# 常微分方程

CHANGWEIFEN
FANGCHENG

山东教育出版社

# 常微分方程

王常藩 温锡九 任 娜 编著
任永泰 主审

山东教育出版社
一九八八年·济南

**常微分方程**

王常藩 温锡九 任 娜 编著

任永泰 主审

*

山东教育出版社出版

（济南经九路胜利大街）

山东省新华书店发行　山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

787×1092毫米 32开本　18印张　384千字

1988年10月第1版　1988年10月第1次印刷

印数 1—2,460

ISBN 7—5328—0435—6/O·10

定价 4.25元

常微分方程
王常藩 温锡九 任 娜 编著
任永泰 主审
*
山东教育出版社出版
(济南经九路胜利大街)
山东省新华书店发行 山东新华印刷厂潍坊厂印刷
*
787×1092 毫米 32 开本 18 印张 384 千字
1988 年10月第 1 版 1988 年10月第 1 次印刷
印数 1—2,460
ISBN 7—5328—0435—6/O·10
定价 4.25 元

1-520

# 说　　明

为了适应社会主义现代化建设的需要，提高民族素质，多出人才，快出人才，我国制定了高等教育自学考试制度。"常微分方程"是数学专业的必考课。本书就是按照《常微分方程自学考试大纲》的要求，为自学应考的读者编写的。

为了便于自学，本书在写法上有以下特点：

每章、节之前都有提纲挈领式的概述，在每章、节之后又有总结，力图前后呼应，溶为一体。

对概念的引入，力求讲明来源，并揭示其实质。在讲述问题时，注意思想方法的指导。

书中收集了较多的例题。每节之后设有复习思考题和相当数量的习题，读者通过这些练习，既能明确本节的主要内容，又能巩固所学知识。各章之后还有一定数量的综合练习，借此读者可检查自己的自学效果，培养分析问题和解决问题的能力。

书末有全部习题的答案，较难的题目给出了提示，有代表性的题作了解答。

为保持知识的完整性，本书有三处增加了《大纲》中未要求的内容。

本书也可作为夜大、函大的教学参考书。

参加本书编写的还有吴兆荣、卞瑞玲同志。

由于水平有限，书中难免有欠妥之处，欢迎读者批评指正。

编　者

1988年3月

# 目　　录

# 第一章　初等积分法

微分方程的一个中心问题是求解，用积分的方法求微分方程的解，叫做初等积分法。在微分方程中，可用积分法求解的类型叫可积类型。

本章主要介绍一些通过求积分就可以把未知函数和自变量的函数关系找出来的一阶或二阶微分方程的解法。全章共分为九节，其中第一节基本概念；第二节到第五节研究一阶微分方程中几种可积类型的初等积分法；第六节在方向场中给出解的几何解释；第七节和第八节则分别研究一阶隐式方程和二阶微分方程的初等积分法；第九节举例说明微分方程的应用。

## §1·1　基本概念

方程是含有未知量的等式，它表达了未知量所必须满足的某种条件。方程的类型很多：

在初等数学里有代数方程，

如　$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0.$$

有超越方程，

如　$$2^x=x+1.$$

它们都是由数和未知量 $x$ 组成的等式，它们的解都是数。

在解析几何和微积分中还研究过函数方程，

如　$F(x,y)=0$。

它是由自变量$x$和函数$y$组成的等式，它的解是函数。

现在将要研究的微分方程，就是函数方程中的最重要的一种，它除了含有自变量和未知函数外，还包含了未知函数的导数。下面先通过一些具体例子，来说明这种方程是客观存在的。

（1）镭的衰变　镭是放射性物质，它的质量$m$是随时间$t$的增加而减少。试求镭的质量随时间的变化规律$m(t)$。

镭的衰变速度（也就是质量减少的速度）与剩余的质量成正比。若设$t$时刻镭的质量为$m$，即

$$m=m(t),$$

则它在时刻$t$的衰变速度，即质量$m$关于时间$t$的变化率为$\frac{dm}{dt}$，于是有

$$\frac{dm}{dt}=-km.$$

其中$k$是比例常数，在习惯上$k$取为正数。由于镭在衰变过程中质量逐渐减少，即$m(t)$是递减的，所以质量的变化率$\frac{dm}{dt}<0$，故在等式右端应有一负号。

上述方程就是镭的质量变化所满足的方程，它含有未知函数$m(t)$的导数，是微分方程，解这个微分方程就可得到质量随时间的变化规律。

（2）自由落体　设质量为$m$的物体$A$，在无阻力的情况下自由下落，求该物体$A$下落的路程$S$随时间$t$的变化规律。

如图1—1，取坐标轴$S$铅直向下，因此重力$W$向下为

正，即 $W=mg$，其中 $g$ 是重力加速度。因为假设$A$是自由落体，所以这时$A$所受的外力 $F$ 只有重力$W$，即 $F=mg$。

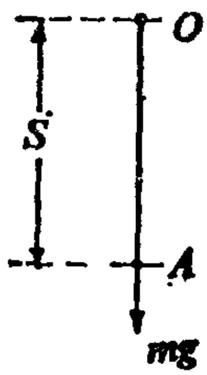

图 1—1

由牛顿 (Newton) 第二运动定律，有

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg, \quad 即$$

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g.$$

这就是 $s(t)$的导数所满足的关系式，也是一种典型的微分方程，解这个方程就可得到物体下落的路程随时间的变化规律。

(3) 曲线方程　已知曲线的切线在$x$轴与$y$轴上截距之和恒为 2，求该曲线方程 $y=y(x)$。

要想直接建立这条曲线的方程是困难的，但我们可先设曲线上任一点$(x,y)$处的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x),$$

其中$X$、$Y$为切线上的流动坐标。于是

令 $Y=0$，得切线在$x$轴上的截距

$$X_0=x-\frac{y}{y'}.$$

令 $X=0$，得切线在$y$轴上的截距

$$Y_0=y-xy'.$$

这时根据题设，有

$$X_0+Y_0=2, \quad 即$$

$$x-\frac{y}{y'}+y-xy'=2 \quad 或$$

$$xy'^2-(x+y-2)y'+y=0.$$

这个方程既含有自变量、函数，又包含函数的导数，是微分方程．它表达了所求曲线满足的条件，解这个微分方程，就可得到曲线的方程．

从上面三个例子可以看出，寻求变量间的函数关系，是自然界中普遍存在的问题．不过在自然界中有许多事物不能直接找出彼此间的相依关系（即函数关系），但却很容易找到这些量与其导数（或微分）之间的关系式，这类关系式就是微分方程．

**定义1** 含有未知函数的导数（或微分）的等式，叫做微分方程．

例如

(1) $\dfrac{dy}{dx}=x$, (2) $\dfrac{dx}{dt}=x^2+t^2$,

(3) $xdy+y^2dx=0$, (4) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+2y=\sin x$,

(5) $m\dfrac{d^2x}{dt^2}+k\dfrac{dx}{dt}+nx=0$,

(6) $a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)$,

(7) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=x+y$, (8) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$,

等都是微分方程．

在一个微分方程中，是否明显地含有自变量或未知函数，是无关紧要的，重要的是，它必须含有未知函数的导数（或微分）．

微分方程可按未知函数的自变量个数的不同，分为常微

分方程与偏微分方程。

只含一个自变量的微分方程称为常微分方程. 在常微分方程中，未知函数的导数是对仅有的自变量的导数。

如前面例中的前六个方程都是常微分方程。

所含自变量多于一个的微分方程称为偏微分方程。

如前面例中后两个方程就是偏微分方程。

本书主要讨论常微分方程，对偏微分方程只介绍其中与常微分方程有密切联系的一阶偏微分方程，而且只讲其中的个别类型. 因此，为叙述简单起见，今后我们把常微分方程简称为微分方程或方程。

微分方程中未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶。

前面例中，(1)、(2)、(3)、(4) 为一阶常微分方程；(5)为二阶常微分方程；(6) 为 $n$ 阶常微分方程；(7) 为一阶偏微分方程；(8) 为二阶偏微分方程。

一阶常微分方程的一般形式可表为

$$F(x,y,y')=0. \tag{1·1}$$

如果(1·1)能解出 $y'$，则得到

$$y'=f(x,y) \tag{1·2}$$

或 $$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0. \tag{1·3}$$

(1·1) 称为一阶隐方程，(1·2) 称为一阶显方程，(1·3) 称为微分形式的一阶方程。

前面例中，(1)、(2) 是一阶显方程；(4) 是一阶隐方程；(3) 是微分形式的一阶方程。

一般地，$n$ 阶微分方程具有形式

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0, \tag{1·4}$$

其中$x$是自变量，$y$是未知函数。(1·4) 式的右端是$x,y,y',\cdots,y^{(n)}$的已知函数。(1·4) 既然是$n$阶微分方程，则它必含有$y^{(n)}$。

如果 (1·4) 能解出$y^{(n)}$，得到

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}),$$

称为显式微分方程，而 (1·4) 称为隐式微分方程。

如果方程 (1·4) 对$y,y',\cdots,y^{(n)}$都是一次的有理整式，则称 (1·4) 为$n$阶线性微分方程。若对$y,y',\cdots,y^{(n)}$至少有一个不是一次的，就称 (1·4) 为非线性方程。

前面例中，(1)、(5)、(6) 是线性微分方程，(2)、(3)、(4) 是非线性微分方程。

微分方程中最重要的概念是"解"的概念。

对于代数方程的解，我们已经很熟悉了，在微分方程中，解的概念是与此相似的。

**定义 2** 若将一个函数代入微分方程中，使方程成为关于自变量的恒等式，则称这个函数是该微分方程的解。

一个函数"满足"某方程，这句话的意思就是一个函数是某方程的解。

由于微分方程的解是函数，并且将它代入方程，是经过微分运算使等式成立的，因此微分方程的解有无穷多个。为了说明微分方程这种解的复杂性，我们先以最简单的微分方程

$$\frac{dy}{dx}=x \tag{1·5}$$

为例，考查一下。

方程两边求不定积分后，得

$$y=\int x dx+c \quad \text{即}$$

$$y=\frac{1}{2}x^2+c。$$

由于 $c$ 可以取任何值，所以它表示无穷多个函数．将它代入方程（1·5）后，左端$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2+c\right)=x$，方程(1·5)两端恒等，所以说方程(1·5)有无穷多个解．

再看方程

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g。\tag{1·6}$$

方程两边求不定积分，得

$$\frac{ds}{dt}=gt+c_1。\tag{1·7}$$

两边再积分，得

$$s=\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2,\tag{1·8}$$

其中 $c_1$、$c_2$ 是任意常数．将它代入原方程，两边恒等，故它是方程（1·6）的解．

我们得到的含有两个任意常数的解，它表示落体运动的一般规律．若对于具体的落体运动，我们给出初始位置，取坐标系 $S$ 轴铅直向下，原点在起始点处，这样就有了条件 $S|_{t=0}=0$；再给出初始速度，假定初始速度为零，即$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=0$，有了这两个条件就可以得到一个完全确定的解了．

令 $t=0$，将$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=0$ 代入(1·7)，得到

$$0=0+c_1,\quad c_1=0。$$

再令 $t=0$，将 $s|_{t=0}=0$ 代入（1·8），得到

$$0=0+0+c_2, \quad c_2=0.$$

于是，利用两个初始条件确定了（1·8）中的两个任意常数，就得到一个完全确定的解，

$$s=\frac{1}{2}gt^2. \tag{1·9}$$

**定义 3** $n$ 阶微分方程的含有 $n$ 个任意常数的解，称为方程的通解。由隐式表出的通解称为通积分。给通解中的任意常数以确定值，所得到的解称为特解。由隐式表出的特解称为特积分。

如（1·8）就是方程（1·6）的通解。（1·9）就是方程（1·6）的一个特解。

用来确定特解的条件叫定解条件，最常见的定解条件是初值条件，如在自由落体问题中，表示落体的初位移 $s|_{t=0}=0$ 与初速度 $\frac{ds}{dt}|_{t=0}=0$，都是初值条件。

一个 $n$ 阶微分方程（1·4）的初值条件，是指如下 $n$ 个条件：

当 $x=x_0$ 时，对应的 $y=y_0$，$y'=y_0'$，$\cdots$，$y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$

或写成

$y(x_0)=y_0$，$y'(x_0)=y_0'$，$\cdots$，$y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$。

附加了初值条件的微分方程的求解问题，叫初值问题。由于它首先由柯西（Cauchy）提出，所以也称之为柯西问题。

如

$$\begin{cases}\dfrac{d^2s}{dt^2}=g,\\ s|_{t=0}=0,\\ \left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=0}=0,\end{cases}$$

就是关于自由落体的初值问题.

再如，在镭的衰变问题中，若给出 $t=0$ 时，镭的质量为 $m_0$，则得初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dm}{dt}=-km,\\ m|_{t=0}=m_0.\end{cases}$$

一阶微分方程的初值问题的提法是：求方程

$$F(x,y,y')=0$$

满足条件

$$x=x_0,\ y=y_0 \quad (x_0,y_0\text{为常数})$$

的解.

初值问题的求解方法可归结为：将初始值代入通解中去，确定通解中任意常数的值，然后将通解中的任意常数换成所确定的值，即得所求初值问题的解.

微分方程解的图形，称为积分曲线. $n$ 阶微分方程的通解表示一个含有 $n$ 个参数的曲线族，而特解则表示此族中某一条曲线.

我们已知道方程 $\dfrac{dy}{dx}=x$ 的通解为

$$y=\frac{1}{2}x^2+c.$$

这无穷多个解对应平面上无数多条积分曲线，而且它们能由