

在近代固体力学的各分支中，弹、塑性力学是基础，它产生得较早，发展得最完善，解决的问题范围也最广。近代的断裂力学、复合材料力学等新分支也是在弹、塑性力学基础上发展起来的。因此，只有掌握了弹、塑、粘性力学的基本理论和基本方法，才能认识和应用现代岩石力学的成就，并为进一步了解应用于岩石力学的其他力学分支创造条件。

1.2 弹、塑、粘性力学的任务、方法和基本假设

1.2.1 弹、塑、粘性力学的任务和地位

弹、塑、粘性力学是研究物体在外力作用下的应力和变形的科学。根据研究对象在外力作用下呈现的变形性质或所处的变形阶段，划分为弹性力学、塑性力学、粘性力学以及它们组合成的弹塑性力学和流变学等。

物体的变形按与时间的关系或卸载后能否恢复进行分类，如下表（表1.1）。

表 1.1 变 形 分 类

	与时间无关	与 时 间 有 关
卸载后变形恢复 卸载后变形不恢复	瞬变 { 弹性变形 塑性变形	流变 { 弹性后效 流动 { 粘性流动 塑性流动

弹性后效是一种延迟发生的弹性变形和弹性恢复，在外力卸除后弹性变形没有立即恢复，随时间的推移逐渐恢复到零。粘性

流动是指在微小外力作用下发生的流动。塑性流动是指外力达到某一极限值后，材料才开始的流动。

传统的弹性力学和塑性力学只是研究瞬时弹性或塑性变形，流动变形是流变学研究的任务。

弹、塑、粘性力学与力学各分支的关系见表1.2。应该指出，这些力学的分支是在力学发展过程中逐渐形成的。到了今天，这些分支的数量已相当可观，而且相互交叉，相互渗透，难以严格区分。传统的弹、塑、粘性力学是连续介质力学中固体力学的三个组成部分。所研究的材料是均质的、各向同性的。随着力学的发展，它已和其他力学分支相互渗透，形成许多新的边缘分支。

1.2.2 弹、塑、粘性力学的研究方法

弹、塑、粘性力学的研究任务和材料力学、结构力学基本上是一致的，但其研究方法却有区别。由于研究方法不同，所以就有可能使弹、塑、粘性力学采用更接近于实际的力学模型，减少一些材料力学中的假设和限制，而使解决的工程问题范围更广，解题的精确度也较高。

材料力学和结构力学的研究方法是从构件的整体出发，研究其中某截面或节点外力和内力的平衡条件（对于静定问题），或补以变形条件（对于超静定问题）从而求得特定截面上的应力和变位。而弹、塑、粘性力学则是从物体的单元微分体出发，研究此微分体的力的平衡条件、位移和变形关系以及应力和应变的关系，得到相应的基本方程。然后联立、积分求解这些方程，并与物体的边界条件联系起来，从而求得整个物体内部的应力场和位移场。其解题基本程序如图1-2。这种方法涉及的数学力学公式较多，解题较繁，有些甚至无法用数学解析方法直接解出，需要借助于近似的数值计算方法。

1.2.3 弹、塑、粘性力学的基本假设

弹、塑、粘性力学虽然比材料力学要严密，但是对于客观存在的错综复杂的物体，还需要引用一些基本假设。抓住材料性质

表 1.2 力学分支的划分

分科根据	力 学 分 科 名 称
按介质的连续性	1.连续介质力学; 2.非连续介质力学
按介质的物态	1.固体力学; 2.流体力学(气体、液体)
按介质的均一性	1.传统的力学; 2.复合材料力学
按介质的变形性质	1.塑性力学 } 弹塑性力学 2.弹性力学 } 弹塑性粘性力学 (流变学) 3.粘性力学 } 弹粘性力学
按介质的种类	1.岩石力学; 2.土力学
按介质的破损阶段	1.传统的力学; 2.损伤力学; 3.断裂力学; 4.破碎力学
按研究的力学方法	1.材料力学; 2.结构力学; 3.弹塑性力学
按研究的数学工具	1.分析力学; 2.计算力学

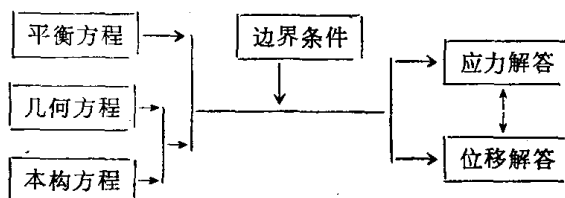


图 1-2 弹、塑、粘性力学的解题基本程序*

的主导方面, 忽略一些次要方面。传统的弹、塑、粘性力学采用以下基本假设:

(1) 连续性假设——认为整个物体内部都为固体物质所填满, 没有空隙。因此, 物体各微分体之间的应力、应变和位移都具有连续性, 可以用坐标的连续函数表示出来。不符合这一假定的就不是连续介质力学的范畴, 而属于非连续介质力学范畴。

(2) 均质性和各向同性假设——认为整个物体各质点和各个方向上的性质都完全相同。因此, 可以用同一物理量如弹性

* 几何方程是指物体的位移和应变的关系式。本构方程 (Constitutive equation) 是指材料的应力或应力率与应变或应变率之间的关系式。

模量、泊松比等来描述整体。这些物理量不随坐标位置和取向不同而变化。不符合这一假定的非均质体或各向异性体，属于复合材料和各向异性材料力学的研究范畴。

(3) 小变形假设——假定物体受力后的变形与原型物体尺寸相比甚小。因此，在研究物体受力后的静力平衡时，忽略因变形造成几何尺寸改变所导致的应力微小变化，应变的二次幂也可以略去。不符合这一假定的，属于大变形力学的范畴。

(4) 关于本构关系的假设——弹、塑、粘性力学对于物体的本构关系分别采用了一些理想化假设。例如，传统的弹性力学假定物体是完全弹性体，即物体的应力和应变呈比例关系。不满足这一假定的属于非线性力学范畴。塑性力学和流变学也各自采用了一些本构关系假定，这些将在以后章节中阐述。

上述假设和材料力学、结构力学的假设一样，所不同的是弹、塑、粘性力学摒弃了一些关于应力分布和变形状态的简化假设，如材料力学中截面的平面假设等等。

在上述假设中，连续性假设是根本的，是建立弹、塑、粘性理论体系所必需的。其他的假设都不是本质的，只是在传统的弹、塑、粘性力学中才采用。随着力学的发展，这些非本质的假设已开始被抛弃，发展成为广义的弹、塑、粘性理论。

1.2.4 岩石力学中应用基本假设的根据

虽然，岩石和岩体是非常复杂的介质，是长期地质构造活动的产物。但是，从总体上、从统计平均的意义上看，在大多数情况下仍可近似地应用弹、塑、粘性力学的上述假定。

1. 连续性问题——岩石和岩体都是由颗粒组成的，其间存在空隙和裂隙，多被各种各样的结构面所切割。尽管从微观结构方面看，应该说岩石和岩体是不连续介质，但是，在多数情况下，仍然可以近似采用连续性假说，因为：(1)所指的连续性，实质上是应力、应变和位移的连续性。对于处在各向压缩条件下的岩体，空隙和结构面往往不影响这种连续性；(2)空隙、裂隙所占的体积与实体颗粒相比是很小的，从宏观上、总体上看按连

续体考虑不致引起很大误差；(3)当岩体中有大的结构不连续面时，可以将被结构面分割的岩体分别按连续体考虑，再在它们之间按实际情况建立非连续关系。

2. 均质性和各向同性问题——岩石和岩体大都是非均质的，它们由各种不同的矿物或岩石颗粒组成，矿物或岩石粒块的排列和取向，形成了岩石和岩体的各向异性。但是，只有在个别情况下，如层状岩体才做为各向异性体处理。这是因为岩石和岩体的颗粒分布和取向往往是随机的，从统计平均的角度来看，就大范围而言，仍可近似看做是均质和各向同性体。

3. 本构关系问题——岩石是多属性介质，所具有的弹性、塑性或粘性都是相对的。同一岩石在特定条件下呈现弹性，在另一些条件下就出现塑性，甚至粘性。例如，坚固的岩石在常温、低围压和高应力率下呈现弹性，在高温高压下呈现塑性，在低应力率下又呈现粘性。许多岩石的弹性、塑性和粘性又是同时出现，相互影响的。然而，正如伟大革命导师列宁所说，如果不把不间断的事物割断，不使活生生的东西简单化、粗糙化，不加以割碎，不使之僵化，那末我们就不能想象、表达、测量、描述运动。在研究岩石力学具体问题时，不得不将岩石的多属性加以割裂，分别采用相应的本构关系。

1.3 外力、应力、应变和位移

在弹、塑、粘性力学中经常用到外力、应力、应变和位移这些概念。虽然它们在材料力学和结构力学中都已阐明过，但是有些规定不尽一致，有必要再作详细阐述。

应该强调，关于应力、应变的符号和正负号规定，在材料力学、弹、塑、粘性力学和岩石力学中是不同的，在现代岩石力学的一些著作中也很不统一。本书采用的符号是国际岩石力学学会所推荐采用的*，正负号规定是目前多数岩石力学书刊中通用的。

* 1970年“国际岩石力学学会 (ISRM) 名词、符号及图示”委员会编制了“符号表”。

已经约定，在这套岩石力学丛书中都统一采用这些规定。

1.3.1 外力

物体所受到的来自其他物体的作用力称为外力。外力除了通常所熟悉的分布于物体外表面的表面力外，还有分布于物体体积内的体积力，分别称为面力和体积力。

在岩石力学中常见的面力有如作用在支护结构物上的地压，作用在水坝上的静水压力等等。常见的体积力有如地球作用于岩体的引力（重力）和温度力、渗流压力等等。

一般说来，物体各处的面力和体积力都不相同。因此在实用中都用单位面积上的面力 p 和单位体积内的体积力 q 来表示。为了分析方便，常使用它们在坐标系中的分量。直角坐标系中沿坐标轴方向的分量，面力写作 S_x , S_y , S_z ，体积力写作 F_x , F_y , F_z （图1-3）。

传统的弹、塑、粘性力学中正负号规定为：沿坐标轴正方向的外力为正，沿坐标轴负方向的外力为负。岩石力学中的规定与之完全相反。本书采用岩石力学的规定。如图1-3所示的面力和体积力及它们的分量均为正值。

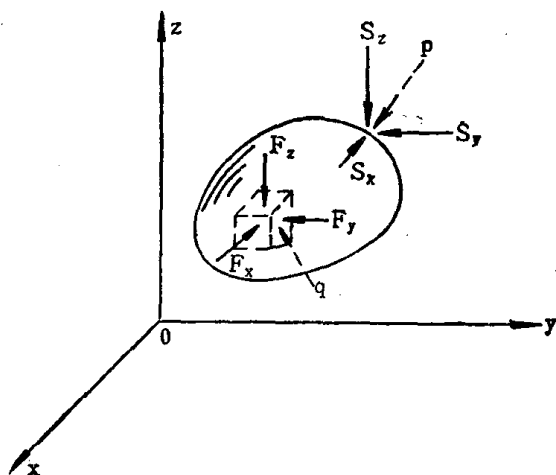


图 1-3 面力和体积力

面力的量纲为 $[\text{力}][\text{长度}]^{-2}$, 体积力的量纲为 $[\text{力}][\text{长度}]^{-3}$ 。国际单位制(SI制)中面力的单位为牛顿/米²(N/m²)或称为帕(Pa), 体力的单位为牛顿/米³(N/m³)。工程常用单位分别为公斤力/厘米²(kgf/cm²)和公斤力/厘米³(kgf/cm³) ($1\text{kgf/cm}^2 = 98\text{kPa}$, $1\text{kgf} = 9.8\text{N}$)。

1.3.2 应力

物体在外力作用下(包括温度改变), 其内部各部分间将产生相互平衡的内力。要研究某点M处的内力, 假想通过M点做一截面, 将物体分割为A、B两部分(图1-4), B部分在截面上作用于A部分的力就是内力。单位面积上的内力称为应力。显然, 物体内的应力不仅随着所考察的位置不同而不同, 而且取决于所取截面的方向。通常将应力分为两类: 在所截取截面法向上的分量, 称为正应力, 以 σ 表示; 在截面上的切向分量, 称为剪应力, 以 τ 表示。

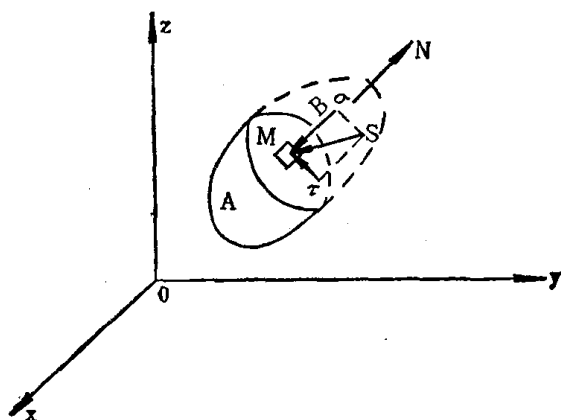


图 1-4 应力

应力的量纲为 $[\text{力}][\text{长度}]^{-2}$, 国际单位制为帕(Pa)。

1.3.3 一点的应力状态

分析物体某一点的应力状态, 可以将该点放大为一个六面立

方单元体(图1-5)。单元体六个面上都作用有正应力和剪应力(在图1-5中只画了前三个坐标平面上的应力)。为了分别表示这些应力的作用面和作用方向,要在应力符号右下角注以下标。正应力符号的下标表示其作用面与哪个坐标轴垂直,或者说表示该正应力方向平行哪个坐标轴,如 σ_x 为沿x轴方向的正应力。剪应力符号的下标用两个字母,前一个表明该应力的作用面与哪个坐标面垂直,后一个表明该应力的方向与哪个坐标轴平行,如 τ_{xy} 表示作用在垂直x轴的平面上沿y轴方向的剪应力。

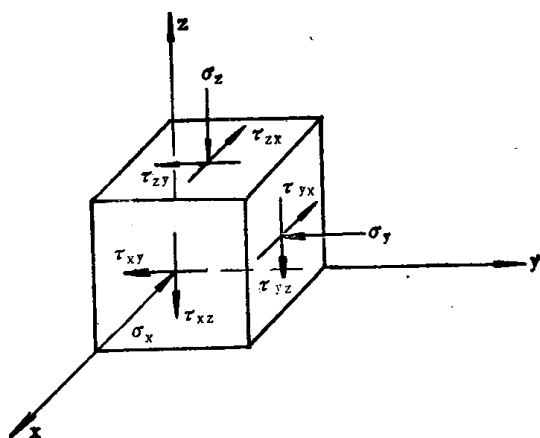


图 1-5 一点的应力状态

在以后的分析中(2.2.1节)将可看到,剪应力符号的两个下标顺序是无关紧要的,它们可以对调而其数值不变。这是根据剪应力互等定理即 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ 得到的。

一个面上的应力分量有3个,一个单元体包括六个面,两两对应,共有9个应力分量,其中6个为独立分量。

应当指出,在现代力学的一些文献中,还常采用另一套便于使用张量标记法的符号。应力无论是正应力还是剪应力统一用 σ 表示,其下标规定与上述剪应力的下标规定相同。两套符号的对应关系可以从下列一点应力状态的矩阵中看出。

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

1.3.4 应力的正负号规定

本书采用的应力正负号规定与传统的弹、塑、粘性力学规定相反。如果某截面的外法线方向与坐标正方向相同，这个截面称为正面。在正面上的应力分量以沿坐标正方向的为负，反之为正。如果截面外法线方向与坐标轴正方向相反，称为负面。在负面上的应力分量以沿坐标轴负方向的为负，反之为正。按这一规定，对于正应力而言，即拉应力为负，压应力为正，这与材料力学的规定相反。对于剪应力而言，则其中一半（ τ_{xy} ， τ_{yz} ， τ_{zx} ）和材料力学规定相反，即使单元体逆时针旋转的剪力为正，另一半（ τ_{yx} ， τ_{zy} ， τ_{xz} ）则与材料力学的规定相同。为了避免混乱，将材料力学、弹塑粘性力学与本书采用的应力正负号规定列在表1.3中。

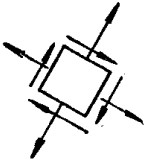
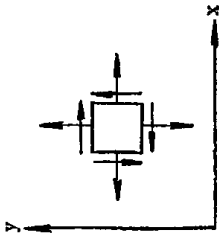
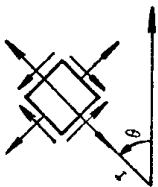
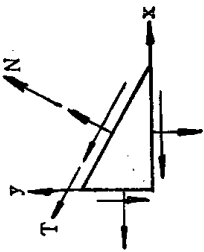
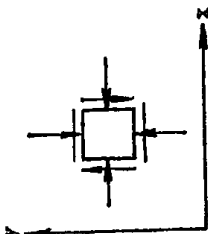
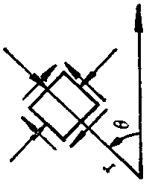
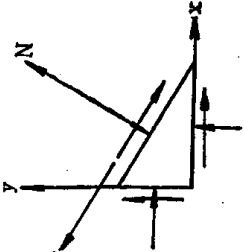
应该指出，岩石力学的应力正负号规定还很不统一。本书的规定与“岩石力学基础”（耶格、库克著）一书中的规定一致。这样，一方面可以避免在岩石力学计算中由于岩体经常处于压缩状态而常出现负值的现象，另一方面也可以使传统的弹塑粘性力学公式完全不变样的适用于岩石力学。

1.3.5 位移和变形

在外力作用下，物体各点的位置发生的移动，称为位移。如果位移后物体各点间相对位置仍保持不变，即物体只产生刚性移动或转动，这种位移称为刚性位移。如果位移后改变了各点间的相对位置，所改变的部分位移称为变形。传统的弹、塑、粘性力学主要研究变形，很少讨论刚性位移。

在直角坐标系中，各点的位移在x、y、z坐标轴上的投影得三个位移分量，用u、v、w表示。位移的正负号规定：在弹、塑、粘性力学中沿坐标轴正方向的位移为正，反之为负。本书中采用

表 1.3 各力学分科对应力正方向的规定

力 学 科	直角坐标系中坐标面上	极坐标系中坐标面上	斜 面 上	备 注
材料力学				与坐标方向无关
弹、塑、粘性力学				
岩石力学与本书				剪应力正负号 规定在各岩石力 学文献中不统一

岩石力学的规定，沿坐标轴正方向为负，反之为正。位移的量纲为〔长度〕。

变形又可分为长度的变化和角度的变化两种，分别称为线变形和角变形。

1.3.6 应变

单位长度上的线变形称为线应变，或称正应变，用 ε 表示。原为直角的角度变化称为角应变，或称剪应变，用 γ 表示。

在直角坐标系中，线应变符号为 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ ，下标代表应变的方向与哪个坐标轴平行。角应变符号为 $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ，下标两个字母表示原来直角的两直角面法线和哪个坐标轴平行。

正负号的规定：在传统的弹塑粘性力学中以伸长为正，缩短为负；直角变小为正，增大为负。本书采用岩石力学的规定，即缩短为正，伸长为负，直角变大为正。图1-6中表示的应变均为正值。

线应变和角应变都是无量纲参量。

应变符号除本书采用的一组外，在现代的一些力学文献中还使用另一组便于采用张量标记法的符号，应变统一写作 ε ，下标的规定仿照应力符号下标的规定办法。两组符号的对应关系可从下列单元体应变矩阵中看到

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

在矩阵中，角应变所以用 $\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy}, \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \varepsilon_{yz}, \dots$ ，是为了在今后的书写中可以把剪应力和角应变关系写成与正应力和线

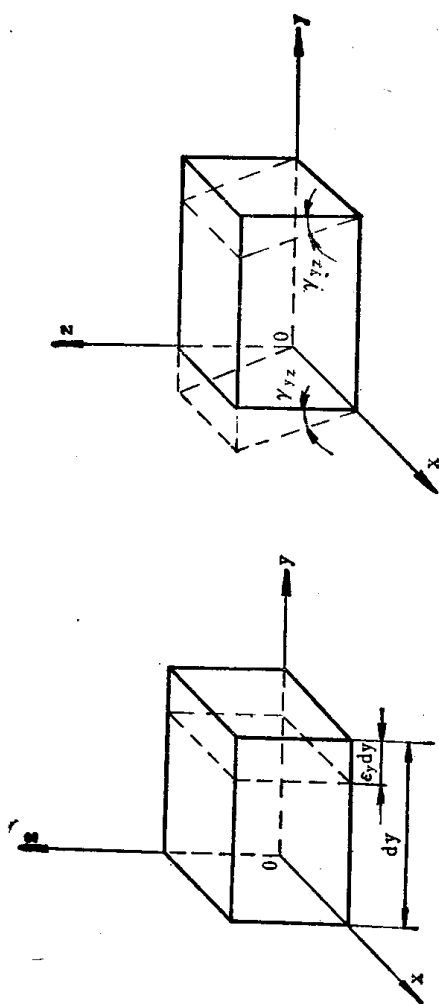


图 1-6 线应变和角应变

应变关系相统一的形式（参见2.3节）。

1.4 张量及下标记号法

在近代连续介质力学中，已广泛采用了张量(Tensor)。本书引用的张量仅是做为一种速记简化记号，实际上张量的用处远不止于此。

1.4.1 张量的概念和阶

张量是用来描述物理量的。如果某些量依赖于坐标轴的选择，并在坐标变换时服从特定坐标变换规律，那么这些量的总称就叫做张量。显然，应力、应变和位移都是张量。

张量象矩阵一样分为不同的阶。一些与坐标无关的量，称为纯量，或称零阶张量，如均匀场中的密度、温度等。对于一些要用3个坐标分量表示的量，称为一阶张量，如位移、速度或一点位置等。这些量虽然都客观存在，但要描述它们，必须选择坐标，用这些物理量在坐标系上的3个分量来描述它们，坐标改变，描述它们的3个分量亦改变。对于一些要用9个坐标分量表示的量，称为二阶张量，如应力和应变等。

零阶张量有1个元素，一阶张量有3个元素（或称分量），二阶张量有9个元素，以此类推， n 阶张量有 3^n 个元素。

1.4.2 张量的下标记号法

张量通常采用下标记号法。同一物理量的各分量都用同一个字母表示，只是在下标上加以区分。这些量的集合用一个带下标符号的字母表示。例如，对于一点的坐标，以往用 x, y, z 表示，在张量中用 x_1, x_2, x_3 表示，它们的集合写作 $x_i (i=1, 2, 3)$ 。

下面叙述这种标记方法的若干规定：

(1) 数列标记方法：在同一项中不重复出现的下标称为自由下标，包含自由下标的字母表示1个数列，例如 a_i, a_{ij} 等。在力学中，一般有1个自由下标的表示由3个分量组成的数列，有2个自由下标的表示由9个分量组成的数列。将应力、应变和位移用张量的下标记号法表示，并按一定规则排列成矩阵形式如下