R. A. ADAMS 著

索伯列夫空间

叶其孝 王耀东 应隆安 韩厚德 吴兰成 译

人民教育出版社

索伯列夫空间

R. A. Adams 著

叶其孝 王耀东 应隆安 韩厚德 吴兰成 译

人民教育出版社

本书是一本专著，它系统地总结了当时有关索伯列夫空间的研究成果，是学习、研究偏微分方程理论和应用的重要参考书.

本书可供有关的教师、研究生和高年级大学生参考.

索伯列夫空间

R. A. Adams 著

叶其孝 王耀东 应隆安 韩厚德 吴兰成 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

咸宁地区印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.5 字数 250,000

1981 年 12 月第 1 版 1983 年 8 月第 1 次印刷

印数 00,001—7,700

书号 13012·0680 定价 1.65 元

译 者 说 明

参加本书翻译的有：叶其孝(序言，第一，二，三，五章)，应隆安(第四章)，吴兰成(第五章)，韩厚德(第六章)，王耀东(第七，八章)。

参加本书校阅的有叶其孝，应隆安，吴兰成，韩厚德，王耀东等同志。

序　言

本专著专门研究由多个实变量的弱可微函数组成的某些Banach 空间的各种性质，这些函数空间出现在与偏微分方程的理论以及与数学分析有关的领域有联系的许多问题中，并且已经成为这些学科必不可少的工具．苏联数学家 S. L. Sobolev 在 1930 年末作出了关于这些空间的发展的主要贡献，而在这之前这些空间的原型早就有了，尽管如此现在这些空间总是和他的名字联在一起。

就凭 Sobolev 空间本身的结构来说，它们就是非常有趣的数学结构，但它们的主要意义还在于 Sobolev 空间及其许多推广现在在偏微分方程的研究中起着主要的作用．因此本书的大部分篇幅集中于 Sobolev 空间理论的业已证明是在应用中最有用的那些方面．虽然没有讨论在偏微分方程问题中的特殊应用（几乎在任何一本现代偏微分方程教科书中都能找到这种应用），本专著主要地还是试图作为偏微分方程方面的研究生和研究工作者关于 Sobolev 空间的教科书和参考书．第三章到第六章中的某些内容取材于 Colin Clark教授 1967—1968 年在British Columbia 大学对研究生的讲演笔记[18]和讨论班上的内容．

本书共分八章．第一章是实分析和泛函分析中一些标准课题的汇集，大多数是不加证明的，对于以后要讨论的问题来说，这些都是必要的基础．第二章主要也是"基础"材料，但是集中在一个特殊的课题，即 Lebesgue 空间$L^p(\Omega)$, Sobolev 空间都是 $L^p(\Omega)$ 的特殊子空间．为了完整起见，第二章都有证明．头两章的大多数材料读者可能相当熟习，那就可以略去不念或者为了解决一下记号等问题而粗浅地读一遍．(1.25—1.27, 1.31 和 2.21—2.22 节

可能是个例外，读者或许不大熟习这些内容）．由于包括了这两章初等内容就使本书在相当程度上是自封的(self-contained)．只要读者具有大学数学分析方面坚实的基础就可以阅读本书．

第三章到第六章可以说是本书的核心．这几章叙述的都是整数次 Sobolev 空间的基本性质，而且在最重要的 Sobolev 嵌入定理(定理 5.4)和相应的紧嵌入定理 (定理 6.2) 达到高潮．这些基本嵌入定理的改进和推广组成了 5.33—5.54 和 6.12—6.50 节的内容，初读时可以略去．

第七章考虑允许分数次导数时的通常的Sobolev空间的推广．在非线性偏微分方程——例如流体力学中的 Navier-Stokes 方程——的研究中就常常涉及分数次 Sobolev 空间．可以用几种方法来定义分数次空间．在第七章中我们把注意力集中于J.L.Lions和E. Magenes 的迹-内插方法(trace-interpolation approach,)而在本章的末尾很简单地讨论一下其它的方法 (7.59—7.74)．在介绍分数次空间之前，必须以适当的篇幅讲一些抽象泛函分析(迹-内插理论)．大多数读者会发现为了领会 7.35 节中开始的对分数次空间的讨论，读一下这些材料(在7.2—7.34 节中，也许证明略去不看)是必不可少的．

第八章研究 Orlicz-Sobolev 空间，为了完整些，从一个自封的 Orlicz-Sobolev 空间的引论开始是必要的．这些空间在应用分析中正在找到日益增长的重要应用，第八章的主要结果是N. S. Trudinger 定理(定理 8.25)，它建立了 Sobolev 嵌入定理的一个极限情形，还有在8.29—8.40 节中给出的 Orlicz-Sobolev 空间的 Trudinger 和 T. K. Donaldson 嵌入定理．

现有的关于 Sobolev 空间及其推广的数学文献是浩瀚的，要把与 Sobolev 空间有关的已经知道的结果都包括在一本书中是不容易做到的，特别是不可能符合人们的需要．本书试图以充分

一般的方式来介绍所有的核心材料，包括大多数应用中用到的核心材料；而且给读者一个关于Sobolev空间的总的看法，企图通过阅读研究论文来得到这种总的看法是困难的；最后，如前所述，对于在某方面的应用中要用到Sobolev空间的结果的人们，本书提供了一个现成的参考文献．对于大多数定理我们都给出了完全的证明，定理的某些论断留给有兴趣的读者作为练习去验证它们．在本书中，参考文献用方括号，方程序号用圆括号，节的编号形式为m．n，其中m表示章号．

空间与范数表

右端的数字指出了这些符号引入的章节. 某些记号与其它分析领域使用的不同.

B	$\|\cdot\|_B$	7.2
B_1+B_2	$\|\cdot; B_1+B_2\|$	7.11
$B^{s,p}(\mathbf{R}^n)$	$\|\cdot; B^{s,p}(\mathbf{R}^n)\|$	7.67
$B^{s,p}(\Omega)$	$\|\cdot; B^{s,p}(\Omega)\|$	7.72
$\mathbf{C}$	$\vert\cdot\vert$	1.1
$C(\Omega)$		1.25
$C^m(\Omega)$		1.25
$C^\infty(\Omega)$		1.25
$C_0(\Omega)$		1.25
$C_0^\infty(\Omega)$		1.25
$C^m(\bar{\Omega})$	$\|\cdot; C^m(\bar{\Omega})\|$	1.26
$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$	$\|\cdot; C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})\|$	1.27
$C_B^j(\Omega)$	$\|\cdot; C_B^j(\Omega)\|$	5.2
$C_\mu(\bar{\Omega})$	$\|\cdot; C_\mu(\bar{\Omega})\|$	8.37
$\mathscr{D}(\Omega)$		1.51
$\mathscr{D}'(\Omega)$		1.52
$D(\Lambda)$	$\|\cdot; D(\Lambda)\|$	7.7, 7.9
$D(\Lambda^k)$	$\|\cdot; D(\Lambda^k)\|$	7.29
$E_A(\Omega)$		8.14
$H^{m,p}(\Omega)$	$\|\cdot\|_{m,p}=\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$	3.1
$H^{-m,p'}(\Omega)$	$\|\cdot\|_{-m,p'}$	3.12
$H^{s,p}(\Omega)$	$\|\cdot; H^{s,p}(\Omega)\|$	7.33
$K_A(\Omega)$		8.7
$L^1(A)$		1.40, 1.46
$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$		1.53
$L^p(\Omega)$	$\|\cdot\|_p=\|\cdot\|_{p,\Omega}$	2.1

	$\|\cdot\|_{0,p}=\|\cdot\|_{0,p,\Omega}$	3.1
$L^{\infty}(\Omega)$	$\|\cdot\|_{\infty}=\|\cdot\|_{\infty,\Omega}$	2.5
$L^{p}(\mathrm{bdry}\,\Omega)$		5.22
$L^{p}(a, b; B)$	$\|\cdot; L^{p}(a, b; B)\|$	7.3
$L^{p}_{\mathrm{loc}}(a, b; B)$		7.3
$L(B)$	$\|\cdot\|_{L(B)}$	7.5
$L^{s,p}(\mathbf{R}^{n})$	$\|\cdot; L^{s,p}(\mathbf{R}^{n})\|$	7.62
$L^{s,p}(\Omega)$		7.66
$L_{A}(\Omega)$	$\|\cdot\|_{A}=\|\cdot\|_{A,\Omega}$	8.9
$\mathbf{R}^{n}$	$\lvert\cdot\rvert$	1.1
$T=T(p, \nu; B_{1}, B_{2})$	$\|\cdot\|_{T}=\|\cdot; T(p, \nu; B_{1}, B_{2})\|$	7.14
T^{0}	$\|\cdot\|_{T^{0}}$	7.24, 7.26, 7.32
$T^{k}=T^{k}(p, \nu; \Lambda; B)$	$\|\cdot\|_{T^{k}}$	7.32
$T^{\theta,p}(\Omega)$	$\|\cdot; T^{\theta,p}(\Omega)\|$	7.35
$\widetilde{T}^{\theta,p}(\Omega)$	$\|\cdot; \widetilde{T}^{\theta,p}(\Omega)\|$	7.43
$W^{m,p}(\Omega)$	$\|\cdot\|_{m,p}=\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$	3.1
$W^{m,p}_{0}(\Omega)$		3.1
$W^{-m,p'}(\Omega)$	$\|\cdot; W^{-m,p'}(\Omega)\|$	3.11
$W^{m,2;\mu}_{0}(\Omega)$	$\|\cdot\|_{m,2;\mu}$	6.54
$W=W(p, \nu; B_{1}, B_{2})$	$\|\cdot\|_{W}=\|\cdot; W(p, \nu; B_{1}, B_{2})\|$	7.11
$W^{m}=W^{m}(p, \nu; \Lambda; B)$	$\|\cdot\|_{W^{m}}$	7.30
$W^{s,p}(\Omega)$	$\|\cdot\|_{s,p}=\|\cdot\|_{s,p,\Omega}$	7.36, 7.39
$W^{s,p}_{0}(\Omega)$		7.39
$\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$	$\|\cdot\|^{\sim}_{s,p,\Omega}$	7.48
$W^{s,\infty}(\Omega)$	$\|\cdot\|_{s,\infty,\Omega}$	7.49
$W^{m}L_{A}(\Omega)$	$\|\cdot\|_{m,A}=\|\cdot\|_{m,A,\Omega}$	8.27
$W^{m}E_{A}(\Omega)$		8.27
$W^{m}_{0}L_{A}(\Omega)$		8.27
X	$\|\cdot; X\|$, $\vert\vert\vert\cdot\vert\vert\vert$	1.4, 1.6, 6.51
X'	$\|\cdot; X'\|$	1.5, 1.10
$\prod_{j=1}^{n} X_{j}$	$\|\cdot\|_{(p)}$	1.22

目　录

第一章 预备知识

记号

1.1 贯穿本专著的始终，区域这个术语和符号Ω专门用来表示实n维欧氏空间$\mathbf{R}^n$中的开集．我们将论及定义在Ω上的函数的可微性和可积性，这些函数都允许是复值函数，除非另有相反的声明．$\mathbf{C}$表示复数域．对于$c\in\mathbf{C}$和函数u, v，数乘cu，和$u+v$，积uv总是按照

$$(cu)(x)=cu(x),$$
$$(u+v)(x)=u(x)+v(x),$$
$$(uv)(x)=u(x)v(x)$$

在一切使右端有意义的点上逐点定义的．

$x=(x_1, \cdots, x_n)$表示$\mathbf{R}^n$中一个点；它的范数是
$|x|=\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$，$x$和$y$的内积是$x\cdot y=\sum_{j=1}^{n}x_jy_j$.

如果$\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$是非负整数$\alpha_j$的一个$n$重组，我们把$x$叫做一个多重指标(multi-index)且用$x^\alpha$来表示次数为$|\alpha|=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j$的单项式$x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$．类似地，如果对于$1\leqslant j\leqslant n$，$D_j=\dfrac{\partial}{\partial x_j}$，则

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$$

表示一个阶数为$|\alpha|$的微分算子．$D^{(0,\cdots,0)}u=u$.

如果α和β是两个多重指标，假如对$1\leqslant j\leqslant n$，$\beta_j\leqslant\alpha_j$我们就说$\beta\leqslant\alpha$，这时$\alpha-\beta$也是一个多重指标而且$|\alpha-\beta|+|\beta|=|\alpha|$.

我们还记

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!.$$

而且，如果 $\beta \leqslant \alpha$ 则

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = \binom{\alpha^1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha^n}{\beta_n}.$$

对在 x 附近 $|\alpha|$ 次连续可微的函数 u 和 v，读者可以验证 Leibniz 公式

$$D^\alpha(uv)(x) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u(x) D^{\alpha-\beta} v(x)$$

是成立的.

1.2 如果 $G \subset \mathbf{R}^n$，我们用 $\bar{G}$ 来表示 G 在 $\mathbf{R}^n$ 中的闭包，假如 $\bar{G} \subset \Omega$ 而且 $\bar{G}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的紧子集(即有界闭集)，那么记作 $G \subset\subset \Omega$. 如果 u 是定义在 G 上的函数，我们把

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}$$

定义为 u 的支集. 我们说 u 在 Ω 中具有紧支集，如果 $\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$. 我们将用"bdry$G$"来表示 G 在 $\mathbf{R}^n$ 中的边界，即，集合 $\bar{G} \cap \bar{G^c}$，其中 $G^c = \mathbf{R}^n \sim G = \{x \in \mathbf{R}^n : x \notin G\}$ 是 G 的余集.

如果 $x \in \mathbf{R}^n$ 且 $G \subset \mathbf{R}^n$，我们用"dist(x, G)"来表示 x 到 G 的距离，也就是数 $\inf_{y \in G} |x-y|$. 类似地，如果 $F, G \subset \mathbf{R}^n$，

$$\operatorname{dist}(F, G) = \inf_{y \in F} \operatorname{dist}(y, G) = \inf_{\substack{x \in G \\ y \in F}} |x-y|.$$

拓扑向量空间

1.3 我们假定读者熟悉实或复数域上向量空间的概念，以及与之有关的维数、子空间、线性变换和凸集的概念. 我们还假定读者熟悉一般拓扑学，Hausdorff 拓扑空间，较弱和较强的拓扑，连续函数，收敛序列，拓扑积空间，子空间和相对拓扑的基本概念.

除非有相反的声明，贯穿本专著的始终一切向量空间都被认为是复数域上的向量空间.

1.4 *拓扑向量空间*，以后缩写为 TVS，是一个 Hausdorff 拓扑空间，也是一个向量空间，对此空间向量空间的加法和数乘运算都是连续的，即，如果X是一个 TVS，则分别从拓扑积空间 $X\times X$ 和 $\mathbf{C}\times X$ 到X中的映射

$$(x, y)\to x+y \text{ 和 } (c, x)\to cx$$

是连续的，如果X的原点的每一个邻域包含一个凸的邻域，则X是*局部凸的* TVS.

下面我们将概略地叙述一下在 Sobolev 空间研究中起重要作用的拓扑空间和赋范空间理论的一些方面，大部分结果都将略去证明和细节. 对于这些课题的更完全的讨论，介绍读者去看泛函分析的标准教科书，例如，Yosida[69]或 Rudin[59].

1.5 我们把定义在X上的数值函数 f 叫做向量空间X上的*泛函*. 泛函 f 是线性的，假如

$$f(ax+by)=af(x)+bf(y),\quad x, y\in X, a, b\in\mathbf{C}.$$

当X是一个 TVS 时，X 上的泛函叫做连续的，如果这个泛函从X到 $\mathbf{C}$ 是连续的，其中 $\mathbf{C}$ 具有由 Euclid 度量导出的通常的拓扑.

X上一切连续线性泛函组成的集合叫做X的*对偶空间*，并用 X' 来表示，在逐点的加法和数乘的意义下，X' 是一个向量空间：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ (cf)(x)=cf(x),$$

$$f, g\in X',\ x\in X,\ c\in\mathbf{C}.$$

假如对X'规定一个适当的拓扑，则X'是一个TVS. 这种拓扑之一就是*弱-星拓扑*，也就是使得对每个 $f\in X'$，由 $F_x(f)=f(x)$定义的 X' 上的泛函 F_x 对于每个 $x\in X$ 是连续的最弱的拓扑，例如，在 1.52 节中介绍的Schwartz广义函数空间中就用了这种拓扑，对于

赋范空间的对偶空间能够给出一个更强的拓扑，关于这个拓扑对偶空间本身就是一个赋范空间(1.10 节).

赋 范 空 间

1.6 向量空间X上的一个范数是X上的一个实值泛函，它满足

(i) 对一切$x\in X$, $f(x)\geqslant 0$, 等号当且仅当$x=0$时成立,

(ii) 对每个$x\in X$和$c\in\mathbf{R}$, $f(cx)=|c|f(x)$,

(iii) 对于$x, y\in X$, $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$.

赋范空间是已经规定了范数的向量空间. 除在有些地方引入更简单的记号外，范数将用$\|\cdot;\ X\|$来表示. 当$r>0$时，集合

$$B_r(x)=\{y\in X:\|y-x;X\|<r\}$$

叫做中心在$x\in X$半径为r的开球. X的子集合A叫做开集，如果对每个$x\in A$存在$r>0$使得$B_r(x)\subset A$, 这样定义的开集构成X的一个拓扑. 对这个拓扑而言X是一个 TVS. 这个拓扑叫做X上的范数拓扑，在这个拓扑下$B_r(x)$的闭包是

$$\overline{B_r(x)}=\{y\in X:\|y-x;X\|\leqslant r\}.$$

一个 TVS X 叫做可赋范的，如果X的拓扑和由X上的某个范数导出的拓扑一致. 向量空间上两个不同的范数叫做等价的，如果它们导出X上的相同的拓扑，即，如果对某个常数$c>0$, 对一切$x\in X$

$$c\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant\left(\frac{1}{c}\right)\|x\|_1,$$

$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$是X上的两个范数.

如果X和Y是两个赋范空间，又如果存在一个把X映到Y上的一对一的线性算子L，而且对每个$x\in X$具有性质$\|L(x);Y\|=\|x;X\|$，则L叫做X和Y间的一个等距同构算子，而X和Y叫做等距同构的；记作$X\cong Y$. 互相等距同构的空间常常看成是一样

的，因为它们具有同样的结构而仅有的差别只是它们的元素的性质不同而已.

1.7 赋范空间 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0 当且仅当在 $\mathbf{R}$ 中 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x_0;X\|=0$，$X$ 的范数拓扑由收敛的序列完全确定.

赋范空间 X 的子集合 S 叫做在 X 中稠密，如果每个 $x\in X$ 是 S 中的元素构成的序列的极限. 赋范空间 X 叫做可分的，如果 X 有可数的稠密子集.

1.8 赋范空间 X 中的序列 $\{x_n\}$ 叫做 Cauchy 序列当且仅当 $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|x_m-x_n;X\|=0$. 如果 X 中每个 Cauchy 序列收敛到 X 中的一个极限，则 X 是完备的而且是一个 Banach 空间. 每一个赋范空间 X 或者是一个 Banach 空间或者是一个 Banach 空间 Y 的一个稠密子集，它们的范数满足

$$\|x;Y\|=\|x;X\| \qquad \text{对一切} \quad x\in X$$

如果是后面一种情况，Y 叫做 X 的完备化.

1.9 如果 X 是一个向量空间，定义在 $X\times X$ 上的泛函 $(\cdot,\cdot)_X$ 叫做 X 上的内积，假如对一切 $x, y, z\in X$ 和 $a, b\in\mathbf{C}$

(i) $(x, y)_X=\overline{(y, x)_X}$,

(ii) $(ax+by, z)_X=a(x, z)_X+b(y, z)_X$,

(iii) $(x, x)_X=0$ 当且仅当 $x=0$,

其中 $\bar{c}$ 表示 $c\in\mathbf{C}$ 的共轭复数. 给定了这样一种内积后，X 上的一种范数就能够用

$$\|x;X\|=(x, x)_X^{1/2} \tag{1}$$

来定义. 如果在这个范数下 X 是一个 Banach 空间，则 X 叫做 Hilbert 空间. 在范数是从内积经由(1)得到的任何赋范空间中，平行四边形定律

$$\|x+y;X\|^2+\|x-y;X\|^2=2\|x;X\|^2+2\|y;X\|^2 \tag{2}$$

是成立的.