

现代数学译丛

局部类域论

岩泽健吉 著

科学出版社

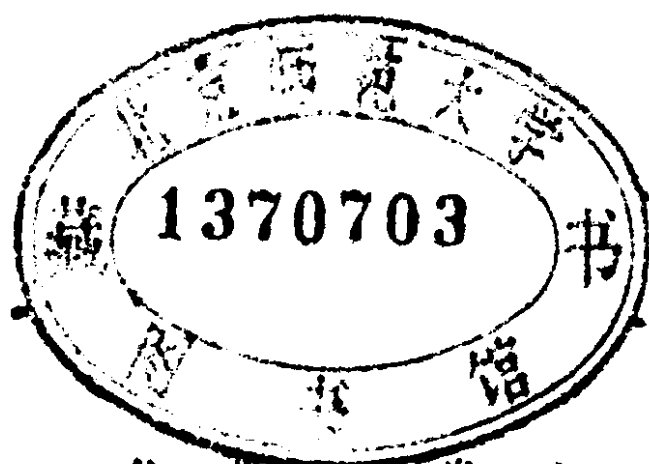
现代数学译丛

局部类域论

岩泽健吉 著

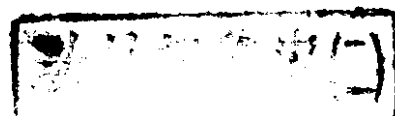
冯克勤 译

1241154/23



科学出版社

1986



内 容 简 介

局部类域论是研究局部域 Abel 扩张的理论,是代数数论的一个重要组成部分.本书前三章介绍了完备域特别是局部域的一般理论.第四章以最大不分歧扩张为中心叙述了局部域无限扩张的理论.第五、六章为本书的核心,介绍局部类域论的主要结果.第七章是形式群在局部类域论中的应用.第八章考查了一个典型例子:局部分圆域.在附录中扼要叙述了 Brauer 群和上同调方法.本书以初等方法和不大的篇幅叙述了局部类域论的基本内容,成为学习这一理论的一本极好的入门书.本书的英、俄译本均已出版.

本书可作为代数专业研究生的教材,是从事代数学(特别是代数数论)的研究人员和教学人员的有益参考书.

岩 澤 健 吉
局 所 類 体 論
岩波書店, 1980

现代数学译丛 局 部 类 域 论

岩泽健吉 著
冯克勤 译
责任编辑 杜小杨

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986 年 8 月第 一 版	开本: 850×1168 1/32
1986 年 8 月第一次印刷	印张: 5 1/2
印数: 0001—3,000	字数: 142,000

统一书号: 13031·3256

本社书号: 4942·13—1

定 价: 1.60 元

前 言

大家知道, Hilbert-高木-Artin 所发展的类域论 (Klassenkörpertheorie) 是关于代数数域和代数函数域的代数扩张、特别是 Abel 扩张的理论, 而局部类域论则是关于局部域扩张的同样的理论. 本书是从初等的观点讲述局部类域论的一般性入门书.

关于局部类域论, 无论是以它的理论自身为主题, 还是作为整体类域论的一部分, 目前在日本和其他国家都有不少优秀的著作. 对于前一种例如可以举出 Artin [1] 和 Serre [11], 而后一种则有 Cassels-Fröhlich [3], 彌永 [7], 河田 [8], Weil [14] 等. 这一理论有许多基本定理. 本书在讲述这一理论的时候, 固然仍以证明这些定理作为主要目标, 但是通往这一目标的途径, 即在证明方法上却与以往著作有许多相异之处. 现说明如下.

历史上, 局部类域论是由原来的整体类域论派生出来的. 所以起初前者的主要结果均可由后一理论推导出来. 但是随后出现了独立地构造局部类域论自身的方法 (十九世纪三十年代), 从而将局部类域论应用到整体类域论的证明之中. 后来从 1950 年前后, 开始了以 Hochschild 和中山为先驱的研究工作, 伴随着群的上同调理论的发展, 从更加广泛而透彻的观点给出局部类域论的证明. 前面所列举的著作几乎全是用上了同调方法 (但是仔细说来, Weil [14] 是建立在结合代数理论的基础上, 然而从结合代数中也可以看到上同调理论的来源). 直到最近, 荷兰数学家 M. Hazewinkel^[6] 发表了不用上同调群构造局部类域论的新方法. 概括地说, 如果把上同调方法看作是代数的乃至是群论的方法, 那末新的方法可以说成是数论的乃至是域论的方法. 因此, 采用这种新的方法, 特别是对于初学这一理论的人来说, 或许更易于理解局部类域论的数论内容.

本书主要是基于 Hazewinkel 的新构思来介绍局部类域论的概要。至于各章的内容,在每章开头都有一个概括的叙述,这里仅作一简单介绍。第一章至第三章对于完备域特别是局部域作了一般性的介绍,为后面几章作准备。第四章是局部域的基本理论,以最大不分歧扩张为主题讲述局部域的无限扩张。第五章和第六章是本书的核心与主要部分,在这里介绍 Hazewinkel 思想的一般化形式,由此证明局部类域论的主要结果。第七章介绍形式群在局部域上的应用,特别是用形式群给出存在定理的另一证明。最后,在第八章,作为局部域的一个例子来考查局部分圆域,这一章的最后是证明关于范剩余符号的 Artin-Hasse 优美公式。

以上是本书的内容概要。作者在写作过程中以向读者传授知识作为主要目标,尽量避免运用对于局部类域论基本结果来说是多余的那些预备知识,虽然这样有时会走一些弯路。Hazewinkel 的方法正是以上述目的作为考虑的出发点。但是这样一来,本书中便没有机会接触到局部域上 Brauer 群理论。所以另外又加了一个附录,对于 Brauer 群作一简单介绍,同时也介绍了一点上同调方法。即使对于同一个数学分支,为了对精密而深刻的理论本身有更好的理解,在许多场合都有必要研究各种不同的方法和观点。局部类域论与原来的整体类域论比较起来虽然简单一些,但是仍旧有上述的必要性。本书作为一本入门书,展示出局部类域论的一条通路。作者希望读者能以本书为出发点,然后从关于这一理论的其他著作中学习别的方法,进而把研究领域扩大到整体类域论中去。

如上所述,本书不需要很多预备知识。只需要代数学、拓扑空间理论和拓扑群论的一般性基础知识就可以理解本书的内容。此外,在叙述过程中还有一些引伸出来的话题,在这些地方读者可根据所列文献自行补足。引用的文献表附在书末。关于局部域和局部类域论的详细文献可见 Serre [11]。

著 者

1979 年 5 月

目 录

前言

第一章 完备域	1
§ 1.1 赋值	1
§ 1.2 赋值的限制、扩充和完备化.....	3
§ 1.3 完备域	7
§ 1.4 完备域的 Galois 扩域	13
第二章 闭完备域	17
§ 2.1 范映射	17
§ 2.2 基本正合序列	22
第三章 局部域	27
§ 3.1 局部域的一般性质	27
§ 3.2 有限扩域	32
§ 3.3 局部域的范群	35
第四章 极大不分歧扩域	41
§ 4.1 代数扩域和它的范群	41
§ 4.2 极大不分歧扩域 k_{ur}	44
§ 4.3 $K = k_{ur}$ 的扩域.....	50
第五章 Abel 扩张 k_{ab}/k_{ur}	55
§ 5.1 有限 Galois 扩张 E/k	55
§ 5.2 $\delta_{E/k}$ 的性质	62
§ 5.3 拓扑同构 δ_k	71
第六章 基本定理	80
§ 6.1 基本映射 ρ_k	80
§ 6.2 ρ_k 的性质	84
§ 6.3 有限 Abel 扩域.....	92
第七章 形式群及其应用	100

§ 7.1 一般的形式群	100
§ 7.2 形式群 $F_f(X, Y)$	101
§ 7.3 Abel 扩域 k_x^*	108
第八章 局部分圆域	120
§ 8.1 局部分圆域	120
§ 8.2 范剩余符号	128
§ 8.3 局部域上的微分	136
§ 8.4 Artin-Hasse 公式	140
附录 局部域的 Brauer 群	153
§ A.1 一般的上同调群	153
§ A.2 Galois 群的上同调群	158
§ A.3 局部域的 Brauer 群	162
参考文献	169

第一章 完 备 域

作为准备,本章开始介绍关于完备正规赋值域的基本结果.但是对于一般的代数教科书(例如藤崎[5], van der Waerden [13]等)中包含的一些事实,这里省略了证明.详情还请参考专门的赋值论书籍以及 Artin [1], 彌永[7], Serre [11]等.

§ 1.1 赋 值

定义在域 k 上的函数 $v(x) (x \in k)$, 如果满足下列诸条件, 便叫作 k 的(指数)赋值:

i) $v(0) = +\infty$; 而当 $x \neq 0$ 时 $v(x)$ 是实数;

ii) 对于任意的 $x, y \in k$,

$$\min(v(x), v(y)) \leq v(x + y);$$

iii) 对于任意的 $x, y \in k$,

$$v(x) + v(y) = v(xy).$$

由定义立即得出

$$v(\pm 1) = 0; v(x) = v(-x); v(x) < v(y) \Rightarrow v(x + y) = v(x).$$

其中 $1 = 1_k$ 是 k 的单位元素. 此外, 如果令

$$\mathfrak{o} = \{x \in k \mid v(x) \geq 0\},$$

$$\mathfrak{p} = \{x \in k \mid v(x) > 0\},$$

则 $\mathfrak{o}$ 是 k 的子环而 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{o}$ 的极大理想. 从而

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$$

是域. $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{f}$ 分别叫作 v 的赋值环, 极大理想和剩余类域. 由定义中的 iii) 可知 v 定义出从域 k 的乘法群 $k^\times$ 到实数加法群 $\mathbf{R}^+$ 中的同态

$$v: k^\times \rightarrow \mathbf{R}^+.$$

从而 $v(k^\times)$ 是 $\mathbf{R}^+$ 的子群, 如果令

$$U = \text{Ker}(v) = \{x \in k \mid v(x) = 0\},$$

则有自然同构

$$k^\times/U \cong v(k^\times),$$

我们把 U 叫作 v 的单位群.

设 v 为 k 的赋值. 对于任意正实数 $\alpha > 0$, 定义

$$v'(x) = \alpha v(x), \quad x \in k,$$

则 v' 显然也是 k 的赋值. 当 k 的两个赋值 v 和 v' 满足这样的关系, 即一个为另一个的正数倍时, 我们写成

$$v \sim v',$$

并且称它们是等价的赋值. 等价的赋值具有相同的赋值环、极大理想和剩余类域, 还有许多其他共同的性质.

设 k 和 v 如上所述, 给了一个固定的实数 β , $0 < \beta < 1$, 对于 k 中任意元素 x 和 y , 令

$$\rho(x, y) = \beta^{v(x, y)},$$

ρ 定义出 k 上一个距离, 由此 k 是距离空间, 从而也是 Hausdorff 拓扑空间. 取不同的 β 值, 则对应的距离 ρ 是彼此等价的, 所以 k 上由 ρ 给出的拓扑是不变的. 也就是说, 该拓扑由赋值 v 所唯一决定. 不难看出, k 对于这一拓扑是拓扑域. 如果 k 对于上述的距离 ρ 是完备距离空间的时候, 我们称 v 是 k 的完备赋值. 注意当 β 改变从而 ρ 改变时, 其完备性是不变的. 此外, 如果 $v \sim v'$, 则 v 和 v' 在 k 上定义出等价的距离, 特别地, 如果 v 是完备的, 则 v' 也是完备的.

继续设 v 是 k 的赋值. 如果 $\mathbf{R}^+$ 的子群 $v(k^\times)$ 是有理整数加法群, 即

$$v(k^\times) = \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\},$$

则将 v 叫作 k 的正规赋值. 这时取 k 中元素 π 使得

$$v(\pi) = 1,$$

这样的 π 叫作正规赋值 v 的素元. 对于一个确定的素元 π , 由于 $\mathfrak{p} = \{x \in k \mid v(x) \geq 1\}$, 从而得到

$$\mathfrak{p} = (\pi) = \mathfrak{o}\pi.$$

于是 $\mathfrak{p}$ 的方幂为

$$\mathfrak{p}^n = (\pi^n) = \mathfrak{o}\pi^n = \{x \in k \mid v(x) \geq n\}, n \geq 0.$$

由于 $v(x) \geq n$ 和 $v(x) > n-1$ 是一回事, 所以 $\mathfrak{p}^n (n \geq 0)$ 均是 k 的开(加法)子群. 并且不难看出, 对于由上述的 v 所定义的 k 的拓扑, $\{\mathfrak{p}^n\}_{n \geq 0}$ 形成 0 的基本邻域系. 也就是说, 由 v 决定的 k 的拓扑是 p -adic 拓扑. 注意 $\mathfrak{p}^n$ 是 k 的开子群, 从而也是闭子群. 由于 $\mathfrak{p}^n = (\pi^n) \neq \{0\}$, 所以拓扑域 k 是全不连通的, 但不是离散的.

仍令 v 为 k 的正规赋值, 但是这次考虑 k 的乘法群 $k^\times$. 由前述的同构 $k^\times/U \cong v(k^\times) = \mathbb{Z}$ 可得

$$k^\times = \langle \pi \rangle \times U, \langle \pi \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

其中 $\langle \pi \rangle$ 是由素元 π 生成的 $k^\times$ 的子群. 此外, 若令

$$U_0 = U, U_n = 1 + \mathfrak{p}^n = 1 + \mathfrak{o}\pi^n, n \geq 1,$$

不难看出它们均是 $k^\times$ 的子群, 并且

$$\cdots \subseteq U_{n+1} \subseteq U_n \subseteq \cdots \subseteq U_1 \subseteq U_0 = U \subseteq k^\times.$$

$k^\times$ 对于由 k 的 p -adic 拓扑所诱导的拓扑是 Abel 拓扑群, 并且 U_n 均是它的开子群, 而且由上述的内容可知 $\{U_n\}_{n \geq 0}$ 形成 $k^\times$ 中 1 的基本邻域系. 进而, 如果以 $\mathfrak{f}^+$ 和 $\mathfrak{f}^\times$ 分别表示剩余类域 $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 的加法群和乘法群, 则有

$$U_0/U_1 \cong \mathfrak{f}^\times, U_n/U_{n-1} \cong \mathfrak{f}^+, n \geq 1.$$

实际上不难看出, 自然满同态 $\mathfrak{o} \rightarrow \mathfrak{f} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 给出乘法群的满同态 $U = U_0 \rightarrow \mathfrak{f}^\times$, 然后由此即得到 $U_0/U_1 \cong \mathfrak{f}^\times$. 而当 $n \geq 1$ 的时候, $U_n = 1 + \mathfrak{o}\pi^n$ 中的元素均可写成 $1 + x\pi^n, x \in \mathfrak{o}$, 则由 $1 + x\pi^n \bmod U_{n+1} \mapsto x \bmod \mathfrak{p}$ 即得出 $U_n/U_{n+1} \cong \mathfrak{f}^+$.

§ 1.2 赋值的限制、扩充和完备化

设 k' 是 k 的任意扩域而 μ 为 k' 的赋值, 函数 μ 在子域 k 上的限制记成 $\mu|_k$, 它显然是 k 的赋值, 叫作 μ 在子域 k 上的限制. 另

一方面,对于 k 的赋值 ν 如果存在 k' 上的赋值 μ 使得

$$\mu|_k = \nu,$$

则 μ 叫作 ν 到扩域 k' 的扩充. 对于 k' 上的赋值 μ , 它的限制 $\mu|_k$ 是唯一确定的. 反过来,给了 k 的赋值 ν , 是否存在 ν 到 k' 上的扩充 μ , 并且若存在是否唯一, 这是赋值论的一个重要问题.

如上令 $\mu|_k = \nu$. 由 ν 给出的 k 的拓扑显然是由 μ 所给出的 k' 的拓扑所诱导出来的. 也就是说, 作为拓扑域, k 是 k' 的子域. 设 μ 的赋值环、极大理想和剩余类域分别为

$$\mathfrak{o}' = \{x' \in k' \mid \mu(x') \geq 0\},$$

$$\mathfrak{p}' = \{x' \in k' \mid \mu(x') > 0\},$$

$$\mathfrak{f}' = \mathfrak{o}'/\mathfrak{p}',$$

则由定义立刻知道

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{o} \cap \mathfrak{p}'.$$

因而

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p} = \mathfrak{o}/\mathfrak{o} \cap \mathfrak{p}' = (\mathfrak{o} + \mathfrak{p}')/\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{o}'/\mathfrak{p}' = \mathfrak{f}'.$$

也就是说, 可以把 k 的剩余类域 $\mathfrak{f}$ 自然地看成是 k' 的剩余类域 $\mathfrak{f}'$ 的子域. 另一方面, 由 $\mu|_k = \nu$ 知道

$$\nu(k^\times) \subseteq \mu(k'^\times) \subseteq \mathbf{R}^+.$$

定义群指数和域的扩张次数分别为

$$e = [\mu(k'^\times) : \nu(k^\times)], \quad f = [\mathfrak{f}' : \mathfrak{f}].$$

其中 e, f 为自然数 $1, 2, 3, \dots$, 或者是 $+\infty$. 我们将

$$e = e(\mu/\nu), \quad f = f(\mu/\nu)$$

叫作 μ/ν 的分歧指数和剩余类次数.

作为赋值扩充的一个例子, 我们来叙述关于完备化的熟知结果¹⁾. 设给了域 k 的赋值 ν , 则存在 k 的扩域 k' 以及 ν 到 k' 上的扩充 μ 满足如下两个条件: 1) μ 是 k' 的完备赋值; 2) 对于由 μ 决定的 k' 的拓扑, k 是 k' 的稠子集. 这样的 k' , 或者更确切地说, 由

1) 关于完备化的一般理论可参见藤崎[5]第六章, 或者 v. d. Waerden [13], 第十章.

k' 和 μ 组成的 (k', μ) 叫作 k 的赋值 ν 的完备化. 如果 (k', μ) 和 (k'', ω) 均是 ν 的完备化, 则存在 k -同构 $\sigma: k' \xrightarrow{\sim} k''$ 使得 $\mu = \omega \circ \sigma$. 因此, 完备化本质上是唯一确定的. 此外, 对于 k' 中任意元素 x' , 由2)可知存在 $x_n \in k$, 使得 $x' = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 从而

$$\mu(x') = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(x_n).$$

由此即知

$$e(\mu/\nu) = f(\mu/\nu) = 1.$$

也就是说

$$\nu(k^x) = \mu(k'^x), f' = f.$$

完备化的重要性在于, 完备赋值具有许多 (一般赋值不具备的) 特别的性质. 例如下面所述的著名的 Hensel 引理成立¹⁾.

引理 1 假设 ν 是域 k 的完备赋值, $f = o/p$ 是 k 的剩余类域. $f(X)$, $g_0(X)$ 和 $h_0(X)$ 均是多项式环 $o[X]$ 中的多项式, 并且满足

$$f(X) \equiv g_0(X)h_0(X) \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

如果 $g_0(X) \pmod{p}$ 和 $h_0(X) \pmod{p}$ 是 $[X]$ 中互素的多项式, 则存在 $o[X]$ 中的多项式 $g(X)$ 和 $h(X)$ 满足下列条件:

$f(X) = g(X)h(X)$, $g(X) \equiv g_0(X) \pmod{p}$, $h(X) \equiv h_0(X) \pmod{p}$, 并且 $g(X)$ 的次数等于 $g_0(X) \pmod{p}$ 的次数.

上面的 Hensel 引理是赋值论的基本工具, 它有许多应用, 下面的引理便是其中之一.

引理 2 假设 k' 是 k 的代数扩域, 则 k 的完备赋值 ν 可以唯一地扩充成 k' 上的赋值. 又如果 k'/k 是有限扩张, 则 μ 也是完备赋值. 又若 $n = [k':k]$, 并以 $N_{k'/k}$ 表示 k'/k 的范, 则对 k' 中任意元素 x' 均有

$$\mu(x') = \frac{1}{n} \nu(N_{k'/k}(x')).$$

引理 3 设 k'/k , ν 和 μ 如引理 2 所述, 又设 σ 是 k' 的 k -自

1) 关于引理 1 和 2 的证明参见第 4 页脚注 1) 中的文献.

同构, 则 $\mu \circ \sigma = \mu$, 即

$$\mu(\sigma(x')) = \mu(x'), \quad x' \in k'.$$

从而 $\sigma: k' \xrightarrow{\sim} k'$ 对于由 μ 定义的拓扑是 k' 的拓扑自同构. 此外, 若以 $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{f}' = \mathfrak{o}'/\mathfrak{p}'$ 分别表示 ν 和 μ 的剩余类域, 则

$$\sigma(\mathfrak{o}') = \mathfrak{o}', \quad \sigma(\mathfrak{p}') = \mathfrak{p}'.$$

从而 σ 诱导出 $\mathfrak{f}'$ 的 $\mathfrak{f}$ -自同构

$$\sigma': \mathfrak{f}' \xrightarrow{\sim} \mathfrak{f}.$$

证明 令 $\mu' = \mu \circ \sigma$, 易知 μ' 是 k' 的赋值. 对于 $x \in k$, 则 $\mu'(x) = \mu(\sigma(x)) = \mu(x) = \nu(x)$, 即 μ' 也是 ν 到 k' 上的扩充. 由引理 2 关于扩充的唯一性可知 $\mu' = \mu$, 即 $\mu \circ \sigma = \mu$. 后一部分的论断是显然的.

引理 4 设 k'/k , ν , μ , $\mathfrak{o}$ 和 $\mathfrak{o}'$ 如引理 3 所示, 则 $\mathfrak{o}'$ 是 $\mathfrak{o}$ 在 k' 中的整闭包. 又若 k'/k 是有限扩张, 则迹映射和范映射

$$T_{k'/k}, N_{k'/k}: k' \rightarrow k$$

对于由 ν 和 μ 所定义的拓扑均是连续映射.

证明 设 x' 为 k' 中任意元素, 则 $k(x')/k$ 为有限扩张, 从而对于前半部分的推断只需对 k'/k 是有限扩张的情形加以证明即可. 令 $[k':k] = n$ 而 Ω 是 k' 的代数闭包, 则恰好存在 n 个 k -单同态 $k' \rightarrow \Omega$ (重复的考虑在内), 设它们是 $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, 而对于 k' 中任意元素 x' , 令

$$\prod_{i=1}^n (X - \sigma_i(x')) = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_i \in k.$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ 均是 $\sigma_1(x'), \dots, \sigma_n(x')$ 的对称多项式. 特别地,

$$a_1 = - \sum_{i=1}^n \sigma_i(x') = -T_{k'/k}(x'),$$

$$a_n = (-1)^n \prod_{i=1}^n \sigma_i(x') = (-1)^n N_{k'/k}(x').$$

每个 σ_i 都可以扩充成 Ω 的 k -自同构, 又由引理 2 知道 μ 可以扩充成 Ω 的赋值 μ' , 而由引理 3 知道 σ_i 对于由 μ' 决定的拓扑是 Ω 的

拓扑自同构,从而由上面等式可知 $T_{k'/k}$ 和 $N_{k'/k}$ 均是连续映射.其次设 $x' \in \mathfrak{o}'$, 即 $\mu(x') \geq 0$, 则由引理 3 可知

$$\mu'(\sigma_i(x')) = \mu'(x') = \mu(x') \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

从而 $\nu(a_i) = \mu'(a_i) \geq 0$, 即 $a_i \in \mathfrak{o}$, $1 \leq i \leq n$. 因此 x' 对于 $\mathfrak{o}$ 是整元,反之,假设 x' 对于 $\mathfrak{o}$ 是整元,则有

$$x'^m + b_1 x'^{m-1} + \cdots + b_m = 0, \quad b_i \in \mathfrak{o},$$

于是 $\mu(b_i) = \nu(b_i) \geq 0$ ($1 \leq i \leq m$), 从而 $\mu(x') \geq 0$, 即得到 $x' \in \mathfrak{o}$.

从上面的引理 4 可知,赋值环 $\mathfrak{o}$ 在 k 中是整闭的.此外根据上面的证明知道,如果 $x' \in \mathfrak{p}'$, 则 $\mu'(\sigma_i(x')) = \mu'(x') > 0$, 从而得到

$$\nu(a_i) = \mu'(a_i) > 0, \quad \text{即 } a_i \in \mathfrak{p} \quad (1 \leq i \leq n).$$

特别地,

$$T_{k'/k}(\mathfrak{p}'), N_{k'/k}(\mathfrak{p}') \subseteq \mathfrak{p}.$$

§ 1.3 完 备 域

通常在习惯上把具有完备赋值 ν 的域 k 叫作完备域.而在本书中为方便起见,今后则只限于对 ν 是完备正规赋值的情形,称域 k 是(具有赋值 ν 的)完备域.更确切地,对于一个完备域,应当将域 k 和其上的完备正规赋值 ν 放在一起而表示成 (k, ν) . 在 §1.1 中对于赋值 ν 所定义的 $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$, U 等分别叫作完备域 (k, ν) 的或者简称作 k 的赋值环,极大理想,剩余类域和单位群.此外,正规赋值 ν 的素元 π 也叫作 k 的素元.

设 ν 是域 k 的任意正规赋值, (k', ν') 是 k 中赋值 ν 的完备化,则由上节可知 $\nu'(k'^{\times}) = \nu(k^{\times}) = \mathbf{Z}$, 从而 ν' 是完备的正规赋值,因而 (k', ν') 是完备域.由此可以得到许多完备域的自然例子.

例 1 设 p 为任意素数, ν 是有理数域 $\mathbf{Q}$ 上熟知的 p -adic 赋值,则 $\mathbf{Q}$ 对于 ν 的完备化即是 p -adic 数域 $\mathbf{Q}_p$. 由于 ν 是正规赋

值,从上面的注记可知 $\mathbf{Q}_p$ 是完备域. $\mathbf{Q}_p$ 的赋值环为 p -adic 整数环 $\mathbf{Z}_p$, 极大理想是 $p\mathbf{Z}_p$, 从而剩余类域为 $\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p$, 即是由 p 个元素组成的有限域 $\mathbf{F}_p$.

例 2 设 F 是任意域. 令 $F((X))$ 为所有系数属于 F 并且至多有有限个负幂项的形式幂级数

$$\sum_{-\infty < n} a_n X^n, \quad a_n \in F$$

所组成的集合, 则 $F((X))$ 是 F 的扩域. 设 a_{n_0} 是上面幂级数中第一个不是 0 的系数, 定义

$$v\left(\sum_{-\infty < n} a_n X^n\right) = n_0$$

(而令 $v(0) = +\infty$), 则 v 是 $F((X))$ 的完备正规赋值. (读者自行证明 v 实际上是完备的.) 从而 $(F((X)), v)$ 是完备域. $F((X))$ 的赋值环为整幂级数全体 $F[[X]]$, 极大理想是 $(X) = XF[[X]]$, 从而剩余类域为 $F[[X]]/XF[[X]] = F$. $F((X))$ 包含有理函数域 $F(X)$. v 的限制 $v|F(X)$ 是 $F(X)$ 的正规赋值, 它是由多项式环 $F[X]$ 的素理想 $XF(X)$ 所定义的(就象 $\mathbf{Q}$ 上的 p -adic 赋值一样). 从而 $(F((X)), v)$ 不过是 $F(X)$ 对于 $v|F(X)$ 的完备化.

设 (k, v) 是任意完备域, 取 A 为它的剩余类域 $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 在 $\mathfrak{o}$ 中的完全代表系, 即 A 是 $\mathfrak{o}$ 的一个子集合, 使得 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 中每个剩余类在 A 中恰好有一个代表元. 并且取 k 中零元素 0 作为 $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 中零元素即 $\mathfrak{p}$ 的代表元. 令 π 为 k 中素元, 由于 v 是完备的, 从而形如

$$\sum_{-\infty < n} a_n \pi^n, \quad a_n \in A$$

的每个级数对于 p -adic 拓扑在 k 内都是收敛的, 即给出 k 中一个元素 x . 如果令 a_{n_0} 是上面级数中第一个不为 0 的系数, 则 $a_{n_0} \in \mathfrak{o}$, $a_{n_0} \notin \mathfrak{p}$, 于是 $v(a_{n_0}) = 0$, 由此不难得到

$$v(x) = n_0.$$

定理 1 (展开定理) 设 A 和 π 如上所述, 则 k 中每个元素 x 均可以唯一地表示成以下形式:

$$x = \sum_{-\infty < n} a_n \pi^n, \quad a_n \in A.$$

特别地,

$$\mathfrak{o} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pi^n \mid a_n \in A \right\}, \quad \mathfrak{p} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi^n \mid a_n \in A \right\}.$$

证明 设 $x \neq 0$, $v(x) = n_0$, 则 $v(\pi^{-n_0}x) = 0$, 因此只需对于 $v(x) = 0$ 的情形证明定理即可. 假设 $x \in \mathfrak{o}$, 则存在 $a_0 \in A$ 使得 $x \equiv a_0 \pmod{\mathfrak{p}}$. 由于 $x \notin \mathfrak{p}$ 从而 $a_0 \neq 0$. 由 $\mathfrak{p} = \mathfrak{o}\pi$ 可知 $x = a_0 + x'\pi$, $x' \in \mathfrak{o}$. 于是 $x' \equiv a_1 \pmod{\mathfrak{p}}$, $a_1 \in A$, 从而 $x \equiv a_0 + a_1\pi \pmod{\mathfrak{p}^2}$. 同样由 $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{o}\pi^2$ 可知 $x = a_0 + a_1\pi + x''\pi^2$, $x'' \in \mathfrak{o}$, 从而 $x \equiv a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 \pmod{\mathfrak{p}^3}$. 由此决定出 A 中元素 $a_0, a_1, a_2, \dots$,

显然 $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pi^n$. 从上面的证明过程不难看出 a_n 的唯一性 (参见下面系的证明). 此外由上面的公式 $v(x) = n_0$ 即给出关于 $\mathfrak{o}$ 和 $\mathfrak{p}$ 的等式.

系 集合 A 赋以离散拓扑, 并且将可数个 A 的积集合

$$A^\infty = \{(a_0, a_1, a_2, \dots) \mid a_n \in A\}$$

赋以积拓扑, 则映射

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pi^n$$

定义出从拓扑空间 A^∞ 到 $\mathfrak{o}$ 的一个同胚.

证明 设 $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pi^n$, $y = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \pi^n$, $a_n, b_n \in A$, 则对于任意的 $i \geq 1$, 用数学归纳法不难证明

$$x \equiv y \pmod{\mathfrak{p}^i} \iff a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{i-1} = b_{i-1}.$$

从而由积拓扑的定义即可证明该系的论断.

注记 一般地对于每个整数 n , 均确定 k 中一个元素 π_n 满足

$v(\pi_n) = n$, 则可以象定理 1 一样地证明, k 中任意元素 x 均可以唯一地表示成如下形式

$$x = \sum_{-\infty \ll n} a_n \pi_n, \quad a_n \in A.$$

而定理 1 则是 $\pi_n = \pi^n$ 这一特殊情形.

现在考查完备域的有限扩域.

定理 2 设 (k, v) 是完备域而 k' 是 k 的任意有限扩域, 则 k' 上存在唯一的正规赋值 v' 使得

$$v'|k \sim v.$$

并且 v' 是完备的, 从而 (k', v') 也是完备域.

证明 由 § 1.2 中的引理 2 可知 v 可以唯一地扩充成 k' 的完备赋值 μ , 如果 $n = [k':k]$, 则

$$n\mu(k'^{\times}) \subseteq v(k^{\times}) = \mathbf{Z},$$

$$e = e(\mu/v) = [\mu(k'^{\times}):v(k^{\times})] < +\infty.$$

因此, 若令

$$v' = e\mu,$$

则

$$v'(k'^{\times}) = \mathbf{Z}, \quad v'|k = ev \sim v.$$

从 v' 的扩充 μ 的唯一性可知 v' 的唯一性.

今后, 完备域 k 的有限扩域 k' 均看成是上述意义下(对于定理 2 中的赋值 v')的完备域. 令 $e = e(\mu/v)$, 则

$$v'|k = ev,$$

从而 $e = e(\mu/v)$ 是由 (k, v) 和 (k', v') 所唯一决定的, 称作扩张 k'/k 的分歧指数, 并且表示成

$$e(k'/k).$$

另一方面, 设 $\mathfrak{f}' = \mathfrak{o}'/\mathfrak{p}'$ 是 (k', v') 的剩余类域, 则由 $v' \sim \mu$ 可知 $\mathfrak{f}'$ 也是 μ 的剩余类域. 由 § 1.2 可知 $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$, $f(\mu/v) = [f':f]$, 这里 $[f':f]$ 也是由完备域扩张 k'/k 所唯一决定的, 叫作 k'/k 的剩余类次数, 并且表示成

$$f(k'/k).$$