大專企業用書

管理數學

（作業研究）

賴尚憲　何丁舜
莊　晉　周杰之　編著

科教圖書出版社印行
總經銷　科技圖書股份有限公司

大專企業用書

管理數學

（作業研究）

賴尚憲　何丁舜
莊　晉[illegible]周杰之
編著

科教圖書出版社印行

總經銷　科技圖書股份有限公司

大專企業用書

管理數學

（作業研究）

行政院新聞局局版台業字第 1921 號
編 著 者： 賴 尚 憲　何 丁 舜
　　　　　 莊　 晉　 周 杰 之
出 版 者： 科教圖書出版社
社址：台北市漢口街一段八號三樓
電話：314－8982
發 行 者： 周 杰 之
印 刷 者： 大台北打字印刷公司
地址：台北市貴陽街 2 段 11 號
電話：331－9243
總 經 銷： 科技圖書股份有限公司
地址：台北市博愛路 185 號 2 樓
電話：311－0953　郵撥：15697

中華民國六十八年三月初版

特價　180元

JY111116/110

編輯大意

一、本書是以編著者在企業界從事企業管理的實際經驗與在各大專院校的教學心得，並酌量採用各國最新的參考資料，按理論與實務並重的方式編寫，期能適用於大專院校有關課程，並希望對於企業界有所貢獻。

二、本書的目標在使讀者瞭解一切與管理有關的科學方法如何配合應用在各種管理活動上，並熟悉實際的計量管理技巧，期能使讀者在從業時發揮所長。

三、本書對於有關實務除舉例加以說明之外，每章節之後均附有習題，以期收到學以致用的效果。

四、本書雖審慎編寫，難免有疏漏之處，尚祈諸學者前輩不吝指正，期能使再版時達到盡善盡美之境界，則由衷感激。

管理數學

目 錄

第十二章　動態規劃 ………………………… 383

(DYNAMIC PROGRAMMING)

第十三章　存量模式 ………………………… 407

(INVENTORRY MODELS)

附　錄

附錄一　平方與平方根表

附錄二　二項機率總和$\sum_{x=0}^{r} b(x:n,p)$表

附錄三　波厄尙機率總和$\sum_{x=0}^{r} p(x:\mu)$表

附錄四　常態曲線下之面積表

附錄五　t 分配之臨界值表

附錄六　卡方分配之臨界值表

附錄七　F 分配之臨界值表

附錄八　隨機數表

附錄九　亂　數　表

附錄十　複　利　表

第一章　矩陣及其運算

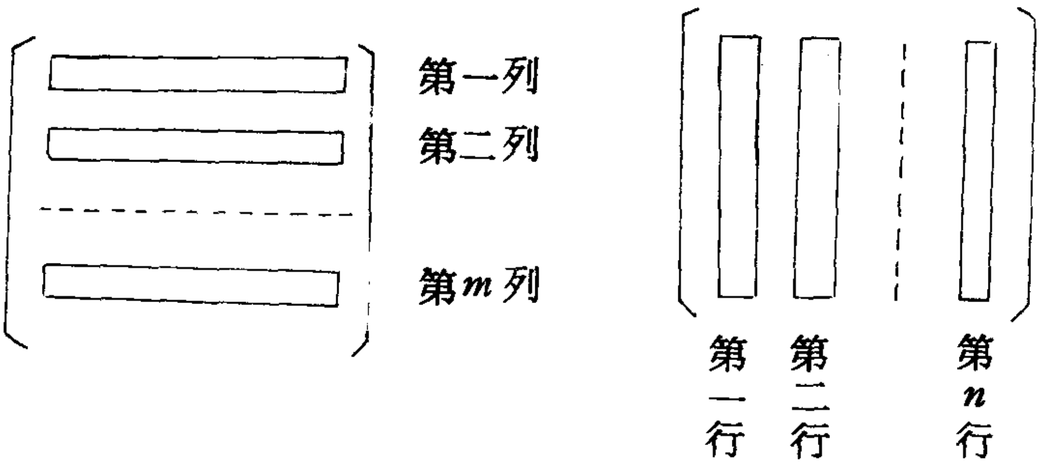
管理數學是一種新的應用數學，一方面注重基本知識的灌輸，另一方面要收集許多管理活動中的實際問題，做爲例題與習題，使有機會活用理論，實際練習解決問題，而本書是以線性代數爲基礎來介紹機率及線性規劃的應用，而矩陣爲線性代數最基本的部份。在解決很多管理問題時，矩陣將煩雜的實際問題，化成簡單的數學語句，然後利用矩陣的運算，很容易算出所要的結果。

1－1　矩陣及矩陣運算

【定義 1-1-1】 一般而言，將 mn 個數排成長方形，形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

稱爲 $m \times n$ 矩陣，用以排成矩陣之數，稱之爲此矩陣之元素（elements），各橫列爲此矩陣之列（row），縱行稱爲此矩陣之行（column）。



例如：〔a_{i1} a_{i2} ………a_{in}〕為第 i 列。

$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ 為第 j 行　$\begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}$ 第 i 列，a_{ij} 為第 i 列第 j 行之元素。

第 j 行

矩陣常以英文大寫字母 A，B 表示。

【定義 1-1-2】

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

此矩陣又稱為 m 列 n 行矩陣，且常簡寫成〔a_{ij}〕$_{m\times n}$ 或〔a_{ij}〕。

當 $m=n$ 時此矩陣特稱之為 n 階方陣（Square matrix）。

【例 1】 某汽車產商出產三種不同型狀的汽車。姑且叫做勝利型，豪華型及普通型。若產商欲比較製造這三種不同型所用材料及勞力之異同，習慣上產商就會列成下列一個表：

	勝利型	豪華型	普通型
材料單位	20	15	10
勞力單位	7	8	9

爲了方便處理，就會把上表寫成矩陣的形式：$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

稱爲有二列三行的矩陣或簡稱爲 2 × 3 矩陣。

【例 2】 (1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ 爲三列四行矩陣，即 3×4 矩陣。

(2) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 爲三列一行矩陣，即 3 × 1 矩陣。

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 爲一列三行矩陣，即 1 × 3 矩陣。

有一種特殊的矩陣那就是爲上列(2)(3)只有一行或一列的矩陣。

【定義 1-1-3】 只有一行的矩陣特稱爲行向量（ Column Vector ）如上例(2)。

【定義 1-1-4】 只有一列的矩陣特稱爲列向量（ Row Vector ）如上例(3)。

又譬如：$x = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 就是行向量，亦是 4 × 1 矩陣。

$y = [\ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ ]$ 就是列向量，亦是 1 × 4 矩陣。

【定義 1-1-5】 方陣內的元素 $a_{11}\,a_{12}\,\cdots\cdots\, a_{nn}$ 稱爲對角元素（ diagonal elements ）其組成之集合，稱爲主對角線（ main diagonal ）方陣 A 內對角元素之和稱爲 A 的跡（ trace ）通常用 $t_r(A)$ 代表。

主對角線以外的元素均爲 0 之方陣稱爲對角方陣。（ diagonal matrix ）

【定義 1-1-6】 主對角線上之各元素均等於 1 之對角方陣，稱爲單位矩陣（Unit matrix）；又稱恒等矩陣（Identity matrix）。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \text{diag}[\, a_{11}, a_{22}, \cdots\cdots a_{nn} \,]$$

（其中 $a_{11}, a_{22}, \cdots\cdots a_{nn}$ 均爲 1）

單位矩陣以 I_n 爲以 I 表示

如 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 等均爲單位矩陣。

【定義 1-1-7】 兩個矩陣 A 和 B 若且唯若（if and only if 或 iff）兩者同階且其中一個中的每一個元素都等於另一個中的對應元素時；則 $A = B$，稱爲兩相等矩陣（equal matrices）。

如 $A = [\, a_{ij} \,]_{m\times n}$ 及 $B = [\, b_{ij} \,]_{m\times n}$ 則若且唯若 $a_{ij} = b_{ij}$（$i = 1, 2 \cdots\cdots m$；$j = 1, 2 \cdots\cdots n$）時兩者相等。

【定義 1-1-8】 每一元素都爲零的矩陣，稱爲零矩陣（zero matix）。以大黑體字 $\boldsymbol{O}$ 或 $[\, \boldsymbol{O} \,]_{m\times n}$ 表之以與純量 O 區別之。

以上我們已對矩陣作了一些介紹，對於他們的運算；如加法，減法，乘法，我們將一一討論。

我們先看下面一個例子：

【例 4】 一製造廠商於最近二年對於產品及銷售地區，作了一個統計；如二表所列：

民國 66 年

產品	銷售地區		
	1	2	3
I	98	24	42
II	39	15	22
III	22	15	17

民國 67 年

產品	銷售地區		
	1	2	3
I	55	19	44
II	43	53	38
III	11	40	20

我們將上表簡化爲下列二個矩陣：

$$A=\begin{bmatrix}98 & 24 & 42\\ 39 & 15 & 22\\ 22 & 15 & 17\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}55 & 19 & 44\\ 43 & 53 & 38\\ 11 & 40 & 20\end{bmatrix}$$

這二年來，此廠產品銷售於各地區的狀況，可用下列矩陣表之。

$$\begin{bmatrix}98+55 & 24+19 & 42+44\\ 39+43 & 15+53 & 22+38\\ 22+11 & 15+40 & 17+20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}153 & 43 & 86\\ 82 & 68 & 60\\ 33 & 55 & 37\end{bmatrix}$$

像上面的矩陣，即是A與B的和。

由此得一定義爲：

【定義 1-1-9】 兩個矩陣同階，則可以相加，其和也是同階矩陣。

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\qquad B=[b_{ij}]_{m\times n}$$

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}=[c_{ij}]_{m\times n}=C$$

【例 5】 $\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 4 & -5\\ 0 & 1 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 4 & -2\\ 3 & 1 & 0\\ -6 & 3 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+2 & -1+4 & 2-2\\ 2+3 & 4+1 & -5+0\\ 0-6 & 1+3 & 7-3\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & -5 \\ -6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

必須注意，像下列二個矩陣並不能求其和：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad ,$$ 其理由爲何？

【定義 1-1-10】 一純量（實數，複數，或函數）（ Scalar ）乘於矩陣，則以該純量乘於矩陣中之每一元素：

$$kA = k[a_{ij}]_{m\times n} = [ka_{ij}]_{m\times n}$$

【例 6】 設 $A = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad c = -2$

則 $cA = (-2)A = (-2)\begin{bmatrix} 8 & -3 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 6 & -12 \\ -14 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

【例 7】 某電機工廠 1 月，2 月之生產台數如表：

	1 月	2 月
電視機	150	130
冰　箱	120	110
洗衣機	70	80

其 3 月份各製品之生產台數爲 1 月份之 1.5 倍，試寫出 3 月份各製品生產台數的矩陣。

【解】

$$1.5 \times \begin{bmatrix} 150 \\ 120 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 225 \\ 180 \\ 105 \end{bmatrix}$$