有限元法理论及应用基础教程

宋天霞　编著

华中工学院出版社

有限元法理论及应用基础教程

宋天霞 编著

華中工學院出版社

有限元法理论及应用基础教程

宋天霞　编著

责任编辑　杨志锋

华中工学院出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中工学院出版社沔阳印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：10.5　字数：221 000

1987年 月第1版　198 年 月第1次印刷

印数：1—3000

ISBN 7-5609-0003-8/O·2

统一书号：13255-077　定价：1.74元

内容提要

本书是为40学时左右的力学有限元法教学而编写的。除系统地叙述了有限元法的基本理论、基本应用外，着重分段阐明了如何编制有限元法计算机程序。内容从物理概念着手，由浅入深地讨论了基本概念、平面问题有限元法、程序编写、变分问题的有限元法、平面常用单元的分析比较、空间问题的有限元法和板弯曲问题有限元法等。

本书适合于作工程力学、机械、造船、水工结构、建筑工程等专业本科生的教学用书，也适合于作上述各专业的工程技术人员的自学用书。

前　言

从七十年代中期开始，有限元法的应用和研究在我国得到普遍的重视。目前，各高等院校的工程力学专业和工科专业都开设了这门课程。但是，恰如其分地对本科生介绍有限元法的理论与应用的书不多，适用于工科类力学专业的教科书则更感不足。为使这些专业有一本比较合适的教材，我们在这里作了一次尝试。

有限元法开始仅是用来求解结构力学与弹性力学这些特殊领域中的问题的，但是这种方法的数学基础，使得它适用于求解全部应用数学、连续体力学、工程物理中有关的问题，尤其是随着现代计算工具——电子计算机的出现和普及，这种方法的应用范围正在不断地扩大。适当说明这种方法的数学基础，着重讲清其在固体力学中的应用，指出求解其它领域问题的方向等，是我们编写这本教材的基本出发点。

有限元法经过近三十年的蓬勃发展，无论在理论上和应用上，特别是在应用上，内容是相当丰富的。但作为工科类力学专业或其它专业本科生的一门课程，在40学时内，只能从理论与应用上给学生一定的基础知识，以便学生毕业后从事这方面的应用和研究时可以循此前进。从这个角度来讲，本书又是一本有限元法入门的教材，对于没有接触过这类方法的工科类力学专业和相近的工科专业的研究生也是适用的。

本书以介绍有限元法的基本理论和计算格式为主，着重应用分析，同时还指出值得进一步研究的有关问题。其目的在于对工科院校有关专业的本科生，利用较少的学时，进行有效地

学习。

我们在编写中，结合多年的教学经验，力求做到由浅入深、难点分散、循序渐进，强调从物理概念上说明问题。通过工程实例和相应配备的习题及其实习计算，使学生不仅在理论上懂得如何应用，而且使其懂得如何能在计算机上得出其正确结果。

作者从事有限元法教学与科研工作多年，因此，编写的这本书也是对作者多年教学经验和部分科研成果的总结。秦庆华同志为本书第四章编写了程序段和附录Ⅱ；万西玲同志编写了附录Ⅰ。粟一凡教授认真而详细地审阅了全部书稿，并提出了许多宝贵意见，特别在文字润色上，更是颇费匠心；成鸿学、章显庄二位教授先后对本书部分章节提出了许多修订意见，在此一并表示衷心感谢。

宋天霞

一九八六年九月

目　录

第一章　有限元法引论

有限元法是五十年代末出现的、处理固体力学问题的一种数值方法。大容量的电子计算机是运用和发展有限元法所必备的工具，在国外，由于电子计算机的迅速发展，有限元法在各个学科领域里已被广泛地采用。因为有限元法不受计算对象在几何上和物理上的限制，所以它发展快、应用广和效能高，这些是许多其它数值方法所无法比拟的。科学技术的现代化与电子计算机应用的深度和广度有着密切的关系，因此，大力普及有限元法和其它数值方法，广泛使用电子计算机，对早日实现我国科学技术现代化是很有实际意义的。

§1-1 有限元法的发展趋势

1954年，有限元法首先是由Turner、Clough、Martin和Topp在结构分析矩阵法的直观基础上作为一个经验设想而提出来的。为了解决航空结构设计问题，他们在1956年采用三角形单元和矩形单元，成功地将结构力学中的位移法用来求解平面应力问题。[1]

1960年，Clough才引进了“有限元法”这一名称。固体力学中的有限元法是建立在虚功原理或最小势能原理基础上的，可看作是Rayleigh-Ritz法的一种更为灵活的推广。六十年代中期，Besseling、Melosh、Jones等人在此基础上引伸和推广了有限元法，并且导出了相应的一般计算格式。七十年代初，

Zien Kiewicz、卞学璜、董平等人作了更进一步的发展。从此，有限元法就以坚实的理论基础和比较完美的计算格式而屹立于数值方法之林。

我国在五十年代末期研制成功了第一台大型电子计算机（130型）。当时，著名数学家冯康教授以湖南柘溪水坝结构的应力分析为开端，进行了大量的研究探讨工作，创立了一套现代化和系统化的求解微分方程的近似方法，并取名为“基于变分原理的差分格式”[2]，其内容在实质上就是当时国际上所称谓的有限元法。不同的只是我国是从数学方面提出有限元法的。但我国科学技术人员到七十年代中期才开始推广和应用有限元法。

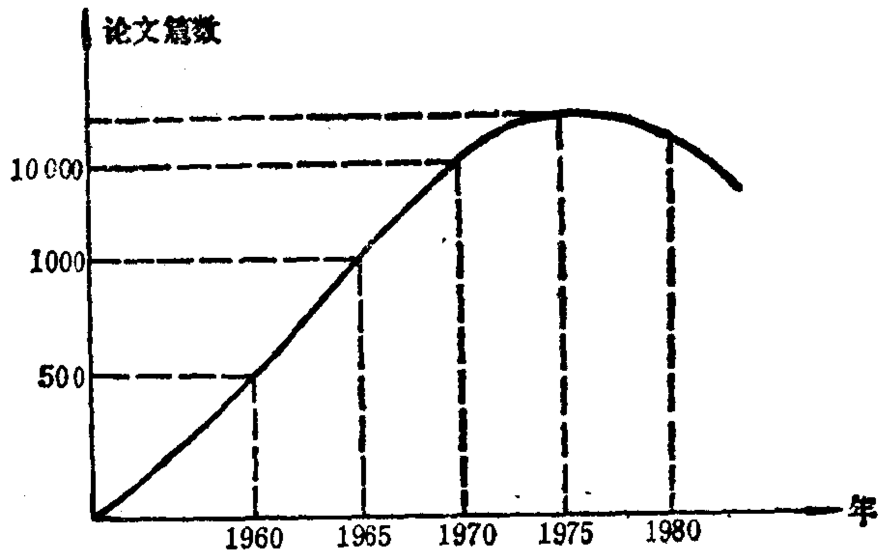

图1-1

有限元法的发展趋势可用图1-1所示曲线表示出来。在六十年代末期，有创见的论文数的增长达到高潮，到了七十年代初期论文篇数的增长率开始逐渐减小，七十年代中期以后就呈现出下降趋势，而且内容多半是应用方面的。这表明有限元法作为一种数值方法在理论上已比较完备了，现在人们主要是从

事于扩展应用领域的研究。有限元法在航空、航天、造船、建筑等方面已得到广泛的应用；在化工、机械、海洋、水利、核能、地质、生物等方面也开始得到应用。从力学领域来说，有限元法除了用来求解一般的线性静力问题外，正向求解动力、非线性和各种场问题等方面发展。

应用有限元法分析复杂工程结构和弹性理论三维空间应力等问题时，都需采用大量的离散单元，因而未知数很多，求解问题就需要使用大容量的计算机来完成，而且计算前的准备工作量也很大，但往往实际需要的却是少数数据。由于近几年内，要在我国发展和普及大容量电子计算机有困难，因此，1980年在杭州召开的全国计算力学会议上，我国知名学者钱令希、胡海昌等和许多到会代表都纷纷指出，我们不仅要进一步普及和发展有限元法，还要探索与发展半解析半离散法和一切有效的数值方法，以便为小机器算大问题闯出一条新路子，从而使我国的计算力学研究工作更好地为社会主义建设服务。

§1-2　直观有限元法

因为杆和梁是工程人员所熟悉的标准构件，早在四十年代，Hrenikoff、Mchenry、Newmark等就想用梁或杆的组合体来模拟弹性连续体的性质，直观地使用节点连接离散构件来逼近连续结构，并利用结构力学中的位移法或力法建立有限元计算格式。这种方法就叫做直观有限元法，或简称直接法。直接法的优点是易于理解，但只能用于较简单的问题。力学工作者把这种原始的有限元法上升到几何离散、分片插值的高度，并最终归纳为求能量泛函极值问题。尔后，从数学上又证明了这种离散插值的收敛性。这样，有限元法就有了坚实的力学

与数学基础，并能迅速地推广到一般弹性连续体的领域中，以及扩大到求解流体力学和热传导等其它问题上去。对于不存在能量泛函的工程问题，还可直接从基本微分方程出发，应用加权残数法导出有限元法的计算格式，求出问题的近似解，这就使有限元法的应用范围得到进一步地扩大。

一、直接法

以图1-2(a)所示的平面桁架为例来说明直接法的思路。

设已知桁架铰接点1处受外力P_x和P_y的作用，求点1的位移。

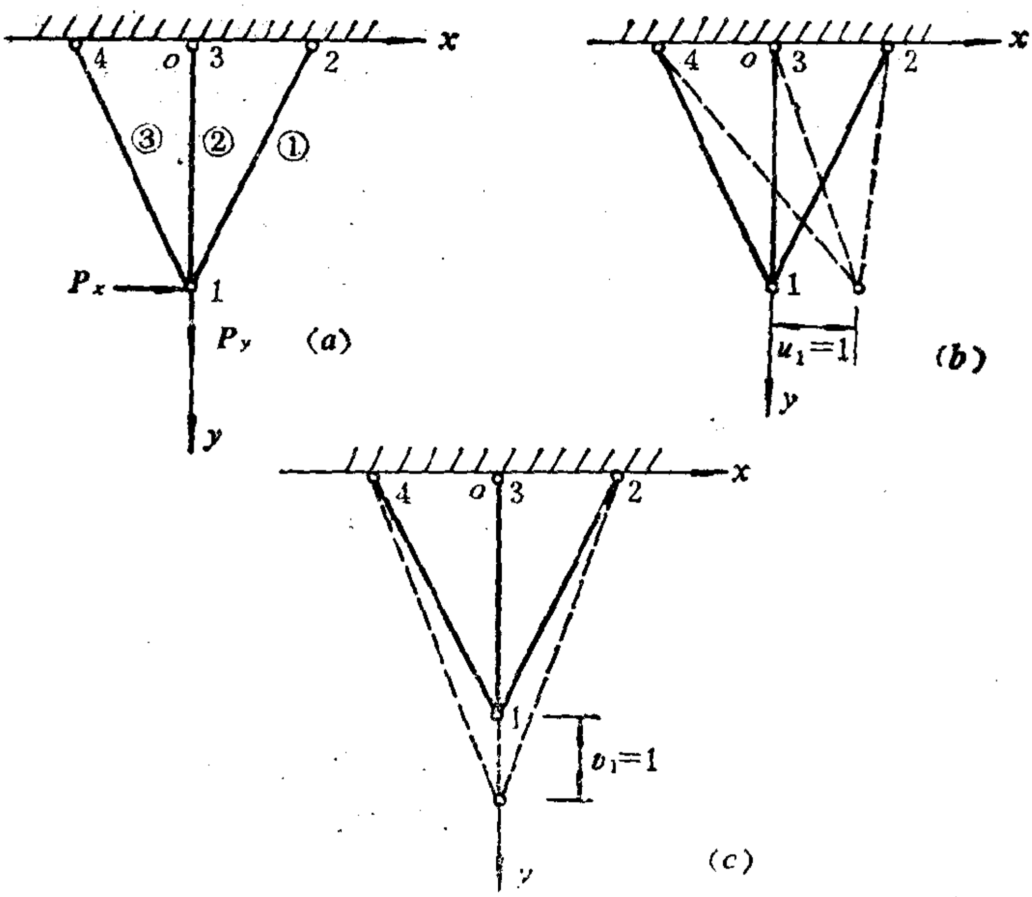

图1-2

令u_1和v_1分别表示点1沿x和y方向的位移分量，当使点1分

别沿x、y方向移动单位位移（如图1-2(b)、(c)）时，桁架各杆所产生的内力（轴力）沿x、y方向的分量分别记为

$$X^1_{11},\ Y^1_{11};\quad X^1_{21},\ Y^1_{21};\ X^1_{31},\ Y^1_{31}.$$

和

$$X^2_{11},\ Y^2_{11};\ X^2_{21},\ Y^2_{21};\ X^2_{31},\ Y^2_{31}.$$

内力分量的上标：1表示$u_1=1$，2表示$v_1=1$；下标：第一个数字表示杆号，第二个数字表示点号。

在点1处，各种内力之和为

$$\text{当}u_1=1\text{时：}\begin{cases}K_{11}=X^1_{11}+X^1_{21}+X^1_{31}\\ K_{21}=Y^1_{11}+Y^1_{21}+Y_{31}\end{cases}\qquad(a)$$

$$\text{当}v_1=1\text{时：}\begin{cases}K_{12}=X^2_{11}+X^2_{21}+X^2_{31}\\ K_{22}=Y^2_{11}+Y^2_{21}+Y^2_{31}\end{cases}\qquad(b)$$

桁架在已知外力作用下，即在P_x，P_y的作用下，点1的实际位移分量为u_1和v_1，由点1的平衡条件得：

$$\begin{cases}\Sigma X=P_x+K_{11}u_1+K_{12}v_1=0\\ \Sigma Y=P_y+K_{21}u_1+K_{22}v_1=0\end{cases}\qquad(c)$$

上式又可写成矩阵形式：

$$\begin{Bmatrix}P_x\\ P_y\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix}\begin{matrix}u_1\\ v_1\end{matrix}=\begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\qquad(d)$$

并简记为：

$$\{P\}+[K]\{u\}=\{0\}$$

或

$$[K]\{u\}=-\{P\}\qquad(\ \ )$$

式中，$\{P\}$——节点载荷向量；$\{u\}$——节点位移向量；$[K]$——结构的刚度矩阵。

于是把求解桁架节点位移的问题转变成求解代数方程组(1-1)。已知$\{P\}$和$\{K\}$，解得$\{u\}$以后，桁架各杆的伸长、应变、内力和应力等都很容易得到解决。

二、引伸和推广

1956年Turner等人就是在直观有限元法的基础上，设想将一个连续体人为地分成一些元件（后来才称为单元）的组合（图1-3），同时将各元件上的外载荷按力学等效原则转移成节点载荷的形式，这样，实际的连续体就近似为离散型的受力模型。其后，Clough用简易的三角形单元计算了一个航空升降构件和薄板结构（图1-3(b)）并获得成功，从此建立起有限元法的概念。其分析过程主要是：

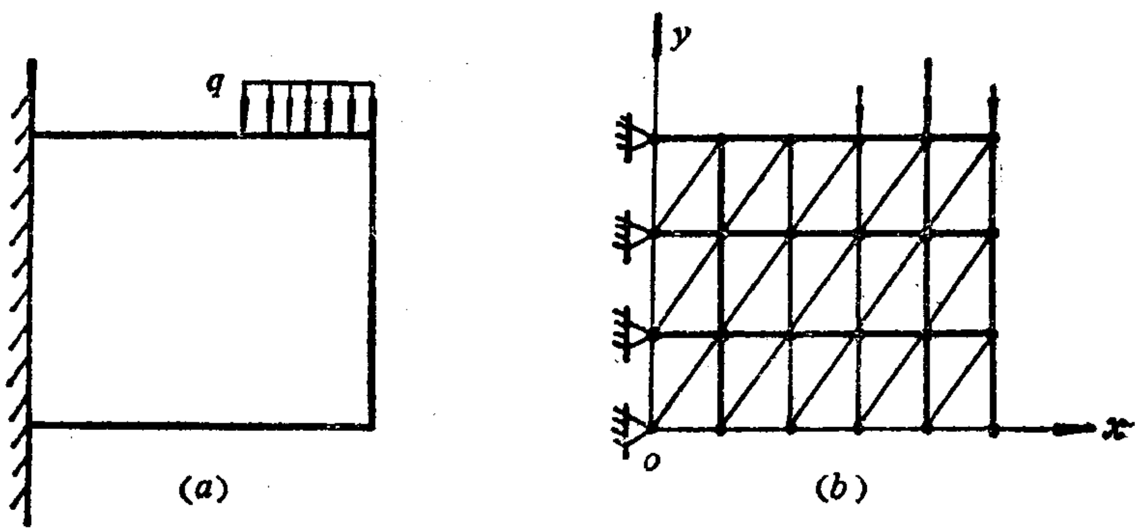

图1-3

1) 将连续体离散成一些单元的组合；
2) 各单元间只在节点处互相连接，互相作用；
3) 将实际外载荷按力学等效原则转移到节点上去，使其只是在节点处才有外力作用；
4) 建立节点或单元的平衡方程（在直观有限元法中直接

建立节点平衡方程；在一般有限元法中则是用能量原理得到单元平衡方程。）将待解的问题转化成求解一个代数方程组的问题。

上述过程，实际上是继承和发展了结构矩阵分析法的思想：每个单元的力学特性好比建筑物中的砖瓦，组装起来就提供整体结构的力学特性。具体作法是：

在几何上：假想把连续体分割成有限个小单元体，并通过彼此间只在有限个节点处相互连接而组成集合体，用这个集合体来代替原来的连续体；

在力学上：以节点载荷来代替实际作用于单元的力，并根据分块近似的思想，选择一个简单的位移函数来近似地表示其位移分量的分布规律，再利用弹塑性理论中的能量原理来建立节点的力和位移之间的关系，把所有这种关系集合起来就得到一组以位移为未知量的代数方程组。

五十年代末期，尽管人们已经用变分原理、广义变分原理以及Ritz型变分法分析了许多问题，但对非均质材料、非线性应力-应变关系以及复杂边界条件等问题，仍感到难以处理。

有限元法的出现，为解决复杂问题展示了广阔的前景，但这种方法是否可靠仍被人们所怀疑，从而吸引了大批的数学家和力学家参予了有限元法的研究工作。七十年代初期，由于有限元法中进一步应用了数学的误差理论，使有限元法的收敛性得到了严格的证明。从此，有限元法就成了一种建立在严格数学基础上的可靠的数值方法。

§1-3 力学能量原理

工程实际中的很多固体力学问题可归结为两种描述：微分

方程和能量原理。但是，其中一部分最终可归结为求解微分方程边值问题，而另一部分（即复杂结构）则不可能。然而，就是边值问题部分，除特别简单的情形外，一般也很难求得其解析解，但工程实际一般只要求具有足够精度的近似解就可以了。采用有限元法，无论对哪一部分都可以用统一的计算格式求出满足工程精度要求的近似解。建立有限元法计算格式的理论基础是分割原理和能量原理。

一、分割原理

人们早就知道，方砖可以砌成圆井，直锯可以割出曲板，任意的连续曲线或曲面都可以分割成许多小段或小块，然后用折线或折面来近似地取代。

古希腊的数学家和物理学家Archimedes已经在面积、体积的计算方法中引进了分割取代的方法；公元三世纪我国的数学家刘徽也提出了割圆术，即分割原理："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。"用现代语言解释就是：分割越细，逼真度越高。

有限元法运用和发展了这一思想，把许多任意形状的结构或连续体分割成有限个"基本单元"的组合，并根据这些基本单元来计算整体结构的能量，这也正是"有限元"这个形象化名称的来源。

二、能量原理

在分割原理的基础上，利用最小势能原理就可以把有限元法的计算格式(1-1)推导出来。

系统的能量极值原理，或变分原理指出：在所有满足内部连续条件和运动学边界条件的位移中，满足平衡方程的位移使