

结 构 力 学

刘济庆 王崇宇 编

国防工业出版社

结 构 力 学

刘济庆 王崇宇 编

国防工业出版社

内 容 简 介

本书重点讲述结构计算的基本理论、基本方法。主要内容有：结构机动分析；静定结构分析；结构位移计算；计算超静定结构的力法、位移法；结构矩阵分析（有限元法）以及杆系结构的稳定性等。全书共十一章。书中附有计算例题及适量习题。

本书重视结构力学的基本理论、基本概念以及实用的计算方法。同时，鉴于以电算为手段的结构矩阵分析（有限元法）越来越普及，所以本书加强了这部分内容。

本书可供机械类专业、兵器、航空器、地面设施以及其他非土建等专业作为《结构力学》教材。也可供土建、桥梁、水利等专业作为参考书或供有关工程技术人员参考及自学。

结构力学

刘济庆 王崇宇 编

责任编辑：彭华良

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 1/16 印张19³/₄ 460千字

1985年4月第一版 1985年4月第一次印刷 印数：0,001—5,200册

统一书号：15034·2885 定价：3.65元

目 录

第一章 绪论	1
§ 1-1 结构力学的研究对象、任务和计算手段	1
§ 1-2 平面杆件结构的计算简图	4
§ 1-3 平面杆件结构的分类	10
第二章 体系的几何构造分析	13
§ 2-1 几何构造分析的目的	13
§ 2-2 平面体系的自由度	13
§ 2-3 几何不变体系的组成规则, 瞬变体系的概念	16
§ 2-4 几何构造分析举例	21
§ 2-5 几何构造与静力学解答的关系	24
习题	26
第三章 静定结构的计算	28
§ 3-1 概述	28
§ 3-2 单跨静定梁的计算	28
§ 3-3 多跨静定梁的计算	36
§ 3-4 静定平面刚架的计算	40
§ 3-5 静定平面桁架的计算	48
§ 3-6 静定结构的一些特性	66
习题	69
第四章 结构的位移计算	77
§ 4-1 结构位移的概念及其计算意义	77
§ 4-2 功与能	78
§ 4-3 实功与实功原理	79
§ 4-4 虚功与虚功原理	83
§ 4-5 静定结构在载荷作用下的位移计算	84
§ 4-6 静定梁和刚架的位移计算	89
§ 4-7 图乘法	93
§ 4-8 静定桁架的位移计算, 广义位移和广义力	96
§ 4-9 静定结构由温度改变引起的位移	100
§ 4-10 静定结构由支座移动引起的位移	102
§ 4-11 位移计算的一般公式	103
§ 4-12 弹性体系的四个互等定理	105
习题	108
第五章 用力法计算超静定结构	117
§ 5-1 力法的基本概念	117
§ 5-2 力法的基本结构与相当系统	120

§ 5-3	力法典型方程	123
§ 5-4	超静定梁及刚架的计算	126
§ 5-5	利用对称性简化计算	131
§ 5-6	超静定桁架及桁梁混合结构的计算	139
§ 5-7	温度改变和支座移动时超静定结构的计算	145
§ 5-8	超静定结构的位移计算和最后内力图的校核	150
§ 5-9	超静定结构与静定结构的比较	153
习题		154
第六章 用位移法计算超静定结构		160
§ 6-1	位移法的基本概念	160
§ 6-2	等截面直杆的转角位移方程	162
§ 6-3	基本未知量及基本结构	173
§ 6-4	位移法典型方程及计算举例	176
§ 6-5	位移法计算的简化	184
§ 6-6	小结	189
习题		190
第七章 结构矩阵分析		193
§ 7-1	概述	193
§ 7-2	有限元法概述	193
§ 7-3	引例	195
第八章 单元刚度矩阵		201
§ 8-1	刚度与柔度、两种坐标系	201
§ 8-2	平面桁架杆单元的单元刚度矩阵	202
§ 8-3	空间桁架杆单元的单元刚度矩阵	207
〔附〕	杆单元刚度矩阵程序段介绍	209
§ 8-4	平面刚架杆单元的单元刚度矩阵	210
§ 8-5	空间梁单元的单元刚度矩阵	216
〔附〕	梁单元刚度矩阵程序段介绍	218
习题		219
第九章 总体刚度方程及其求解		221
§ 9-1	总体刚度矩阵	221
§ 9-2	总体载荷向量	229
§ 9-3	方程组求解	234
§ 9-4	几个具体问题	253
习题		261
第十章 用虚功原理推导单元刚度矩阵		264
§ 10-1	概述	264
§ 10-2	用虚功原理推导单元刚度矩阵的综述	264
§ 10-3	梁单元的单元刚度矩阵	268
§ 10-4	平面三角形单元的单刚矩阵	272

第十一章 杆件系统的稳定性278

§ 11-1 稳定性的概念278

§ 11-2 确定临界载荷的静力法和能量法279

§ 11-3 等截面中心压杆的稳定性287

§ 11-4 等截面偏心压杆的稳定性290

§ 11-5 刚架结构稳定性292

习题308

第一章 绪 论

§ 1-1 结构力学的研究对象、任务和计算手段

一、结构力学的研究对象

我们在生活和生产当中，遇到的建筑物和设备是多种多样的。如房屋、厂房、飞机、车辆、船舶、桥梁、堤坝、水塔、机械工业及军事工程中的各种设备等，形式繁多，数不胜数。但是，在各种建筑物或设备中，并不是每一部分都是用来承受载荷的。以房屋为例，梁和柱是承受载荷作用的，而门和窗则不是。凡是在建筑物或设备中，承受载荷而起骨架作用的部分，我们称为结构。研究结构的力学性能，作为一门学科，就是结构力学。

工程中的结构尽管种类繁多，但以其主要特征来说，可作如下简单分类。

(一) 按照几何状态分类

1. 杆件结构 这种结构是由杆件组成的。杆件的几何特征是：其长度远大于其它两个尺寸。

2. 薄壁结构 这种结构是由薄壁构件组成的。薄壁构件的几何特征是：其厚度远小于其它两个尺寸。薄壁构件如为平板状的，称为薄板（图1-1），如为曲面形状的，则称为薄壳（图1-2）。图1-3， a 、 b 为由薄板组成的薄壁结构；图1-4为由薄壳组成的薄壁结构。薄壁结构又统称为板壳结构。

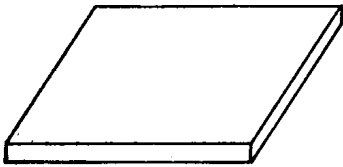
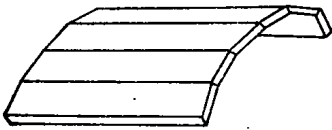


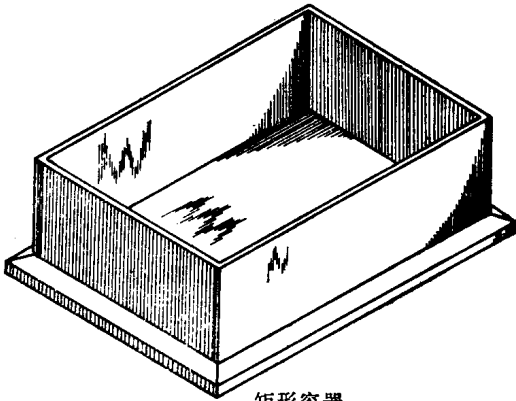
图 1-1



图 1-2

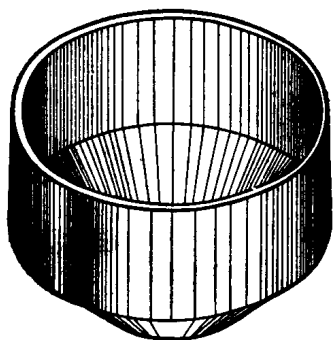


折板
(a)



矩形容器
(b)

图 1-3



圆筒形容器

图 1-4



图 1-5

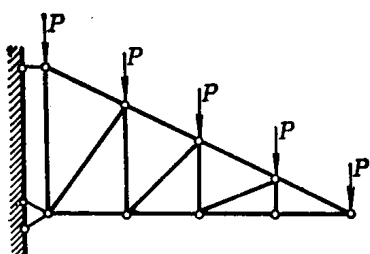


图 1-6

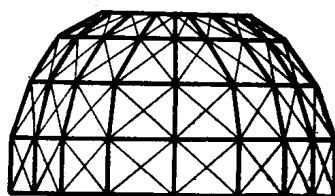


图 1-7

3. 实体结构 这种结构的几何特征是：三个方向的尺寸为同量级的。例如，某些设备的基础、挡土墙（图1-5）以及堤坝等。

（二）按照空间状态分类

1. 平面结构 这种结构的所有构件的轴线及载荷的作用线，均在同一平面内。例如，图 1-6 所示即为一平面结构。

2. 空间结构 凡不满足平面结构所具备的条件，就称为空间结构。

实际上，工程中的结构都是空间结构，但在许多情况下，可以将空间结构近似地分解为若干个平面结构来计算。但是，并非任何空间结构都可以分解为若干个平面结构。例如，图 1-7 所示的空间网状结构就是这样。

（三）按照计算方法分类

1. 静定结构 仅用静力平衡条件就能全部求得反力和内力的结构，称为静定结构。

2. 超静定结构 仅用静力平衡条件不能全部求得反力和内力的结构，称为超静定结构。

作为学科的研究范围，结构力学是以杆件结构为主要研究对象，弹性力学则是以板壳结构和实体结构为主要研究对象。因此，本书以后提到的结构，都是指杆件结构来讲的。

二、结构力学的基本任务

在工程发展史上，由于结构设计不合理，而发生重大事故的事例是不少的。如房屋

倒塌、桥梁毁坏、飞机失事、塔架弯折等。但若为了安全，而使结构尺寸设计过分保守，则势必造成严重的浪费。因此，在保证安全的前提下，最大限度地节省材料，这是赋给结构力学的一项重要使命。为此，结构力学所承担的基本任务，主要包括以下四个方面：

- 1. 研究杆件结构的组成规律及其合理形式；
- 2. 研究杆件结构由各种因素引起的内力（强度计算）；
- 3. 研究杆件结构的位移（刚度计算）；
- 4. 研究杆件结构的稳定性（稳定计算）。

研究结构组成规律的目的，在于保证结构各部分不致发生相对运动，而能在载荷作用下维持平衡。研究结构合理形式的目的，在于有效地利用材料，使结构能充分发挥承载能力。

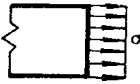
研究强度和稳定性的目的，在于保证结构能满足既安全又经济的要求。

研究结构刚度的目的，在于保证结构不致发生工程实际所不允许的过大变形。

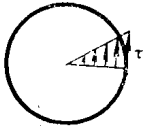
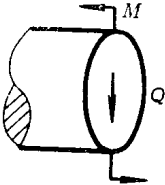
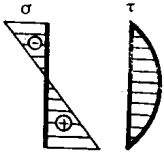
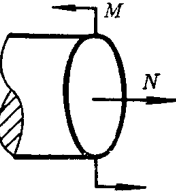
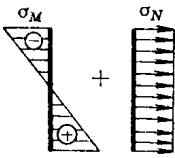
需要指出，结构力学研究以上这些内容，不仅是设计新结构所必需的，而且也是加固或改进旧结构所必需的。

从研究的任务来讲，材料力学与结构力学的关系极为密切，但又有所分工。材料力学着重研究单根杆件（也适当分析较简单的杆件结构）在不同载荷作用下的内力、应力和变形等规律，以及单根压杆的稳定性，并在此基础上建立强度条件、刚度条件和稳定条件，为设计构件的截面尺寸提供理论依据和简单适用的计算方法。结构力学则是以材料力学为基础，去研究较复杂结构的强度、刚度和稳定性问题。以强度来说，材料力学除了研究杆件的各种内力之外，更主要的是研究了与各种内力对应的应力性质及其分布规律，并进而建立相应的强度条件。因此，结构力学不需要对杆件的应力再作分析，它在强度方面的任务，只在于计算结构中各杆件的内力。即在实际强度计算中，对一个较复杂的结构，一旦利用结构力学知识求出了各杆件的内力，然后就可以直接引用材料力学有关强度计算公式进行计算。下面的表 1-1 是以钢质圆杆所组成的结构为例，来说明结构力学与材料力学在强度方面的联系及其分工。

表 1-1

变形名称	内力性质	应力分布	强度条件	符号说明
拉 伸			$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$	N —轴力， A —截面面积， σ —正应力， $[\sigma]$ —许用应力
压 缩				

(续)

变形名称	内力性质	应力分布	强度条件	符号说明
扭 转			$\tau_{\max} = \frac{M_n}{W_\rho} \leq [\tau]$	$\tau_{\max}$ —最大扭转剪应力; M_n —扭矩; W_ρ —抗扭截面模量; $[\tau]$ —许用扭转剪应力
横力弯曲			$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \leq [\sigma]$ $\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{A} \leq [\tau]$	$\sigma_{\max}$ —最大弯曲正应力; M —危险截面上的弯矩; W —抗弯截面模量; $[\sigma]$ —许用弯曲正应力; $\tau_{\max}$ —最大弯曲剪应力; Q —剪力; $[\tau]$ —许用弯曲剪应力
拉伸与弯曲组合			$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} \leq [\sigma]$	(符号意义同上)

由结构力学理论分析构件的内力 由材料力学理论分析构件应力并作强度计算

三、结构力学的计算手段

随着工业的发展，比较复杂的大型的结构不断出现，计算手段也不断地改进。但是，在过去相当长的时间内，由于缺少先进的计算手段，结构力学计算不得不靠手算，不得不采取各种近似的计算方法，这就不能不限制工程结构的发展。现在情况不同了。电子计算机的出现，对结构力学的发展产生了巨大的影响。过去无法解决的许多大型的复杂的结构计算问题，现在已经成了电算中的常规问题。电算极大地提高了结构力学解算问题的能力，同时也促进了工程结构的发展。在这种新的形势下，对结构力学提出了新的要求，即计算的原理和方法，必须适应电算的特点。因此，一些与电算密切相关的内容，诸如能量原理、矩阵分析、有限元法、程序设计等，在结构力学中的地位，越来越显得重要。为了适应这种迅速发展的形势，故在本书中，以相当的篇幅介绍了与电算有关的内容。但是，结构力学的电算，必须以结构力学的基本理论、基本方法为基础。因此，我们更应该重视结构力学的基本理论和基本方法的研究，否则，电算就失去了正确的前提和依据。因此，在学习过程中，必须加强对基本理论、基本方法的学习和理解。

§ 1-2 平面杆件结构的计算简图

实际结构是很复杂的，要想完全按照实际情况进行力学分析是很困难的，也是不必

要的。因此，在对实际结构进行力学分析之前，必须对实际结构加以简化，即略去次要因素，突出其基本特点，进行科学抽象，用一个简化了的图形来代替实际结构。这种简化了的图形就称为计算简图。

计算简图是对结构进行力学分析的依据。结构力学中提到的“结构”及画出的结构图，实际上就是杆件结构的计算简图。对结构所作的力学分析是否正确，首先取决于计算简图选择得是否正确。如果计算简图的选择不能基本上符合实际结构的受力特点，甚至有错误，就会使计算结果产生很大误差，甚至会造成工程事故。如果计算简图选择得过分繁琐，就会给计算带来很大困难。因此，必须审慎地选择计算简图。简单说来，计算简图的选择原则是：

1. 正确反映实际结构的受力特点，使计算结果尽可能接近实际情况；
2. 略去次要因素，突出基本特点，便于分析和计算。

作为一个受载荷作用的实际结构，通常包括以下四个主要方面：（1）支座；（2）杆件；（3）联结杆件的结点；（4）载荷。因此，一个实际结构的计算简图，是由支座简图、杆件简图、结点简图和载荷简图所组成。下面分别讨论这四个简图。

一、支座简图及其分类

把结构与基础联系起来的装置称为支座。支座的作用是把结构固定在基础上，同时，结构所受到的载荷通过支座传给基础或地基。支座对结构的反作用力称为支座反力。平面结构的支座形式很多，但根据它们对结构所起的约束作用，可概括成以下三种支座计算简图。

（一）活动铰支座 在对支座和结构进行讨论时，常常提到“链杆”这一构件。所谓链杆是指杆件的轴线是直的，两端通过无摩擦的理想化的铰与相邻物体相联，除杆端外，杆件中间无任何载荷作用，这样的杆件称为链杆。显然，链杆为二力杆（图 1-8，a、b）。

活动铰支座常用图 1-9，a 所示的简图来表示。这种支座对结构的约束作用，只能阻止结构上的 A 点沿垂直于支承平面方向的移动，但不能阻止结构绕铰 A 作转动和沿支承平面的移动。因此，当不考虑支承平面上的摩擦力时，其支座反力将通过铰 A 的中心并与支承平面垂直。即反力的作用点和方向是已知的，而其大小是未知的。这个反力通常用 V_A 表示，脚标 A 是表示该反力产生在结构上的 A 点。

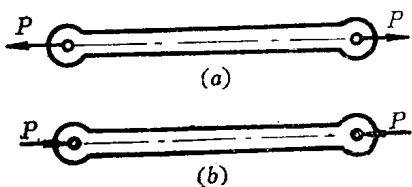


图 1-8

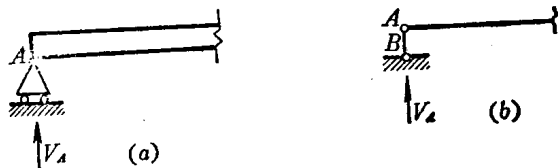


图 1-9

根据以上所述，这种支座的计算简图，在结构力学中又常用一根链杆来表示（图 1-9，b）。因为与该链杆相联的结构不仅可绕铰 A 转动，而且当链杆绕铰 B 作微小转动

时, 结构可在垂直于链杆轴线的方向作微小移动。显然, 链杆 AB 的轴力, 即代表该支座的反力。

在实际中, 凡符合或基本符合上述支承条件的装置, 都可简化成活动铰支座。如图 1-10 所示车辆中常用的叠板弹簧的左支座 A 和图 1-11 所示桥梁中常用的辊轴支座等, 都是活动铰支座的典型形式。

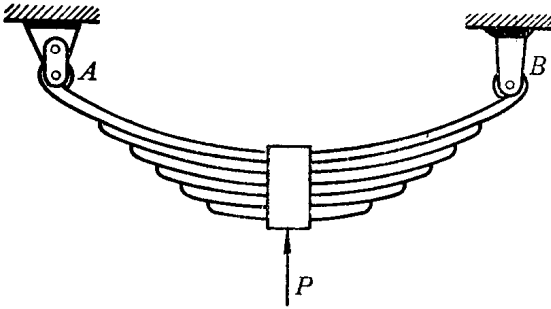


图 1-10

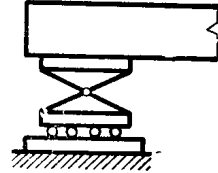


图 1-11

(二) 固定铰支座 固定铰支座常用图 1-12, a 所示的简图来表示。这种支座对结构的约束作用是阻止结构上的 A 点发生任何方向的移动, 但不阻止结构绕铰 A 的转动。因此, 固定铰支座的反力将通过铰 A 的中心, 但其方向和大小都是未知的, 显然, 可以用水平和铅垂两个未知分力 H_A 和 V_A 来代替。这种支座的计算简图, 在结构力学中又常用交于一点 A 的两根链杆来表示 (图 1-12, b)。

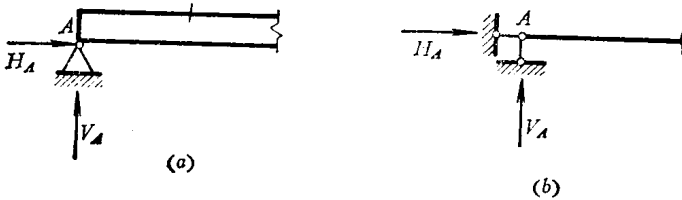


图 1-12

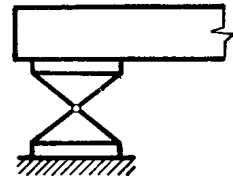


图 1-13

作为工程实例, 图 1-10 所示叠板弹簧的右支座 B , 和图 1-13 所示桥梁中采用的一种支承, 都是固定铰支座的典型形式。

(三) 固定端支座 固定端支座能阻止结构发生任何方向的移动和转动, 它的计算简图如图 1-14, a 所示。固定端支座反力的大小、方向和作用点都是未知的。显然, 可以用未知的水平、铅垂分力 H_A 、 V_A 和反力矩 M_A 来表示。这种支座也可以用不全平行也不全交于一点的三根链杆来表示 (图 1-14, b)。

在实际中, 凡嵌入刚性较大的基础中的杆件, 只要嵌入很紧密并有足够的嵌入深度, 致使杆件端部不能产生任何方向的移动和转动, 这种支承即可看作固定端支座。如图 1-15 所示混凝土浇注的柱的基础, 即是固定端支座的一个实例。



图 1-14

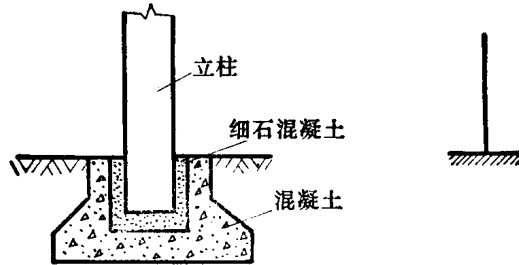


图 1-15

二、杆件简图及其分类

结构中的杆件，一般有以下两种：

(一) **直杆** 它的轴线是直线。不管直杆的截面形状如何，计算简图一律用其轴线表示，即其计算简图是一直线。

(二) **曲杆** 它的轴线是曲线。同样，其计算简图用其轴线表示，即其计算简图是一曲线。

三、结点简图及其分类

结构在载荷作用下，根据结点能否允许被其联结的各杆件作相对转动的特点，一般将结点分为以下三种情况：

(一) **铰结点** 铰结点的特点是汇交于该结点的各杆端，可以绕铰中心自由转动。在工程实际中，用铰联结杆件的例子并不多，但只要联结杆件的方式按铰结点处理，并不会引起显著的误差，就可以将该联结方式看作铰结点。例如，图 1-16，a 所示为钢桁架中一个结点的实际构造，它是把杆件焊接在结点板上。虽然各杆不是用铰联结，但由于结点板刚度较小，杆件的抗弯刚度通常也不大，主要承受轴向力；另外，下面的水平杆件，本来是一根杆件，但考虑到它的刚度与其它各杆的刚度相差不大，为了计算方便，将它看作是在结点处用铰联结起来的两根杆件。于是，绘出该结点的计算简图如图 1-16，b 所示。这样作出的计算简图，虽然与实际情况有一定差距，但在一般情况下，由此而引起的误差是可以允许的。

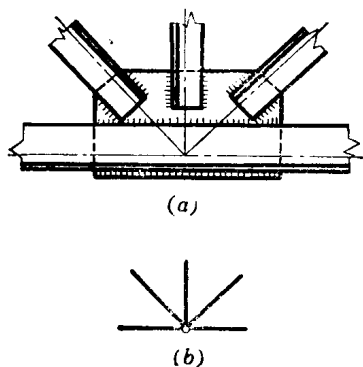


图 1-16

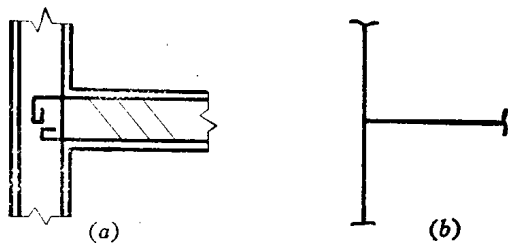


图 1-17

(二) **刚结点** 刚结点的特点是汇交于该结点的各杆端之间的夹角，在结构变形后仍保持不变。例如，图 1-17，a 所示为钢筋混凝土结构的某一个结点，上、下及水平的杆件，用钢筋混凝土浇筑成一个整体，所构成的结点即可看作是刚结点，其计算简图如图 1-17，b 所示。

(三) **组合结点** 有时会遇到铰结点和刚结点组合在一起的结点。例如，图 1-18，a、b 所示两种组合结点，均可看作杆件 1、2 在 A 点为刚性联结，杆件 3 为铰联结。

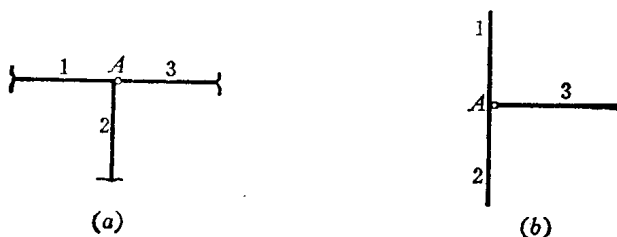


图 1-18

四、载荷简图及其分类

载荷是来源于结构外部的作用力和相应产生的支座反力。温度改变、支座移动、材料收缩等，都可能使某些结构产生内力，从广义讲，这些因素也可以称为载荷。

确定载荷是十分重要的工作。如果对载荷估计过大，则设计的结构必然笨重，造成浪费；如果对载荷估计过低，则设计的结构不能安全工作。因此，在结构计算之前，必须谨慎地做好确定载荷的工作。

根据载荷作用情况的不同，可作如下简化和分类。

(一) **按照载荷作用方式划分** 由材料力学已经知道，载荷主要有：

- 1 集中载荷；
2. 分布载荷；
- 3 集中力偶。

它们的计算简图如图 1-19 所示。



图 1-19

（二）按照荷载作用时间的长短划分

1. 恒荷载 是指长期作用在结构上的荷载，如结构自重或长期放置在结构上的设备，都可看作是恒载。

2. 活荷载 是指暂时作用在结构上的荷载，临时放置在结构上的设备。人群对于楼板、行动的吊车对于吊车梁等，都可看作是活荷载。

（三）按照荷载作用性质划分

1. 静荷载 是指这样一种荷载，即它的大小、方向和位置不随时间变化，或变化很缓慢，因而不致使结构产生明显的加速度。恒载和相当多的活载，都属静荷载。

2. 动荷载 是指这样一种荷载，即它作用在结构上会造成对结构强烈地冲击或引起结构振动，因而使结构产生不可忽视的加速度。例如，动力机械的振动，结构物受到的爆炸冲击或地震等，都可看作为动荷载。

根据上述对支座、杆件、结点和荷载作计算简图的知识，下面列举一个对实际结构整体作计算简图的示例。

例1-1 图 1-20, a 所示为一组合吊车梁，横梁用钢筋混凝土制成，双斜杆及竖杆用钢材制成。横梁截面面积比其它各杆截面面积大很多。吊车梁两端支承在两根柱子的牛腿上。吊车梁上的最大轮压为 P_1 和 P_2 。试作该吊车梁的计算简图。

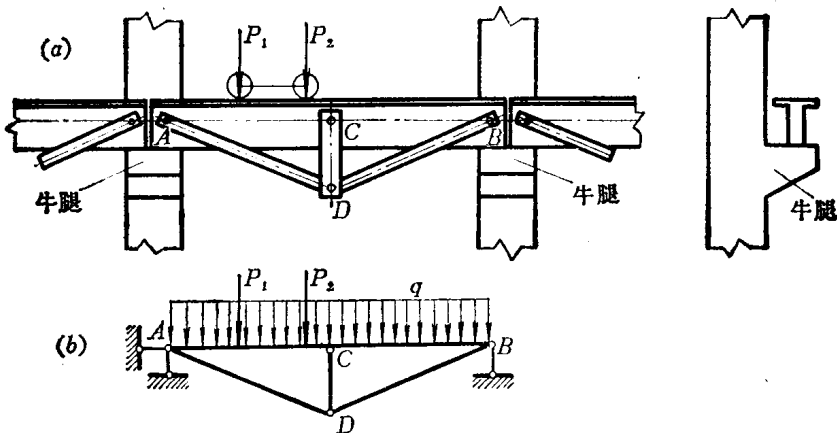


图 1-20

解 1. 支座简图

吊车梁的两端与柱子牛腿之间，虽然有预先埋好的钢板相联结，但这种约束对吊车梁两端的转动不起多大作用。又考虑到整个梁既不能上下移动，也不能左右移动，但当温度变化时，梁可以自由伸缩。考虑到上述情况，最后，将梁的一端支承看作活动铰支

座, 另一端支承看作固定铰支座 (图 1-20, b)。

2. 杆件简图

横梁与其它各杆的轴线均为直线, 所以, 它们的计算简图都是直线。当梁两端与柱子牛腿接触面的长度不大时, 可以这两个接触面的中心距离作为横梁的计算跨度 l (图 1-20, a 、 b), 在这里也就是两铰 A 、 B 的距离。

3. 结点简图

横梁 AB 是一根 T 形截面的实体梁, 截面较大, 故在计算简图中, 把横梁 AB 看作一根连续杆, 或者将其看作是 AC 、 BC 两根杆件, 在结点 C 处为刚性联结。竖杆 CD 和斜杆 AD 、 BD 的两端, 均为螺栓联结, 故都可看作是铰 (图 1-20, a 、 b)。

4. 载荷简图

考虑到横梁尺寸较大, 自重不能忽略, 横截面面积沿梁轴线无变化, 所以, 将自重简化为均匀分布载荷 (集度为 q), 它是恒载。

车轮与钢轨的接触面很小, 因此, 轮压可看作是二个集中载荷 P_1 和 P_2 (图 1-20, a 、 b), 它们是活载。

综上所述, 最后, 绘出吊车梁的计算简图如图 1-20, b 所示。

需要指出, 确定一个结构的特别是一个复杂结构的计算简图, 并不是一件容易的事。它需要有对实际结构的相当了解, 即对结构的整体和各部分的构造、受力情况要有正确的分析和判断, 同时, 还要有结构计算的丰富经验。有时, 还需要借助于模型试验或现场实测才能确定合理的结构计算简图。还应指出, 随着电算在结构力学中的广泛应用, 计算简图越来越接近实际, 从而使计算结果越来越精确。

§ 1-3 平面杆件结构的分类

前面, 我们讨论了确定结构计算简图的基本作法。以后的研究和计算, 就是在代表实际结构的计算简图上进行的。在这里要讲的结构分类, 实际上也就是平面杆件结构的计算简图分类。

一、梁

梁是受弯的杆件, 有单跨的 (图 1-21, a 、 b), 也有多跨的 (图 1-21, c 、 d)。

二、拱

拱是由曲杆组成的结构。常见的拱有三铰拱、双铰拱和无铰拱 (图 1-22, a 、 b 、 c)。拱的特点是: 在竖向载荷作用下, 在支座处要产生水平反力 (推力)。这种水平反力将使拱内弯矩远小于具有相同跨度、支座和载荷的梁内弯矩。

三、刚架

刚架是由梁和柱组成的结构, 各杆件主要受弯。刚架的结点主要是刚结点 (图 1-23, a 、 b), 但在部分上也有铰结点 (图 1-23, c) 或组合结点 (图 1-23, d)。