

高等学校理工科文化补习试用教材

初等数学

—— 公式和数表 ——

北京市高等院校数学教材编写组编

人民教育出版社

初等数学

(公式和数表)

北京市高等院校数学教材编写组编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

新华印刷厂印装

*

1973年6月第一版 1973年8月第二次印刷

印数 210,001—500,000 册

书号 13012·05 定价 0.24 元

(只供学校内部使用)

一、編者的話

为了贯彻执行毛主席关于“走上海机床厂从工人中培养技术人员的道路”的指示，适应教育革命的需要，我们编写了《初等数学》作为理工科大学工农兵学员文化补习试用教材。

本书是在北京各院校文化补习教学实践的基础上编写的。编写大纲及初稿，曾得到部分学员和教师的评审。全书共分五册，即《初等代数》、《初等几何》、《三角函数》、《解析几何》及《公式和数表》。

编写过程中，我们试图打破书本与实践脱节、烦琐哲学的旧体系，联系三大革命的实际，突出基本规律及其辩证发展的线索，以便有助于培养学员分析问题和解决问题的能力。

本书的基本内容大体上反映了理工科各专业对初等数学的要求。由于各专业在教学要求和文化补习安排上有所不同，学员文化程度有差别，编写时，我们注意使本书能够适应上述不同情况。为此：

1. 列入了预备知识。初一程度的可以从预备知识开始学习，初二、三程度的可以从基本内容的有关章节开始学习。

2. 列入了选学内容，约占全书的四分之一。可以根据各专业教学的可能和不同的需要选用，也可供学员结合实践需要自学。

3. 基本内容中章节顺序可以适当变更。如在《初等代数》中，变数、坐标、图象和一次、二次函数是逐步出现的，到《三角函

数》中才概括为一般函数概念。但这些内容大都是独立成节的，因此也可以集中起来学。基本内容的深度也分了层次，以便在教学中取舍。

遵照毛主席关于“**要自学**”的指示，本书在基本规律的说明和例解方面比较详细，配置了较多的练习题，基本内容中各章有小结，每册末有总结。因此，本书也可作为具有高小毕业以上文化程度的工农兵青年自学之用。

由于我们受思想水平、实践经验的局限，本书离“**教材要彻底改革**”的要求差距很大。定稿时间仓促，没有能够更广泛的征求意见，有些缺点，如篇幅还偏大，基本规律提炼不够，有的地方叙述流于琐细等问题，未能进一步解决。热烈欢迎使用本书的同志提出宝贵意见。

一九七三年六月

目 录

拉丁字母和希腊字母.....	1
数学符号.....	2

I 公 式

初等代数.....	3
一、乘法和因式分解.....	3
二、比例.....	3
三、一元二次方程.....	4
四、不等式.....	5
五、指数.....	5
六、对数.....	6
七、复数.....	7
八、行列式.....	8
九、线性方程组的解.....	9
十、数列.....	10
十一、排列组合和二项式定理.....	11
十二、向量.....	12
初等几何.....	13
一、平面图形.....	13
1. 四边形 2. 正多边形 3. 扇形 4. 弓形	
二、立体图形.....	14
1. 圆柱 2. 圆锥 3. 圆台 4. 棱柱 5. 棱锥 6. 棱台 7. 球	
8. 球冠 9. 球缺 10. 球台	
三角函数.....	16
一、弧度和度的关系.....	16
二、三角函数的定义.....	16
三、基本关系.....	17
四、诱导公式.....	17
五、特殊角的三角函数值.....	17
六、和差角公式.....	18
七、倍角公式.....	18

八、半角公式	18
九、和差与积的关系	19
十、三角形的边角关系	19
解析几何	20
一、两个基本问题	20
二、直线的斜率 k	20
三、直线的方程	21
四、直线问题	21
五、二次曲线	22
六、坐标变换	23
七、参数方程	24
八、极坐标	25
九、空间平面和直线	26
十、二次曲面	27

II 数 表

重要常数表	29
平方表	30
平方根表	33
立方表	38
立方根表	44
三角函数表	52
常用对数表	60
反对数表	64
正弦对数和余弦对数表	68
正切对数和余切对数表	73
自然对数表	80
指数函数 e^x 和 e^{-x} 表	83
弧度和度的换算表	85
等分圆周表	88
质数表 (2-541)	89
常用计量单位表	90

拉丁字母和希腊字母

拉 丁 字 母

<i>A a</i>	<i>H h</i>	<i>O o</i>	<i>V v</i>
<i>B b</i>	<i>I i</i>	<i>P p</i>	<i>W w</i>
<i>C c</i>	<i>J j</i>	<i>Q q</i>	<i>X x</i>
<i>D d</i>	<i>K k</i>	<i>R r</i>	<i>Y y</i>
<i>E e</i>	<i>L l</i>	<i>S s</i>	<i>Z z</i>
<i>F f</i>	<i>M m</i>	<i>T t</i>	
<i>G g</i>	<i>N n</i>	<i>U u</i>	

希 腊 字 母

<i>A α</i> (阿尔法)	<i>I ι</i> (约塔)	<i>P ρ</i> (若)
<i>B β</i> (贝塔)	<i>K κ</i> (卡帕)	<i>Σ σ</i> (西格马)
<i>Γ γ</i> (伽马)	<i>Λ λ</i> (兰布达)	<i>Τ τ</i> (套)
<i>Δ δ</i> (德耳塔)	<i>Μ μ</i> (米尤)	<i>Φ φ</i> (斐)
<i>Ε ε</i> (艾普西龙)	<i>Ν ν</i> (纽)	<i>Χ χ</i> (喜)
<i>Ζ ζ</i> (截塔)	<i>Ξ ξ</i> (克西)	<i>Υ υ</i> (宇普西龙)
<i>Η η</i> (艾塔)	<i>Ο ο</i> (奥密克戎)	<i>Ψ ψ</i> (普西)
<i>Θ θ</i> (西塔)	<i>Π π</i> (派)	<i>Ω ω</i> (欧米伽)

数 学 符 号

$\neq$	不等于	
$\equiv$	恒等于	
$\approx$	约等于	有时用 $\doteq$
$n!$	n 阶乘	前 n 个自然数的连乘积 如 $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$
$\sum$	总和	如 $\sum_{i=1}^5 a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$
i	虚数单位	$i^2 = -1$, 电工中常用 j
$\sim$	范围	如 $5 \sim 10$ 表示由 5 到 10
$\lg x$	常用对数	即 $\log_{10} x$
$\ln x$	自然对数	即 $\log_e x$ ($e = 2.71828 \cdots$)
$f(x)$	函数	如 $y = f(x)$ 表示 y 是 x 的函数
∞	无穷大	如 $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty$
$\bar{Z}$	Z 的共轭复数	如 $Z = 2 + 3i, \bar{Z} = 2 - 3i$
$\Rightarrow$	“如果…那么…”	如 $a - b > 0 \Rightarrow a > b$

I 公 式

初 等 代 数

一、乘法和因式分解

1. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
2. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
3. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
4. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
5. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
6. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
7. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
8. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
9. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
10. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$
11. n 是偶数时,
$$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})$$
12. n 是奇数时,
$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$$

二、比 例

1. 设 $a:b=c:d$, 即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (a, b, c, d 全不为零), 则

(1) $ad=bc$ (内项积等于外项积)

(2) $b:a=d:c$

$$(3) a:c=b:d$$

$$(4) \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad (\text{合比})$$

$$(5) \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad (\text{分比})$$

$$(6) \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \quad (\text{合分比})$$

2. 设 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, 则

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c+e}{b+d+f} \quad (\text{等比})$$

3. 如果 y 和 x 成正比(可以写成 $y \propto x$), 那么

$$\frac{y}{x} = k \text{ 或 } y = kx \quad (k \text{ 是比例常数})$$

4. 如果 y 和 x 成反比(可以写成 $y \propto \frac{1}{x}$), 那么

$$y: \frac{1}{x} = k \text{ 或 } xy = k \quad (k \text{ 是比例常数})$$

三、一元二次方程

1. 一般形式 $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

2. 根的公式

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3. 根和系数的关系

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

4. 判别式 $b^2 - 4ac > 0$ 二实根不等

$$b^2 - 4ac = 0 \quad \text{二实根相等}$$

$$b^2 - 4ac < 0 \quad \text{二虚根共轭}$$

四、不 等 式

1. 基本性质

$$(1) a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$$

$$(2) a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

$$(3) a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

$$(4) a > b > 0, n \text{ 是正整数} \Rightarrow a^n > b^n, \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$$

2. 绝对值

$$(1) |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

$$(2) |ab| = |a| \cdot |b|, \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

3. 绝对值不等式

$$(1) |A+B| \leq |A| + |B|$$

$$(2) |A-B| \leq |A| + |B|$$

$$(3) |A-B| \geq |A| - |B|$$

$$(4) -|A| \leq A \leq |A|$$

$$4. \text{ 如果 } a, b \text{ 都大于零, 那么 } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

即, 两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数, 等式当 $a=b$ 时成立.

五、指 数

1. 定义

$$a^n = a \cdot a \cdots a \quad (n \text{ 个 } a)$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0)$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (a > 0)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

其中 m, n 是正整数.

2. 规则

$$a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta} \quad \frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta} \quad (a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}} \quad (ab)^{\alpha} = a^{\alpha}b^{\alpha}$$

其中 a, b 是正实数, α, β 是任意实数.

六、对 数

1. 定义 如果 $a^x = N (a > 0, a \neq 1)$, 那么 x 叫做 N (真数) 的以 a 为底的对数, 记作 $x = \log_a N$.

2. 恒等式 $a^{\log_a N} = N$

3. 性质

$$(1) \log_a 1 = 0$$

$$(2) \log_a a = 1$$

4. 公式

$$(1) \log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$(2) \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$(3) \log_a M^n = n \log_a M$$

$$(4) \log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$$

5. 换底公式 $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

$$(1) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$(2) \lg M = \frac{\ln M}{\ln 10} \approx 0.4343 \ln M$$

$$(3) \ln M = \frac{\lg M}{\lg e} \approx 2.3026 \lg M$$

七、复 数

1. 虚数单位的乘方

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$$

$$i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i, \quad i^{4n} = 1$$

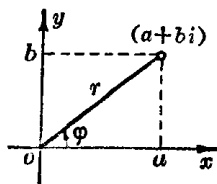
2. 复数的三种表示式及其相互关系

代数式 $Z = a + bi$

三角式 $Z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

指数式 $Z = re^{i\varphi}$

$$\begin{cases} a = r \cos \varphi \\ b = r \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{tg } \varphi = \frac{b}{a} \end{cases}$$



3. 复数的运算

(1) 代数式

$$(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (bc+ad)i$$

$$(a+bi) \div (c+di) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

(2) 三角式和指数式

设 $Z_1 = R(\cos \alpha + i \sin \alpha) = Re^{i\alpha}$

$$Z_2 = r(\cos \beta + i \sin \beta) = re^{i\beta}$$

则 $Z_1 \cdot Z_2 = Rr[\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)] = Rre^{i(\alpha + \beta)}$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R}{r}[\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)] = \frac{R}{r}e^{i(\alpha - \beta)}$$

$$Z_1^n = R^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = R^n e^{in\alpha}$$

$$\begin{aligned} Z_1^{\frac{1}{n}} &= R^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right] \\ &= R^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\alpha + 2k\pi}{n}} \end{aligned}$$

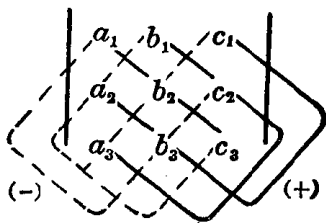
$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

八、行 列 式

1. 二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

2. 三阶行列式

(1) 对角线展开 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$



(2) 降阶展开(适用于高阶行列式)

如按第一列展开:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

3. 行列式的性质

$$\begin{aligned} (1) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{k} \begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} kb_1 & b_1 & c_1 \\ kb_2 & b_2 & c_2 \\ kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(3) \begin{vmatrix} a_1 + a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2 + a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3 + a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

行列式的这些性质, 适用于任意阶行列式.

九、线性方程组的解

1. 二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D} \quad (D \neq 0)$$

$$\text{其中 } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

2. 三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D} \quad (D \neq 0)$$

$$\text{其中 } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

多元线性方程组解的公式和二元、三元的类似.

十、数 列*

1. 等差数列 设首项为 a_1 , 公差为 d , 则有

$$a_1, a_1+d, a_1+2d, \dots, a_1+(n-1)d, \dots$$

(1) 通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$

(2) 前 n 项的和 $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

2. 等比数列 设首项为 a_1 , 公比为 r , 则有

$$a_1, a_1r, a_1r^2, \dots, a_1r^{n-1}, \dots$$

(1) 通项公式 $a_n = a_1r^{n-1}$

(2) 前 n 项的和 $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$

$$S_n = \frac{a_1 - a_nr}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

3. 其他数列前 n 项的和

(1) $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^n (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

(3) $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

* 数列的和式叫级数, 如

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

就是一个级数。

$$(4) \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = \left[\sum_{k=1}^n k \right]^2$$

$$(5) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

十一、排列组合和二项式定理

1. 选排列 m 个元素中取 n 个的排列种数

$$A_m^n = m(m-1)(m-2) \cdots [m-(n-1)] = \frac{m!}{(m-n)!}$$

2. 全排列 m 个元素的排列种数

$$\begin{aligned} P_n = A_m^m &= m(m-1)(m-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-2)(m-1)m = m! \end{aligned}$$

3. 组合 m 个元素中取 n 个的组合种数

$$\begin{aligned} C_m^n &= \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2) \cdots [m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \\ &= \frac{m!}{(m-n)! n!} \end{aligned}$$

4. 组合的性质 $C_m^n = C_m^{m-n}$, $C_{m+1}^n = C_m^{n-1} + C_m^n$

5. 二项式定理

$$\begin{aligned} (1) (x+a)^n &= x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \cdots + C_n^k a^k x^{n-k} \\ &\quad + \cdots + C_n^{n-1} a^{n-1} x + a^n \\ &= x^n + n a x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} a^2 x^{n-2} + \cdots \\ &\quad + \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} a^k x^{n-k} \\ &\quad + \cdots + n a^{n-1} x + a^n \end{aligned}$$

通项公式 第 $k+1$ 项 $T_{k+1} = C_n^k a^k x^{n-k}$