数理经济学

〔英〕J.E 伍兹 著

代定一 汪同三 秦朵 译

SHULI JINGJI XUE

中國展望出版社

2/500117

数理经济学

J·E·伍兹

代定一　汪同三　秦　朵　译

中国展望出版社

一九八七年·北京

内 容 提 要

本书着重阐述数学中的矩阵理论、资本理论、生产模型理论、一般均衡理论，以及微分方程和差分方程理论，动态线性模型与非线性静态模型、动态模型理论及其在经济分析中的运用，适合作为大学有关经济类高年级学生及研究生用的《数理经济学》教材。

数 理 经 济 学

J·E·伍兹著

代定一 汪同三 秦 朵 译

•

中国展望出版社出版

(北京市西城区太平桥大街4号)

新华书店首都发行所发行

山西省阳曲县印刷厂印刷

开本787×1092毫米1/32　印张15.75

347千字　　　1987年1月北京第1版

1987年1月第1次印刷　1～10,250册

统一书号：4271·46　　定价：3.85元

序　言

本书是为经过一定数学训练（线性代数和微积分）的大学二、三年级学生所写的。本书力求自成系统。为此，用于经济分析的大多数数学理论在本书中（或在正文中或在练习中）都有推导，只有少数例外：布劳韦尔的不动点定理（第二章附录中的引理A1），微分方程组解的基本存在定理（第四章的定理2），李雅普诺夫稳定性（第四章的定理17和18），隐函数定理（第六章的定理7）及库恩—图克定理（见第八章第十节的4.2）。书中的练习为一独立部分。一些练习旨在检验读者对于书中所述（经济）理论的理解，另一些练习试图引导读者扩充书中理论。另外，如上所述，还有一些练习纯粹是用于推导数学结果的。

最后讲一下书中符号的使用。按照惯例，我用小写希腊字母表示标量，用小写罗马字母表示向量，用大写罗马字母表示矩阵。当然也有例外：例如第二章的定理36中的 ω 和第八章第十节中的 λ 都是向量。矩阵A中的典型元素记为 a_{ij}；向量x中的典型元素记为 x_i。1代表所有元素均为单位一的向量；0为零向量而〔0〕为零矩阵。有时，向量或矩阵也带脚标，用以表示向量或矩阵的阶数（即向量的分量或矩阵的元素个数）。最后再讲一下不等式的表示法。$\alpha \geqslant \beta$ 表示 α 大于或者等于 β；$x \geqq y$ 表示对于所有的i有 $x_i \geqslant y_i$；$x \geqslant y$ 表示对于所有i有 $x_i \geqslant y_i$ 且至少有一个i为 $x_i \neq y_i$（即 $x \geqslant y$ 为 $x \geqq y$ 且 $x \neq y$）；$x > y$ 表示对于所有的i有 $x_i > y_i$。

译　序

迄今为止，国内出版的西方数理经济学教科书，为数极少。这种情况的产生，有很多原因。其中一个主要原因，是经济学界长期来只把数理经济学视作资产阶级经济理论的数学表述。随着经济数学模型在我国经济管理中应用的发展，越来越多的经济学家逐步把数理经济学作为经济分析所需要的数学理论。循着这一个方向，在国内大学的一些经济系，开始增设数理经济学的课程。目前，按国家教育委员会的要求，正在组织力量编写数理经济学的教材。

在这个时侯，翻译出版J·E.Woods著的《数理经济学》教科书是及时的。西方国家的数理经济学教科书可分两类：一类是供大学低年级学生用的，内容较浅，属基础性读本，如Alpha C.Chiang著的《数理经济学基本方法》；另一类是供大学高年级或研究生用的，内容较深，属于高级教学用书。Woods的《数理经济学》接近于后一类。

这本书是D·W·Pearce主编的《现代经济学》丛书（共13本）之一，它适应现代经济分析的需要，着重阐述了数学中的矩阵理论、资本理论、生产模型理论、一般均衡理论，以及微分方程和差分方程的理论，动态线性模型与非线性静态模型、动态模型的理论。全书的体系虽不很完整，但每个专题的内容是有一定深度的。西方经济学中常用的一些著名的数学定理，散见于全书各章，并且有简明的证明和解释。

本书的另一个特点，是每章附有较多的参考文献和较好的练习题。这些文献有助于学生进一步扩大阅读范围和深入钻研。这些习题有利于学生加深对课文的理解和扩展思考。

我相信，本书的翻译出版，将会受到国内广大数理经济学爱好者的欢迎。

乌家培

1986年2月1日

后　　　　记

伍兹的这本《数理经济学》是写得较好的一本关于数理经济学的专著。我们把它译出来，奉献给从事经济理论研究和实际经济工作的读者们。

本书在翻译出版过程中，，得到了我国数量经济学界的前辈乌家培老师和张守一老师的指导，得到了中国社会科学院财贸物资经济研究所和中国展望出版社有关同志的帮助，在此表示衷心的感谢。

本书第一、二、三章由秦朵翻译，第四、八章由代定一翻译，第五、六、七章由汪同三翻译。我们三人还互相校审了译稿。

由于我们的水平有限，译文中肯定存在错误与不妥之处。我们衷心期待着读者的批评指正，以利于进一步修改、提高。

译　者

1986.12

第一章 导　言

1. 本书不是一部数理经济学的百科全书，任何看过书目录的人对这一点都一目了然。而且我认为，本书也决非一部关于互不相干的经济论题的讨论辑。相反，我力图使本书体现一整套相互关联的概念。

我要强调的是两种关系——一方面是所考察的经济模型之间的关系，另一方面则是经济模型与分析模型所需的数学理论之间的关系。

2. 让我们先考虑经济模型之间的关系。

2·1　在第二章，我们从分析静态投入产出模型入手，该模型为最简单的生产模型。（第三章用的也是静态投入产出模型，但是分析的目的是第二章所未曾涉及的：竞争条件下的工资、利润与价格之间的关系。）

我们在书中使静态投入产出模型所基于的假定条件逐级松驰。例如，在第二章第七节，我们取消了每个部门只有一种生产方法的假定；在第四章第二节12和第五章第二节，我们引入了时滞；在第五章第三节，我们（在约束性假定条件下）允许资本品的存在；资本品的正确处理则需要考察联合生产，这便是第七章的内容；在第六章第二节，我们还放松了模型的线性假定。可见，生产系统分析的展开构成本书的主题之一。

与此并行，我们在第二章第五节分析了静态线性支出系统，在第五章第一、四节、分析了相应的动态线性系统，并

在第六章第三节分析了非线性系统。在多部门支出系统中，时滞与非线性的引入与二者在生产系统中的引入相似。关于生产系统与支出系统，还有两点需要说明：首先，两个系统均导出一个在直观上诱人的矩阵乘数概念；如果仅从两个系统相似的数学表达方法角度看，这大概并不令人惊奇，然而我们在这里讨论的则是它们（用乘数来表示）的经济含意。其次，我们可以得出一个生产系统和支出系统的综合体；第五章第四节导出的模型为线性的。非线性模型则在第六章第四节出现。

2·2　第八章讨论了由生产和消费行为构成的另一种综合体——得出一个简单的一般均衡模型。在这之前讨论的许多模型可以看作是一般均衡系统的特例；我们认为，第二章的里昂节夫（静态投入产出）模型、第六章第二节的非线性投入产生模型、以及第七章的冯·诺依曼模型都是以描述生产系统为主的，而第五章第一节的多国贸易模型则属于支出模型。我们针对较简单模型提出的问题同样是适用于一般模型的；例如，在给定的技术条件下，模型是否能维持均衡（即对于任何商品的需求均不存在过剩的状态），该均衡是否是唯一的；消费者爱好的改变将如何影响均衡（即相对静态分析）；均衡是否稳定等等。后三个问题是密切相关的，这是由于只有当均衡为唯一的稳定的时侯，相对静态分析才有意义；即保证唯一、稳定均衡的条件一般能够得出确定相对静态的结果。我们在第八章得出了反复出现于稳定性分析、唯一性以及相对静态分析中的总可置换性条件。我们还发现，保证线性或非线性静态投入产生模型具有非负解的条件还能够保证确定的相对静态结果。

3.　至于经济学与数学的关系，这里讲两点。3.1讨论

相似经济模型往往具有相似数学条件的问题，3.2阐明某些数学条件如何自然地产生于经济分析之中的问题。

3·1 我们在第二章第一节用霍金斯——西蒙定理求解静态线性投入产出模型。同样，我们用广义的霍金斯——西蒙定理求解第六章第二节1的静态非线性投入产出模型。相似地，第二章第三节的静态投入产生模型可以用派朗——弗罗比尼乌斯定理来解，而第六章第三节的动态非线性模型则要用广义（非线性）的派朗——弗罗比尼乌斯定理来解。该定理的频繁应用还体现于第五章第四节2—4和第六章第三节2的生产——支出综合模型；在第五章，某个矩阵（即一个线性变换）的弗罗比尼乌斯根给出了线性模型增长率的极限；在第六章一个非线性变换的弗罗比尼乌斯根同样也给出了非线性模型的增长率的极限。可见，经济模型与数学定理之间存在着并行的关系。这一点在应用P—阵讨论唯一性的问题上表现得更为明显。应用P—阵讨论唯一性不仅适用于一般均衡模型（第八章第四节和第六章第二节2），也适用于非线性投入产出模型（第六章第二节1），而且还适用于线性投入产出模型（第二章第一节）。

3.2 从第八章第二节关于一般均衡存在的分析中可以看到一个更为自然的关系——一个连续变换的不动点与经济均衡之间的关系；价格对于过度需求有着连续地反应；不动点即为找到某一价格向量过程中的顶点，在该价格向量条件下对于任何商品都不存在过度需求的情况。同样我们还可以看到，第二章第二节的对角优势条件是自然地产生于生产性投入产出系统的分析中的。如果我们假定一个系统为生产性的（即该系统的生产超出产业部门间的需求），我们实际上就是规定了对角优势条件。如果我们设各种商品的总产出量为

一个单位，那么，投入产出系数实际上就是产业部门之间的流量。系统为生产性的规定还意味着投入产出矩阵A的每行之和小于1（见第二章第六节），根据该章第四节5的结论，这意味着A阵的弗罗比尼乌斯根小于1。可见，求解投入产出模型的三个条件中的两条就是这样自然产生的。

4．最后要讲的是数学在书中的作用问题。

本书力求自成体系，这点从书的内容安排上就可以看到。例如第二章的矩阵理论，第四章的微分方程和差分方程，第六章的线性不等式及第七章的凸集理论。本书还力求对大多数的理论，不论是经济理论还是数学理论，进行严格的证明。对于那些经济内容相对较少的论题，我们则侧重于数学的推导，例如第五、六章的相对稳定性定理。证明一个模型相对稳定性的含意可能并不大，然而若无相对稳定性一般则意味着模型的解无意义（即本来应为非负的变量出现负值）。所以，相对稳定性有助于我们确定哪些模型是不可取的。而要确定一个经济模型是可取的，则还需要具备其他一些条件，进行更多的检验。

第二章　投入产出与矩阵理论

本章的目的有二：分析最简单的投入产出模型，同时推导本书所需的大部分数学理论（以矩阵理论为主）。第一、二、三节考察模型求解问题，即当非负的最终需求向量已知时，找出相应的总产出的非负向量存在的条件。第六节讨论在技术不可分解的情况下（这大致意味着每种商品的生产直接或间接地需要所有各种商品的生产），对一种商品（如第 k 种）的最终需求量的变动对于各种商品总产出的影响。我们得出，这时各种商品的总产出均有所增加，增加最多的为商品 k；而其增量不超过对于 k的最终需求的变动量。最简单的投入产出模型的特点是每种商品只有一种生产方法；很自然我们需要探讨取消这一假定后的结果——这就是第七节的内容。有些读者可能会对这节的主要结论——不可替代定理感到意外。

由于本章第一、二节和第三节 3 讨论的都是最简单的投入产出模型解的问题，这可能会使人感到该有解问题特别困难。请君莫慌。本书从投入产出模型入手的主要原因之一是，这样做能够十分自然地导出一些不仅用于本章而且也用于全书的数学概念。我们在第一节最先得出了霍金斯——西蒙定理。该定理阐明，当且仅当某矩阵（如I－A，I为单位阵，A为投入产出系数阵）的各个主子式为正，简言之，即I－A为P—阵，投入产出模型才有非负解。然而，要说明决定主子式符号的条件则是一件难事，若与第二节关于投入产

出模型有解的第二条充分必要条件的清晰说明（见该节练习的第13题）相比便更显其难了。这里所说的第二个数学概念即为准优势对角矩阵。

第三个数学概念是半正矩阵，即各元素非负且至少其中之一为正的矩阵。我们将看到，半正矩阵的一个例子便是投入产出系数阵A。半正矩阵具有若干有趣的性质，这些性质由第三节1、2中的派朗——弗罗比尼乌斯定理所概括。半正阵有一个绝对值最大的非负特征根（称为弗罗比尼乌斯根）以及一个相应的半正特征向量，这不是一条显而易见的性质。由于这些（派—弗）定理的推导运用了前述P—阵的概念与霍金斯——西蒙定理，这使我们的上下文内容协调一致。①我们在第三节3中证明了投入产出模型有解的（第三个）充分必要条件，即A的弗罗比尼乌斯根小于1。

本书明确体现了以上三个数学概念的重要性——每个概念均导出一条投入产出模型有解的充分必要条件。这些概念的应用还不仅限于投入产出模型；例如，唯一性理论主要基于P—阵（见第六章第一节2）；稳定性分析的经济假定条件自然引出准优势对角阵（见第八章第六节1）；弗罗比尼乌斯根及其相应的特征向量则为某些动态系统提供了非负解（线性系统的应用见第五章第三节1）。当然，这些概念在用于投入产出之外的其他模型时需要加以修改。总之，这些都要求矩阵理论的发展，阐明该理论便是本章的任务。本章第四节1、2中所述P—阵在第五、六章的第一节都得到直接应用；而第二节概述的准优势对角阵理论的大部分则应用于全书通篇。用于动态分析的派朗——弗罗比尼乌斯理论的扩展则为第三节5及第四节3、4的内容。

第一节　霍金斯——西蒙定理

我们以研究最简单的投入产出模型为出发点。该模型的特性为：

（1）不存在联合生产；每个生产部门只与生产一种产品；即部门及产品之间存在着一一对应的关系，部门与产品这两个概念可以相互代用；

（2）每个部门只有一种生产方法；其生产函数为系数不变型的——j部门生产一单位的j商品需要a_{ij}单位的i商品，$i, j=1, \cdots, n$；

（3）不存在生产滞后；

（4）不存在资本品；模型不考虑反复进入生产过程超出一个生产阶段的商品，而只包括一经生产过程的使用便不复存在的商品；

（5）不存在对外贸易；

（6）不存在政府活动；

以上为已知假定条件，下面为符号说明：

x_i：部门i的总产出

x_{ij}：部门j用于投入的商品i的数量

$a_{ij}=x_{ij}/x_j$

c_i：对于商品i的最终需求　　$i, j=1, \cdots, n$

各部门的基本平衡方程可以写为：

$$x_i=\sum_{j=1}^{n} x_{ij}+c_i \qquad i=1, \cdots, n\text{或}$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + c_i \text{或}$$

$x = Ax + c$　　其中$A = [a_{ij}]$，$i, j = 1, \cdots, n$。

与j部门生产过程相关的系数包括于A的第j列。$(a_{1j}, \cdots, a_{nj})'$为 j 部门的活动向量，它描述该部门所使用的生产技术。定义$B = I - A$，则有：

$$Bx = c \tag{1}$$

我们现在来考虑以下问题：已知 $c \geqslant 0$，我们能否得出满足式〔1〕的$x \geqslant 0$？下列说明此方程是非平凡的：

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

已知A和c，式〔1〕的解为$x = (-6 \quad -7)'$，此解无意义。

霍金斯和西蒙在以下约束条件下考察了这个问题：

（1）$b_{ii} > 0$；$b_{ij} < 0$；$i \neq j$；$i, j = 1, \cdots, n$；

（2）$c > 0$。

他们认为，约束条件（1）“并没有给问题的一般性带来实质上的损失，因为对于这些系数的各种变动，上述方程式均为连续的”。②

下面我们阐述和证明广义的霍金斯——西蒙定理，该证明法由二阶堂完成。③定理给出了在$c \geqslant 0$已知条件下使$x \geqslant 0$的一组充分必要条件，为此该定理十分引人注目。而且，它作为一条基本引理，在关于半正矩阵的派朗——弗罗比尼乌斯定理的证明中起一定作用。

定理1：让我们考虑$Bx = c$，其中对于所有的$i \neq j$，都有$b_{ij} \leqslant 0$。下列条件为等价的：

（1）已知$c>0$，则$x\geqslant 0$；

（2）已知$c\geqq 0$，则$x\geqq 0$；

（3）B的左上主子式为正；

（4）B为P-阵（即B的所有主子式为正）。

证明：证明分有四部分（1—4）。前三部分证明条件（1）—（3）的等价性；第四部分证明条件（4）与（1）—（3）的等价性。

（1）我们将证明条件（1）隐含条件（3）。我们将用数学归纳法来证。

令$p(k)$为正整数k的某一命题。这里我们令$p(k)$为："对于一个k阶系统，条件（1）即意味着条件（3）是正确的。"

由于1阶系统为$b_{11}x_1=c_1$，所以$p(1)$有效。如果条件（1）满足（即对于$c_1>0$，有$x_1\geqslant 0$），则条件（3）也满足（即$b_{11}>0$）。

现在假设$p(n-1)$有效，我们将说明$p(n)$也随之有效。也就是说我们假定对于n阶系统条件（1）成立且$p(n-1)$有效。

据条件（1），对于某个$c>0$，式〔1〕有解$x\geqslant 0$。式〔1〕的第一个方程为：

$$b_{11}x_1=c_1-\sum_{j=2}^{n}b_{1j}x_j \qquad 〔2〕$$

由于$c_1>0$，而对于所有的$j=2,\cdots,n$，都有$b_{1j}\leqslant 0$，$x_j\geqslant 0$，以上等式右端为正。因此$b_{11}x_1>0$。由于$x_1>0$，则有$b_{11}>0$。对式〔1〕进行初等行运算，我们有：

$b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n=c_1$

$$
\begin{aligned}
&b'_{22}x_2+\cdots+b'_{2n}x_n=c'_2\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots\\
&b'_{n2}x_2+\cdots+b'_{nn}x_n=c'_n
\end{aligned}
\qquad [3]
$$

实际上，将式〔1〕的第一个方程乘以$-b_{i1}/b_{11}$，再与式〔1〕的第i个方程相加，便得出式〔3〕,让我们讨论一下式〔3〕中系数b'_{ij},i,j=2，…,n和c'_j，i=2,…,n的符号。

$$b'_{ij}=b_{ij}-\frac{b_{i1}}{b_{11}}\cdot b_{1j};\qquad i,\ j=2,\ \cdots,\ n \qquad [4]$$

$$c'_i=c_i-\frac{b_{i1}}{b_{11}}\cdot c_1$$

b_{i1}的符号是已知的,对于所有$i\neq j$，c_i与$b_{11}>0$，都有$b'_{ij}<0$，$c'_i<0$。

则方程组（由式〔3〕摘出）：

$$\begin{pmatrix} b'_{22}\cdots b'_{n2}\\ \vdots \qquad \vdots\\ b'_{n2}\cdots b'_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c'_2\\ \vdots\\ c'_n\end{pmatrix} \qquad [5]$$

满足：对于所有$i\neq j$，$b'_{ij}\leqslant 0$，且对于特定的（c'_2，…c'_n）′有一非负解。根据归纳假设，式〔5〕中的矩阵具有正左上主子式，即：

$$\det\begin{pmatrix} b'_{22}\cdots b'_{2k}\\ \vdots \qquad \vdots\\ b'_{k2}\cdots b'_{kk}\end{pmatrix}>0 \qquad k=2,\ \cdots,\ n$$

$$\text{而}\det\begin{pmatrix} b_{11}\cdots b_{1k}\\ \vdots \qquad \vdots\\ b_{k1}\cdots b_{kk}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots & b_{1k}\\ 0 & b'_{22}\cdots & b'_{2k}\\ \vdots & \vdots & \\ 0 & b'_{k2}\cdots & b'_{kk}\end{pmatrix}$$

$$=b_{11}\cdot\det\begin{pmatrix} b'_{22}\cdots b'_{2k}\\ \vdots \qquad \vdots\\ b'_{k2}\cdots b'_{kk}\end{pmatrix} \qquad [6]$$

因此就有：B满足条件（3）。