分数步法

——数学物理中多变量问题的解法

〔苏〕H.H. 雅宁柯 著

科学出版社

分数步法

数学物理中多变量问题的解法

〔苏〕N. N. 雅宁柯 著

周宝熙 林 鹏 译

科 学 出 版 社

1 9 9 2

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书是论述偏微分方程数值解方面的经典著作，叙述分数步法在求解多变量数学物理问题中的应用．主要内容包括：一致格式、用于求解抛物型方程的分数步的简单格式、解双曲型方程的分数步法、解 Laplace 方程和 Poisson 方程的分数步法、弹性理论中的边值问题、高精度格式、某些流体力学问题、弱逼近法和 Banach 空间中 Cauchy 问题解的构造等．

本书适合于高等院校数学力学系师生、有关专业的工程技术人员和科学研究工作者阅读．

N. N. Yanenko

THE METHOD OF FRACTIONAL STEPS

The Solution of Problems of Mathematical Physics in Several Variables

Springer-Verlag 1971

分 数 步 法

数学物理中多变量问题的解法

〔苏〕N. N. 雅宁柯 著

周宝熙 林 鹏 译

责任编辑 刘嘉善

科学出版社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1992 年 2 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1992 年 2 月第一次印刷 印张：6 1/8

印数：1—2 000 字数：154 000

ISBN 7-03-002651-9/O·497

定价：6.70 元

英译本编者的话

分数步法，即熟知的分解法，是由 Yanenko 和他的同事们提出的求解理论力学问题的一种值得注意的数值方法。特别是这个方法可应用于位势问题、弹性问题和流体动力学问题。目前，此方法主要应用于自由边界的不可压缩流和低速粘性流。这种方法提供了求解 Navier-Stokes 方程的有力手段，而且迄今为止，它可以在比其他方法所允许的雷诺数范围大得多的条件下求解。因而这种方法的进一步发展必将导致许多边界层数值解问题的进一步完善，并且使得一些目前还难以得到满意处理结果的问题重新引起人们的注意。

正如作者所指出，在求解固体力学的问题时依旧很少应用此方法，但是可以期望这个方法在这个领域和其它领域(如热传导)中的应用将受到人们的重视。当这个方法完善时，尤其是当计算机的存贮量大规模提高时，它有可能代替传统的松弛法和有限元法。(以下感谢语略)

M. 霍尔特

1970 年 11 月　伯克莱

英译本前言

作者对本书现在能译成英文出版感到很荣幸。自从俄文版出版三年以来分数步法迅猛发展。遗憾的是，作者没有能在这本书的英文版中介绍这方法新发展的情况，只是简单地给出文献的增补与简单的注解。

最近发表的工作和那些本人没有注意到的更早的工作只能使作者认为，在计算数学和理论数学发展中，分数步法事实上是必要的阶段。在不同的数学分支中，下列概念间的值得注意的相似性能够证实上述判断：半群理论、弱逼近概念和微分方程 Cauchy 问题的适定性、微分不等式和线性规划的分解原则、气体动力学中分解格式和质点网格法、数学物理因子分解格式和经济格式的模拟设计。不同学科之间的这种相互联系不仅表明数学上的统一性，而且提供了这样的基本事实，即算法的构造及其最优化是现代数学中最重要的研究对象之一(感谢语略)。

N. N. 雅宁柯

1970 年 11 月　新西伯利亚

俄文版前言

这本书的主题是分数步法．作为构造经济差分格式的工具，它于几年前首先由作者提出，而后得到迅速发展．

利用分数步法我们能求解简单逼近的格式所不能处理的问题，因为简单逼近格式在每一步必须满足稳定性和相容性条件．虽然简单格式导致公式的极大简化，然而，格式不易变换，且只包含少数的任意参数，同样它不能满足所有附加的要求．与此相反，在分数步格式中从计算阶段过渡到下一步分成了一系列中间步，它不要求在每一步满足原方程的相容性条件和稳定性准则．这个方法允许参数自由选择，使之可以构造出经济和精确的格式．

分数步法是为满足数值计算中实际需要而出现的，即利用它构造简单的经济格式来求解数学物理中多变量的复杂问题．

这个方法的基础是 Peaceman, Rachford 和 Douglas (1955) 的工作．一些美国和苏联的数学家的工作推广和改进了这个方法，他们是 Douglas, Rachford, Baker, Oliphant, K. A. Bagrinovskii, A. A. Samarskii 等．

目前，分数步法是构造解数学物理中多变量复杂的问题的格式的主要的方法之一．尽管分数步法还在进一步发展之中，理论上也还不完整，但是它不仅可以作为构造最优算法的工具，而且还可以作为研究差分和微分方程理论的一种手段．

本书是以作者从 1959 年至今在乌拉尔大学、新西伯利亚大学、鄂木斯克大学和卡什斯坦大学讲授的讲义为基础而写成的．本书将讨论并且给出（如果可能的话）分数步格式统一的表达方式，而这些格式只能在杂志上和论文集中找到．

作者试图尽可能考虑所有对发展分数步法有贡献的工作，但是对主题的解释不可能完全一致，在此本书只反映出作者个人的

风格.特别是本书不介绍计算精确度的先验估计法,作者只利用收敛性的一些较简单的调和分析方法，并且对于局部收敛准则也仅给出粗略的考虑，而把大部分的注意力集中在构造有效格式的方法上.

本书反映作者和他的同事们的科研成果，作者特别乐于回忆与一些青年数学家所进行的合作. 他们研究了求解各种数学物理问题的第一批隐式分解格式，并且成功地应用于数值问题上. 特别值得提出的是 N. N. Anuchina, V. A. Enal'skii, A. S. Zharikov, A. I. Zuev, A. N. Konovalov, V. E. Neuvazhaev, Yu. Ya. Pogodin, V. A. Suchkov, V. D. Frolov.

在 1962 年 E. G. D'yakonov, A. A. Samarskii 和 B. L. Rozhdestvenskii 参加了一次讨论,由此对利用分数步格式精确计算边界条件的作用有了较深的理解,并且开展了一系列的工作.

与 G. I. Marchuk 以及在苏联科学院西伯利亚分院与 Yu. E. Boyarintsev, G. V. Demidov, V. P. Il'in, B. G. Kuznetsov, M. M. Lavrent'iev, V. V. Penenko, Yu. N. Vatolin 等人的合作和频繁的讨论,使得分数步法进一步得到应用,并且在理论上更加完善. 在校对手稿时 A. N. Valiullin 给了颇多的帮助. 作者在此对所有这些同事表示感谢.

作者希望本书对于从事力学和物理学中多变量问题研究的科学工作者,以及大学计算数学专业的高年级学生有所帮助.

N. N. 雅宁柯

1965 年 11 月

目　　录

第一章　一致格式

1.1　一类问题的讨论，Banach 空间中的 Cauchy 问题

在本书中我们主要考虑下列微分方程组

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=L(D)u(x,t)+f(x,t), \tag{1.1.1}$$

其中

$$u(x,t)=\{u_1(x_1,\cdots,x_m,t),u_2(x_1,\cdots,x_m,t),\cdots,\\ u_n(x_1,\cdots,x_m,t)\},$$

$$f(x,t)=\{f_1(x_1,\cdots,x_m,t),\ f_2(x_1,\cdots,x_m,t),\cdots,\\ f_n(x_1,\cdots,x_m,t)\}$$

是向量空间的变量 $x=(x_1,\cdots,x_m)$ 和时间 t 的向量函数；$L(D)$ 是变系数的矩阵线性微分算子，$D=\{D_i\}$，$D_i=\partial/\partial x_i$，$i=1,\cdots,m$。

当方程(1.1.1)写成附标形式时，为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u_i(x_1,\cdots,x_m,t)}{\partial t}=\sum_{i,\alpha}&a_{ij\alpha_1\cdots\alpha_m}(x_1,\cdots,x_m,\\ &t)D_1^{\alpha_1}\cdots D_m^{\alpha_m}u_j(x_1,\cdots,x_m,t)\\ &+f_i(x_1,\cdots,x_m,t),\end{aligned}\right\} \tag{1.1.2}$$

$0\leqslant\alpha_k\leqslant q_k,\quad k=1,\cdots,m,\ i,j=1,\cdots,n。$

对方程组(1.1.1)，在带状区域

$$|x|<\infty,\ 0\leqslant t\leqslant T<\infty,$$

我们可以提出初始条件为

$$u(x_1,0)=u_0(x) \tag{1.1.3}$$

的 Cauchy 问题，或在柱

$$\Omega=G\times H$$

上混合 Cauchy 问题，此处 G 是在超平面 $t=0$ 上边界为 γ 的某

个区域，且 $H = \{0 \leqslant t \leqslant T\}$. 在第二种情况，初始条件为

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in G. \tag{1.1.4}$$

当然在区域Ω的侧表面 $\Gamma = \gamma \times H$ 上满足某些边界条件

$$l(D)u = \varphi(x, t), \tag{1.1.5}$$

此处 $l(D)$ 是某个依赖于 $D_0 = \partial/\partial t, D_1, \cdots, D_m$ 的微分算子，$\varphi(x, t)$ 是定义在Γ上的向量函数。

以下仅考虑在带状区域上的 Cauchy 问题，而混合 Cauchy 问题仅在特殊的例子中考虑，这样就无需分析边界条件. 在大多数情况下所研究的 Cauchy 问题具有周期性质，即系数、右边的第二项 $f(x, t)$、初始条件和随之而得到的解都是 x 的周期函数.

下面我们将考虑较一般的 Cauchy 问题，即在 t_1 时刻 $(0 \leqslant t_1 \leqslant T)$ 的初始条件，对所有的 $t(t_1 \leqslant t \leqslant T)$，且当 $t \to t_1$ 时，方程组(1.1.1)的解 $u(x, t)$ 连续地趋向初始条件的函数 $u(x, t_1)$.

假设 Cauchy 问题对所有的时刻 $t_1(0 \leqslant t_1 \leqslant T)$ 有唯一解，且当初始函数 $u(x, t_1)$ 是 x 的充分光滑的函数时，满足方程(1.1.2)的解 $u(x, t)$ 的导数是连续的，则这样的解称为古典的. 把 t 考虑为参数，用 $u(t)$ 表示 $u(x, t)$，而且当固定 t 时函数 $u(x, t)$ 作为 x 的函数集合的元素. 在这样的意义下，单参数集合的元素 $u(t)$ 对应于方程组(1.1.1)的解 $u(x, t)$. 在方程(1.1.1)中的算子 $L(D)$ 和函数 $f(x, t)$ 分别用 $L(D)$ 和 $f(t)$ 表示.

设 $u(t)$ 是齐次 Cauchy 问题 $(f = 0)$ 满足初始条件 $u(t_1)$ 的古典解，由于上述假设，对充分光滑的函数 $u(t_1)$，关系式

$$u(t_2) = S(t_2, t_1)u(t_1), \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T \tag{1.1.6}$$

决定了线性变换算子 $S(t_2, t_1)$.

我们假设 x 的函数的 Banach 空间B存在，且其中的光滑函数集合构成一个稠密类，关系式(1.1.6)能应用到B中的函数. 按照已知的关于算子展开的定理，上述结论是可能成立的，只要算子 $S(t_2, t_1)$ 在光滑函数上是有界的. 所有算子的运算都是按空间B的范数进行的.

定义 若

$$\|S(t, 0)\| \leqslant M(T), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.1.7}$$

则称 (1.1.1) 和 (1.1.3) 是适定的. 若

$$\|S(t_2, t_1)\| \leqslant M(T), \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T, \tag{1.1.8}$$

则称方程组 (1.1.1) 是适定的. 若对所有满足条件 $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$ 的 t_1, t_2, 有

$$\|S(t_2, t_1)\| \leqslant e^{\alpha(t_2-t_1)}, \tag{1.1.9}$$

其中 α 是仅依赖于 T 的常数,则称方程组 (1.1.1) 是一致适定的.

显然,一致适定的方程组是适定的;若方程组适定,则 Cauchy 问题适定.

以下仅考虑一致适定的方程组, 这种适定性质使得有界算子 $S(t_2, t_1)$ 族满足合成律

$$S(t_3, t_1) = S(t_3, t_2)S(t_2, t_1). \tag{1.1.10}$$

方程 (1.1.10) 描述了 Huygens-Hadamard 原理, 即在区间 t_0, t_1; t_1, t_2; $\cdots$; t_{m-1}, t_m 中, Cauchy 问题序列解等价于区间 t_0, t_m 内 Cauchy 问题的解.

我们也假设算子 $S(t_2, t_1)$ 强连续的条件为对任意 $u_0 \in B$ 和 t 满足

$$\|S(t+\tau, t)u_0 - u_0\| \to 0, \quad \tau \to 0. \tag{1.1.11}$$

满足条件 (1.1.9), (1.1.10) 和 (1.1.11) 的算子 $S(t_2, t_1)$ 的集合构成一个半群[1], Banach 空间中的 Cauchy 问题将在第十章中考虑.

以下我们将用下列记号: C_p 是带有范数

$$\|u\|_{C_p} = \max_{x \in G} \{|u|, |u'|, \cdots, |u^{C_p}|\} \tag{1.1.12}$$

的 p 阶连续可微函数空间, L_p 是具有范数

$$\|u\|_{L_p} = \sqrt[p]{S_G |u|^p dx} \tag{1.1.13}$$

的 p 次可积函数空间,在特殊情形 $C = C_0$, C_0 是具有最大值范数

1) 关于 Cauchy 问题的解和半群理论, 参看 [2], [4] 和 [99], 也可看关于泛函分析的 [1] 和 [72].

$$\|u\|_C = \max_{x\in G} |u| \tag{1.1.14}$$

的连续函数空间。

1.2 一致格式

设

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_0 u^n + F^n \tag{1.2.1}$$

是对应于方程组(1.1.1)的二层差分格式,其中

$u^n(x) = \{u_i(x_1,\cdots,x_m,n\tau)\}$, $F^n(x) = \{F_i(x_1,\cdots,x_m,n\tau)\}$ 是向量函数; $\Lambda_0 = \Lambda_0(t,\tau,h,T)$, $\Lambda_1 = \Lambda_1(t,\tau,h,T)$ 是具有变系数

$$T = \{T_\alpha\},\ \alpha = -q_\alpha - q_\alpha + 1,\cdots,q_\alpha$$

的矩阵差分算子,位移算子 T_α 由下式决定

$$T_i u(x_1,\cdots,x_m) = u(x_1,\cdots,x_i+h_i,\cdots,x_m), \tag{1.2.2}$$

$$T_{-i}u(x_1,\cdots,x_m) = u(x_1,\cdots,x_i-h_i,\cdots,x_m),\ T_{-i} = T_i^{-1}.$$

带附标形式的方程(1.2.1)为

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau} = \sum_{j,\beta} b_{ij\beta_1\cdots\beta_m}(x,t,\tau,h)T_1^{\beta_1}\cdots T_m^{\beta_m}u_j^{n+1} + \sum_{j,\beta} c_{ij\beta_1\cdots\beta_m}T_1^{\beta_1}\cdots T_m^{\beta_m}u_j^n + F_i^n, \tag{1.2.3}$$

此处附标 $\beta_s(s=1,\cdots,m)$ 是正或负的整数。

我们引进一系列概念,因为(1.2.1)的逼近对于点 x, t 是一致的,所以(1.2.1)型格式被称为一致的(一致格式在 A. N. Tikhonov 和 A. A. Samaskii [93]中讨论过)。如果算子 $E-\tau\Lambda_1$ 在网格函数空间中可以用一个对角矩阵表示出来,则格式(1.2.1)称为显式,否则格式称为隐式。如果对任意光滑函数 f,我们有

$$\|\Lambda f\| \geq \frac{A}{h^\alpha},\ \alpha > 0,\ A > 0,$$

这里 A 不依赖于 $h = \max h_i$,则称 Λ 为奇异算子。

算子 Λ_0, Λ_1 称为有限,如果 $|\beta_s| \leq Q$,此处 Q 不依赖于 τ

和 h。应该注意的是，一般地说，有限算子的逆并不是有限算子。

实际上，方程（1.2.1）中的各项是在网格点上求值的，在网格点上方程（1.2.3）也可表示为

$$\frac{u_{ik_1\cdots k_m}^{n+1}-u_{ik_1\cdots k_m}^{n}}{\tau}=\sum_{j,\beta} b_{ij\beta_1\cdots\beta_m}u_{jk_1+\beta_1\cdots k_m+\beta_m}^{n+1}+\sum_{j,\beta} c_{ij\beta_1\cdots\beta_m}u_{jk_1+\beta_1\cdots k_m+\beta_m}^{n}+F_{ik_1\cdots k_m}^{n},\tag{1.2.4}$$

此处附标 $k_1,\cdots,k_m$ 确定了点

$$x_1=k_1h_1,\cdots,x_m=k_mh_m.$$

在理论研究中，我们认为算子 Λ_1，Λ_0 作用在与（1.1.1）中的算子 L 相同的一个空间中，函数 $u^n(x)$ 属于 B，对（1.2.1）我们取初始条件

$$u^0(x)=u_0(x).\tag{1.2.5}$$

设 $u^n(x)$ 是齐次 Cauchy 问题（1.2.1）和（1.2.5）的解 （$F^n=0$），则方程

$$u^{n+1}(x)=C(\tau,h;t+\tau,t)u^n(x),\ t=n\tau\tag{1.2.6}$$

决定了差分步长算子 $C(\tau,h;t+\tau,t)$。同时方程

$$u^n(x)=C(\tau,h;t_2,t_1)u^m(x),\ 0\leqslant t_1=m\tau\leqslant t_2=n\tau\leqslant T\tag{1.2.7}$$

决定了差分变换算子 $C(\tau,h;t_2,t_1)$。

我们也令

$$\begin{aligned}&C_{nm}=C(\tau,h;t_2,t_1),\ t_2=n\tau,\ t_1=m\tau,\\&C_n=C_{nn-1}.\end{aligned}\tag{1.2.7'}$$

定义 （1.2.1）和（1.2.5）的 Cauchy 问题是适定的，如果

$$\begin{aligned}&\|C(\tau,h;t,0)\|\leqslant M(T),\ 0\leqslant t=n\tau\leqslant T,\\&\tau^2+h^2\leqslant\tau_0^2,\ m(T)<\infty,\end{aligned}\tag{1.2.8}$$

其中 τ_0 是某个充分小的常数。格式（1.2.1）是适定的，如果

$$\begin{aligned}&\|C(\tau,h;t_2,t_1)\|\leqslant M(T),\\&0\leqslant t_1=m\tau\leqslant t_2=n\tau\leqslant T,\ M(T)<\infty.\end{aligned}\tag{1.2.9}$$

格式（1.2.1）是一致适定的，如果

$$\|C(\tau,h;t_2,t_1)\| \leqslant e^{\omega(t_2-t_1)},$$
$$0 \leqslant t_1 = m\tau \leqslant t_2 = n\tau \leqslant T, \tag{1.2.10}$$

此处 ω 是一个仅仅依赖于 T 的常数. 格式 (1.2.1) 是稳定的,如果

$$\|C(\tau,h;t_2,t_1)\| \leqslant 1,\ 0 \leqslant t_1 = m\tau \leqslant t_2 = n\tau \leqslant T. \tag{1.2.11}$$

格式 (1.2.1) 是渐近稳定的,如果

$$\|C(\tau,h;t_2,t_1)\| \to 0, \quad t_2 \to \infty. \tag{1.2.11'}$$

格式 (1.2.1) 是强稳定的,如果

$$\|C(\tau_1 h;t+\tau,t)\| \leqslant 1-\varepsilon(\tau,h;T),\ \varepsilon > 0,$$
$$\varepsilon \to 0,\ 对\ \tau,h \to 0. \tag{1.2.12}$$

这些定义易于推广到变步长情形

$$\tau_1 = t_1 - t_0, \tau_2 = t_2 - t_1, \cdots, \tau_n = t_n - t_{n-1}.$$

定义 格式 (1.2.1) 与方程 (1.1.1) 相容, 如果对于问题 (1.1.1) 和 (1.1.3) 的光滑解 $u(x,t)$, 当 $\tau \to 0$ 时,

$$\frac{\|[C(\tau,h;t+\tau,t)-S(t+\tau_1 t)]u(x,t)\|}{\tau} \to 0 \tag{1.2.13}$$

对 $t(0 \leqslant t \leqslant T)$ 一致成立.

定义 问题 (1.2.1), (1.2.5) 的解 $u^n(x)$ 收敛到问题 (1.1.1), (1.1.3) 的解 $u(x,t)$, 如果令 $t = n\tau$, 当 $\tau \to 0$ 时

$$\|u^n(x)-u(x,n\tau)\| = \|[C(\tau,h;n\tau,0)-S(n\tau,0)]u_0\| \to 0 \tag{1.2.14}$$

在区间 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上对于任意 $u_n \in B$[1] 一致成立.

适定、相容和收敛的定义中都要用到取极限的规则

$$h = h(\tau),\ h \to 0,\ \tau \to 0. \tag{1.2.15}$$

这些都适用于 (1.2.8)—(1.2.14).

定义 格式 (1.2.1) 是无条件(绝对)适定的,如果它对任何取极限的规则 $(\tau,h \to 0)$ 都适定,即条件 (1.2.9) 在四分之一圆

$$\tau^2 + h^2 \leqslant \tau_0^2,\ \tau > 0,\ h > 0 \tag{1.2.16}$$

内对充分小 τ_0 成立. 否则, 格式 (1.2.1) 称为条件稳定, 即如果对任意一个取极限的规则条件 (1.2.9) 不满足.

1) 我们对 $t = n\tau$ 已经定义了收敛性,但在 C_{nm} 附加限制的情况下, 对 $t = n\tau$ 的收敛性推出对所有 t 的收敛性.

在条件适定时，条件(1.2.9)在四分之一圆(1.2.16)(边界通过(0，0)点)内零点的某个不完全邻域内成立。

稳定和强稳定之间的区别，类似于绝对一致适定和条件一致适定之间的区别,可以用同样方法来定义。

定义 格式(1.2.1)与方程(1.1.1)绝对相容，如果条件(1.2.13)在(1.2.16)域中满足，否则(1.2.1)与(1.1.1)条件相容。

绝对收敛和条件收敛可以类似地定义。

收敛定理[1] 如果(i)差分和微分 Cauchy 问题适定；(ii)算子 $\Lambda_1+\Lambda_0$ 逼近于 L: $\Lambda_1+\Lambda_0\sim L$；(iii) $\|(E-\tau\Lambda_1)^{-1}\|\leqslant N(T)$，则 Cauchy 问题(1.2.5)的差分解收敛到 Cauchy 问题(1.1.1)，(1.1.3)的微分解。

证明 令 $u(2,t)\in C_q$ 是(1.1.1)，(1.1.3)对应于初始条件 $u_0(x)\in C_q$ 的解，$u^n(x)$ 是差分问题(1.2.1)，(1.2.5)(具有同一初始条件)的解,则

$$v^n(x)=u^n(x)-u(x,n\tau) \tag{1.2.17}$$

满足差分方程

$$\frac{v^{n+1}-v^n}{\tau}=\Lambda_1v^{n+1}+\Lambda_0v^n+R_{n+1}, \tag{1.2.18}$$

其中

$$R_{n+1}=-\left\{\frac{u[x,(n+1)\tau]-u(x,n\tau)}{\tau}\right.$$
$$\left.-\Lambda_1u[x,(n+1)\tau]-\Lambda_0u(x,n\tau)\right\}, \tag{1.2.19}$$

初始条件为

$$v^0=0. \tag{1.2.20}$$

根据条件(ii)(逼近条件),当 $\tau\to0$ 时,我们有

$$\max_n\|R_n\|\to0. \tag{1.2.21}$$

运用收敛定理的条件(iii)，方程(1.2.18)可以表示为

---

1) 类似的收敛条件在最初由 V. S. Ryabenkii, N. N. Meiman 得到，为了简单起见我们仅考虑 $f=E=0$ 的情形。