普通高等教育“十三五”规划教材

工科数学信息化教学丛书　丛书主编　蔡光兴　李子强

线性代数

（第五版）

蔡光兴　李逢高　主编

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

工科数学信息化教学丛书

丛书主编　蔡光兴　李子强

线性代数

（第五版）

蔡光兴　李逢高　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书根据《高等工科院校线性代数课程教学基本要求》并结合21世纪线性代数课程教学内容与课程体系改革发展要求编写而成. 全书分三篇：基础篇主要介绍了线性代数基本内容；应用篇结合线性代数四个知识面，通过生动的实例介绍了它们在经济、工程技术等方面的应用；实验篇简要介绍了MATLAB软件及其在线性代数中的应用. 同时，本书在基础篇的每章后配有习题与自测题，书末附有习题参考答案.

本书内容充实、体系新颖、选例灵活，可作为高等院校工科、理科和经济管理类学科的专业教材，也可作为信息与计算科学专业的教材，对报考硕士研究生的学生以及广大教师与科技人员，也具有较高参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/蔡光兴，李逢高主编. —5版. —北京：科学出版社，2018.7
(工科数学信息化教学丛书)
普通高等教育"十三五"规划教材
ISBN 978-7-03-057907-2

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①蔡…　②李…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材
Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第127838号

责任编辑：谭耀文　冯贵层／责任校对：董艳辉
责任印制：彭　超／封面设计：彬　峰

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉市首壹印务有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
开本：787×1092　1/16
2018年7月第　五　版　印张：17 3/4
2018年7月第一次印刷　字数：418 000

定价：52.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

“工科数学信息化教学丛书”序

工科学生毕业多年后时常感言,数学知识很多似乎没有派上用处,但数学训练、思想和精神,却无时无刻不在发挥着积极的作用,成为取得成功的最重要因素之一.

数学是一门高度抽象的学科,但是它并非人类精神纯粹自由创造和想象,而是源于自然和工程问题.系统传授数学知识当然是工科数学教学的基本任务与责任,同时,掌握了数学的思想方法和精神实质,就可以由不多的几个公式演绎出千变万化的结论,显示出无穷无尽的威力.工科数学注重创新教学,增强数学应用背景的讲授,拓宽学生的知识面,使学生能够了解数学学科在科学研究领域的重要性,为其打开数学应用的窗口,培养学生的创新意识与精神,提高数学思维与素养,真正达到工科数学教学的目的.

工科数学信息化教材的编写与日趋成熟,在开放的视野与背景下得到认同,自然成为纸质教材与数字出版产品的精品,从而得到社会广泛认可和使用.

在学会、领导和专家的关怀及指导下,本区域若干所全军重点、一本和省重点高校工科数学教材在科学出版社出版和再版.十余年以来,教学和教材理念从素质教育到分类分层教学改革,再到数学思想、方法与创新教育,历经各校几届领导和责任教授的共同努力,逐渐成熟,成为具有较高质量的核心精品.

教材转型与数字化出版方兴未艾,大趋势赫然在前,教材又重新经历新的考验.“工科数学信息化教学丛书”正是按此理念和要求,直面开放的视野与背景,将改革与创新的成果汇集起来,重新审视和操作,精益求精,以赢得内容先机,修订版和新编教材均是如此.

修订和新编教材的核心理念,一是体现数学思维,将数学思想和方法(如数学建模)融入教材体系、内容及其应用;二是深化改革与创新,面向开放和数字化出版的大平台,赢得内容先机,营造精品.

“工科数学信息化教学丛书”为工科数学课程教材,包括:高等数学、线性代数、概率论与数理统计、数学建模、数学实验、复变函数与积分变换、数值分析、数学物理方程、离散数学、模糊数学、运筹学等.上述各课程大多为全军级、海军级优质课程和省部级精品课程,对应教材为相应的一、二级获奖教材.

丛书注重质量,讲究适用和教学实践性,体系相对完整与系统,加强应用性,按照先进、改革与创新等编写原则和基本要求安排教材框架、结构和内容.

丛书具有下列明确的指导思想:

(1) 遵循高等学校教学指导委员会关于课程的教学基本要求,知识体系相对完整,结

构严谨，内容精炼，循序渐进，推理简明，通俗易懂.

(2) 注重教学创新，加强教学知识与内容的应用性，注重数学思想和方法的操作与应用及其实用性.增强数学应用背景的介绍，拓宽学生的知识面，使学生能够了解数学学科在科学研究领域的重要性，为学生打开数学与应用的窗口，培养学生的创新意识与精神，提高数学思维与素养，真正达到工科数学教学的目的.

(3) 融入现代数学思想(如数学建模)，分别将 Mathematic，MATLAB，SAS，SPS 等软件的计算方法，恰当地融入课程教学内容中，培养学生运用数学软件的能力.

(4) 强化学生的实验训练和动手能力，可将实验训练作为模块，列入附录，供教学选用或学生自学自练，使用者取舍也方便.

(5) 大部分教材章后均列出了重要概念的英文词汇，布置了若干道英文习题，要求学生用英文求解，以适应教育面向世界的需要，也为双语教学打下基础.

(6) 为巩固学生的知识和提高学生的应用能力，章末列出了习题，形式多样.部分章后还配有自测题，并在书末提供了解题思路或参考答案.

丛书中部分图书为科学出版社普通高等教育“十三五”规划教材.

“工科数学信息化教学丛书”编委会

2018 年 1 月

前　言

《线性代数》教材自2002年出版以来，深受广大师生欢迎. 在使用过程中，广大师生向我们提出了许多宝贵意见和建议，在此深表感谢.

这次再版，保持了前版科学合理的体系结构. 教材内容仍分为三个部分，第一部分为基础篇，保持国内现有线性代数课程教学体系结构，内容简洁严谨；第二部分为应用篇，主要讲述线性代数在工程技术计算机、经济、生物等方面的应用；第三部分为实验篇，主要讲述如何应用MATLAB数学软件求解线性代数问题. 修订过程遵循新的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，同时反映国内外线性代数课程改革和学科建设最新成果，体现创新教学理念，有利于提高学生的综合素质和创新能力. 这次修订主要对基础篇完善了部分知识点，更换和补充了部分例题.

本书由蔡光兴、李逢高主编，李家雄、郑列任副主编. 本次修订工作由蔡光兴教授、李逢高教授和李家雄副教授完成. 其中各章编写人员如下：陈水林（第一章），李逢高（第二章），蔡光兴（第三、四、五、八、九、十、十一章），郑列（第六、七章），朱永松（第十二、十三章），此外，张凯凡、耿亮、费锡仙、方瑛、许松林、张水坤、李家雄、胡二琴、章曙雯、黄毅、杨策平、方次军、蔡振锋、常涛、朱莹、贺方超、蒋慧峰、曾莹、曾宇、陈华对部分章节内容进行了整理.

编者水平有限，书中疏漏和不足之处在所难免，敬请广大读者指正.

编　者

2018年5月

目　录

基　础　篇

应　用　篇

实　验　篇

基 础 篇

第一章　行　列　式

行列式是为了求解线性方程组而引入的,它是研究线性代数的一个重要工具.近代以来,它又被广泛运用到物理、工程技术等多个领域.本章从解二元二式与三元三式方程组入手,引进了二阶与三阶行列式的概念,并用排列的奇偶性把行列式的概念推广到 n 阶,同时讨论了行列式的基本性质,并介绍了 n 阶行列式的计算方法与一些技巧.

第一节　排　　列

在定义 n 阶行列式前,先来讨论一下排列的性质.

n 个数码 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列指的是由这 n 个数码组成的一个有序数组.例如,2341 是一个 4 个数码的排列,31524 是一个 5 个数码的排列.n 个数码的不同排列共有 $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1=n!$ 个.事实上,在作 n 个数码的一个排列时,第 1 个位置的数码可以取这 n 个数码中的任何一个,所以有 n 种可能;当这一个位置取定以后,第 2 个位置的数码只能在剩下的 $n-1$ 个数码中选取,所以只有 $n-1$ 种可能.因此第 1 个位置和第 2 个位置的数码一共有 $n(n-1)$ 种不同的选法.同样,如果第 1 个、第 2 个位置的数码都已取定,那么第 3 个位置的数码只能在剩下的 $n-2$ 个数码中选取.因此,前三个位置的数码一共有 $n(n-1)(n-2)$ 种不同的选法.依此类推,一共可以得到 $n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1=n!$ 个不同的排列.

例如,1,2,3 这 3 个数码的全体不同的排列一共有 $3!=6$ 个,它们是

$$123,\ 132,\ 231,\ 213,\ 312,\ 321$$

注意,在上面 3 个数码的排列里,除了 123 的数码是按自然顺序排列的以外,其余的排列中,都有较大的数码排在较小的数码前面的情况.例如,在排列 132 里,3 比 2 大,但 3 排在 2 的前面;在 321 里,2 排在 1 的前面,3 排在 1 和 2 的前面.一般地,在一个排列里,如果某一个较大的数码排在某一个较小的数码前面,就说这两个数码构成一个逆序.例如,排列 132 有一个逆序;321 有三个逆序.在一个排列里出现的逆序总数称为这个排列的逆序数.

例如,1432 这个 4 个数码的排列中,43、42、32 是逆序,1432 的逆序数就是 3;而 2431 排列的逆序数为 4.

逆序数为偶数的排列称为偶排列,逆序数为奇数的排列称为奇排列.例如,1432 为奇排列,2431 为偶排列.

对任意一个排列,可以按照以下方法来计算它的逆序数:设任给排列为 $P_1P_2\cdots P_n$,其中 P_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 为自然数,考虑 P_i,如果比 P_i 大的且排在 P_i 前面的元素有 t_i 个,就说 P_i

这个元素的逆序数是 t_i，全体元素的逆序数之和

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n} t_i$$

即为这个排列的逆序数.

例 1 求排列 45321 的逆序数.

解 在排列 45321 中，4 排在首位，逆序数为 0；在 5 之前比 5 大的数没有，逆序数也为 0；3 的前面比 3 大的数有 4 和 5，故逆序数为 2；2 的前面比 2 大的数有 4,5,3，故其逆序数为 3；1 的前面比 1 大的数有 4,5,3,2，故逆序数为 4. 于是，排列的逆序数为

$$t=0+0+2+3+4=9$$

为叙述方便，以后一般排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$. 如例 1 中有

$$\tau(45321)=9$$

定义 1 把一个排列中某两个数字 i 与 j 交换一下位置，而其余的数字不动，就得到另一个同阶的新排列，对排列施行的这样一个交换称为一个对换，并用符号 (i,j) 来表示.

例如，经过 1,2 对换，排列 2431 就变成了 1432，排列 2134 就成了 1234. 又如，对排列 31542 陆续施行一系列对换，可以得出排列 12345：先把 5 换到第 5 个位置，即施行对换 (5,2) 得 31245；4 已在第 4 个位置，不必动它；施行对换 (3,2) 得 21345；最后再施行对换 (2,1)，就得 12345.

上面由排列 31542 得出排列 12345 的方法显然具有一般性，即任一排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 通过一系列对换都能得到排列 $1234\cdots n$，并且有：

定理 1 任意两个 n 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 总可以通过一系列对换互变.

证 由上面讨论已知，通过一系列对换可以由 $i_1i_2\cdots i_n$ 得到 $12\cdots n$，由 $j_1j_2\cdots j_n$ 得出 $12\cdots n$，按照相反次序施行 $j_1j_2\cdots j_n$ 变到 $12\cdots n$ 的变换，就可以得出由 $12\cdots n$ 变到 $j_1j_2\cdots j_n$ 的变换，这样可以实现由 $i_1i_2\cdots i_n$ 变到 $12\cdots n$，再由 $12\cdots n$ 变到 $j_1j_2\cdots j_n$ 的变换.

定理 2 对换改变排列的奇偶性.

证 先证明相邻对换的情形，即对换的两个数在排列中是相邻的情形. 排列

$$\overbrace{\cdots}^{A} j k \overbrace{\cdots}^{B} \tag{1.1}$$

经过 (j,k) 对换变成

$$\overbrace{\cdots}^{A} k j \overbrace{\cdots}^{B} \tag{1.2}$$

其中：A 与 B 都代表若干个数码. 显然，在排列 (1.1) 中，如 j,k 与其他的数构成逆序，则在排列 (1.2) 中仍然构成逆序；如不构成逆序，则在排列 (1.2) 中也不构成逆序；不同的只是 j,k 的次序. 如果原来 j,k 组成逆序，那么经过对换，逆序数就减少一个；如果原来 j,k 不组成逆序，那么经过对换，逆序数就增加一个. 不论增加 1 还是减少 1，排列的逆序数的奇偶性总是变了. 因此，在这种情形下，定理成立.

再看一般情形，设排列为

$$\cdots j i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots \tag{1.3}$$

经过 (j,k) 对换，排列 (1.3) 变成

$$\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots \tag{1.4}$$

易知,这样一个对换可以通过一系列的相邻数的对换来实现.从排列(1.3)出发,把 k 与 i_s 对换,再与 i_{s-1} 对换,如此继续下去,把 k 一位一位地向左移动,经过 $s+1$ 次相邻位置的对换,排列(1.3)就变成

$$\cdots k j i_1 i_2 \cdots i_s \cdots \tag{1.5}$$

从排列(1.5)出发,再把 j 一位一位地向右对换,经过 s 次相邻位置的对换,排列(1.5)就变成了排列(1.4).因此,(j,k)对换可以通过 $2s+1$ 次相邻位置的对换来实现.$2s+1$ 是奇数,相邻位置的对换改变排列的奇偶性,显然,奇数次这样对换的最终结果还是改变奇偶性.

由以上定理,可得下列定理.

定理 3　当 $n\geqslant 2$ 时,n 个数字的奇排列与偶排列的个数相等,各为$\frac{1}{2}n!$个.

证　设 n 个数字的奇排列共有 p 个,而偶排列共有 q 个,对这 p 个奇排列施行同一个对换(i,j),那么由定理 2,得到 p 个偶排列.由于对这 p 个偶排列施行对换(i,j),又可得到原来的 p 个奇排列,故这 p 个偶排列各不相等,但一共只有 q 个偶排列,所以 $p\leqslant q$.同理可得$q\leqslant p$,所以 $p=q$.

第二节　n 阶行列式的概念

行列式起源于解 n 元 n 式方程组.最简单、最基本的方程组是二元二式方程组,它的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

在中学学解方程组时,利用加减消元法解之(当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时),可得

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

但此公式不容易记忆,因此也就不便于应用.针对这一缺点,Sarrus 创造性地引入记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \triangleq ad-bc \tag{1.6}$$

从而使上述公式变为容易记忆的形式

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

在引入的上述记号中，横排称为行，竖排称为列，因为共有 2 行 2 列，所以称为二阶行列式.

二阶行列式的定义本身也给出了它的计算方法

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

从左上角到右下角的对角线称为主对角线，沿主对角线上的二元素之积取正号. 从右上角到左下角的对角线称为次对角线，沿次对角线上的二元素之积取负号. 这种计算方法称为二阶行列式的对角线法则.

在解一般形式的三元三式方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

时，暂把前两个方程中的 x_1 视为常数，利用二元二次方程组求解公式求出 x_2 与 x_3 后，再代入第三个方程求得 x_1 为

$$\frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{22}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}$$

用同样的方法可求得 x_2 与 x_3.

与解二元一次二式方程组时遇到的问题一样，上述公式既不便于记忆也不便于应用. 为此，我们也像引入二阶行列式那样引入三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.7}$$

从而把解三元一次三式方程组的一般公式变为便于记忆的形式

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

以 D_1, D_2, D_3 和 D 分别代替 x_1, x_2, x_3 的分子和 x_1, x_2, x_3 的分母，则上式可简记为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

依此类推,有理由猜测解未知数更多的方程组时也有类似的结论,可以定义出更高阶的行列式,但随着阶数的增加,这样的做法计算量过大,显然是不可取的.因此我们考虑通过对二阶、三阶行列式的特点进行归纳来猜测 n 阶行列式的一般规律.让我们研究一下三阶行列式的规律.由式(1.7)易见三阶行列式有下列几个特点:

(1) 三阶行列式是 3!个项的代数和;

(2) 它的每项都是行列式中三个元素的乘积,这三个元素恰好是每行每列各一个;

(3) 每项都带有确定的符号,且若把一般项记为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的形式,即行下标排成 123,则 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$.

这样式(1.7)就可写成下列形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

同样式(1.6)也可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$$

由此给出一般 n 阶行列式的定义:

定义 2 由 n^2 个数(实或复数)排成一个 n 行 n 列的表,并在两边各画一条竖线记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\quad (a_{ij}\text{表示位于第 } i \text{ 行、第 } j \text{ 列位置的数}) \tag{1.8}$$

所表示的数 D 称为 n 阶行列式.这个数 D(即 n 阶行列式)等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.9}$$

的代数和.这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,式(1.9)的符号由 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$ 来确定.这一定义可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.10}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和.

式(1.10)称为 n 阶行列式的展开式. 今后用符号 $\det(a_{ij})$ 来表示以 a_{ij} 为元素的 n 阶行列式,在不致混淆的时候也常用 $|A|$, $|B|$ 表示 n 阶行列式.

一个 n 阶行列式正是前面所说的二阶和三阶行列式的推广. 特别,当 $n=1$ 时,一阶行列式 $|a|$ 就是数 a.

定义 2 表明,为了计算 n 阶行列式,首先作不同行不同列元素的乘积,把构成这些乘积的元素按行指标排成自然顺序,然后由列指标所排列的奇偶性来决定这一项的符号.

由定义 2 可以看出,n 阶行列式是由 $n!$ 个项组成. 由于 $n!$ 是一个很大的数($4!=24, 5!=120, \cdots$),此时用定义求行列式的值在一般情况下是十分困难的. 下面我们用定义来求两个特殊行列式的值.

例 2 计算下列四阶行列式的值:

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$$

解 D 的一般项可以写为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$,对于 j_1 只能取 1 或 4,因为,第 1 行的元素除第 1 列和第 4 列的元素外,其余元素均为零,于是

$$当\ j_1=1\ 时,\quad \begin{cases} j_2=2,\ j_3=3,\ j_4=4 \\ j_2=3,\ j_3=2,\ j_4=4 \end{cases}$$

$$当\ j_1=4\ 时,\quad \begin{cases} j_2=2,\ j_3=3,\ j_4=1 \\ j_2=3,\ j_3=2,\ j_4=1 \end{cases}$$

所以这个四阶行列式的 $4!=24$ 项的乘积代数和只有以下 4 项不为零,即

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44},\quad a_{11}a_{23}a_{32}a_{44},\quad a_{14}a_{22}a_{33}a_{41},\quad a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

这 4 项的符号分别由 $(-1)^{\tau(1234)}$, $(-1)^{\tau(1324)}$, $(-1)^{\tau(4231)}$ 和 $(-1)^{\tau(4321)}$ 来决定,故

$$D=acfh-adeh-bcfg+bdeg$$

例 3 计算下列 n 阶行列式的值:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

分析 这个行列式的特点是在 a_{11} 元到 a_{nn} 元所成的对角线(称为行列式的主对角线)以下元素全为零,即当 $i>j$ 时,$a_{ij}=0$.

解 我们只需求出非零项即可,按行列式的定义,非零项的 n 个元素在第 1 列中只能取 a_{11}(否则该项为零),第 2 列只能取 a_{22},第 3 列只能取 a_{33},…,第 n 列只能取 a_{nn} 为因子. 于是,此行列式除乘积 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 外,其余各项均为零. 又因为它的列下标的逆序数 $\tau(123\cdots n)=0$,故它带正号,所以所求行列式的值为