高等学校教材

复变函数论

（第二版）

钟玉泉 编

高等教育出版社

高等学校教材

复变函数论

（第二版）

钟玉泉 编

高等教育出版社

〔京〕 112号

高等学校教材

复变函数论

（第 二 版）

钟 玉 泉

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
天津新华印刷四厂印装

*

开本850×1168 1/32 印张12 字数290 000
1979年8月第1版 1988年5月第2版
1992年4月第6次印刷
印数 75 021—90 041
ISBN 7-04-000984-6/O·548
定价 3.95元

第二版 序

本书自1979年出版以来已重印了八次，采用它作教材的学校，除一些综合大学、师范院校外，还有一些理工院校的应用数学专业、计算专业、师资班和研究生班等．许多教师和读者来信表示关切和鼓励，并对书中存在的不妥和错误之处予以指正，在此特向他们表示感谢．

这次修订着眼于进一步提高质量，更加适应多数学校的教学需要，保留第一版阐述细致，便于自学的特点，对已经发现的错误和不妥之处，予以改正．除此之外，第二版与第一版的主要区别可概括如下：

1．将第二章§2解析函数与调和函数的关系后移至第三章，这样既可相对减轻第二章因讨论多值函数所引起的内容偏重，又可避免提前引用第三章中“解析函数的无穷可微性”．

2．将保形变换这一章的前四节编成第七章列在解析开拓之前，把剩下的第5节对称原理及多角形区域的保形变换纳入解析开拓这一章，避免了原来将对称原理切成两段，分属两章．

3．将席瓦尔兹引理从第八章提前到第五章，放在可去奇点之后，这样既可使它与第四章末的最大模原理靠近，又可让读者早些熟悉、掌握函数论中这两个重要的有关联的定理．

4．含点∞的区域上的柯西积分定理与柯西积分公式，原在第三章习题中，现后移至第五章习题中．因为这时已介绍了函数在点∞解析的意义，读者就可以借助函数在点∞去心邻域内的罗朗展式简捷地证明它们．

5．为了第九章解单位圆内狄利克莱问题的需要，这一版在第

三章§3末添了一小段柯西型积分，并加上*号．另外，由于综合大学数学专业复变函数教学大纲中列有单值性定理，这次也补写了一段，列入解析开拓这一章．

6．出于教学方法上的考虑，以这几年的教学实践为基础，我改写了第二章初等多值函数以及第六章应用多值函数的积分，目的在于使读者更加易于接受，使多值函数这一教学难点能有所突破．至于其他改写之处，各章都有，就不在这里一一道及了．

7．考虑到不同层次的学校与不同程度的学生在学习上的多种需要，我以这几年的教学实践为基础，对原有习题作了些调整之后将其编入各章习题(一)；另外，又适当慎选了一些较难的习题及与之相应的例题．新添的题目，将其编入各章习题(二)．经多次试用，它们虽较难些，但仍是紧扣教材的，有助于培养与增强学生的能力，学生可以根据自己的情况适当选作．

8．根据综合大学数学专业复变函数教学大纲，在这一版中，将解析函数对平面场的应用及多角形区域的保形变换公式这些节都加上*号，并对第一版中排小字的内容全都改排大字，除柯西积分定理的古莎证明外，其余改排大字的部分都加上*号．其他院校和其他专业，在使用本教材时，可根据各自的教学大纲决定取舍．

9．这一版删去了第一版中的附录，整函数与亚纯函数近代理论简介，因为国内已有这方面的专著出版了．①

根据我的教学实践，教师使用本教材不必全讲，只需按教学大纲要求控制各章讲授学时和讲授内容，讲清楚基本理论、基本方法、重点和难点，其余还需要学生掌握的内容和例题就指定留给学生自学．这对于开发学生智力，培养学生能力是大有裨益

① 杨 乐著，值分布论及其新研究，科学出版社，1982．
庄圻泰著，亚纯函数的奇异方向，科学出版社，1982．
张广厚著，整函数和亚纯函数理论，科学出版社，1986

的.

加*号的内容，自修的读者可以先不读它.

编　者

1987 年元旦

第一版 序

本书是根据1977年理科数学教材会议上制订的复变函数教材编写大纲，在历年主讲该课使用的自编讲义基础上改编成的．全书系统地介绍了单复变函数的基本理论和基本方法．

考虑到复变函数论是数学专业的一门重要基础课，又是数学分析的后继课，在编写本书时，注意了下列几点：

1．对与数学分析中平行的概念，如极限、连续、微分等，既指出其相似之处，更强调其不同之点，以免初学者疏忽．

2．对复变函数论中的基本定理和重要定理，如柯西积分定理和关于本性奇点的维尔斯特拉斯定理等，从叙述、证明到推广，均注意了科学性和严密性．这不仅反映了复变函数理论本身的系统性和严谨性，同时也可藉以锻炼读者思考问题和逻辑推理的能力．

3．对多值解析函数这个教学上的难点，为使读者较易接受，本书把它分散在第二章、第六章及第七章内．并在第二章内，把求根式函数$\sqrt[n]{z}$的单值解析分支的方法写得较细，这样做或许能使读者举一反三．

4．对解析函数在流体力学、机翼理论及电学等方面的应用，本书作了简明的介绍，藉以使读者了解复变函数论方法在解决实际问题上的重要性．

5．配备了大量的例题和习题，习题大都附有答案或提示，以供教师选用，也便于读者自学．

6．因限于篇幅或工具知识而不能给出证明的定理，大都指出参考资料．用小字排印的部分，对初学者可不作要求．

附录中简单介绍了我国青年数学家杨乐、张广厚的出色工作，以适应有些缺乏这方面资料的读者的要求。

使用本书作教材，大体可按6、10、8、8、8、10、6、12、4的顺序来分配各章讲授学时。如讲授学时少于72学时，教师可斟酌删去一些次要及较深部分的内容。例如，可删去克利斯脱弗-席瓦尔兹公式及最末一章等。

本书由武汉大学路见可教授主审。武汉大学、北京大学、南开大学、吉林大学、南京大学、上海师范大学、西南师范学院、四川师范学院、四川大学的同志参加了审查。他们提出了许多宝贵的意见，在此表示衷心感谢。特别是路见可教授不惮其烦，为编者复审修改了全部稿件，使原稿得到了很大改进，编者对他的这种负责精神表示敬佩和学习。

本书初稿曾经四川大学蒲保明教授和周纪溥、张茂孝两同志审阅，也在此一并致谢。

但限于编者水平，谬误之处仍然难免，敬请读者提出来批评指正。

编者于四川大学数学系

1978.9.

目　　录

引　言

我们知道，在解实系数一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$$

时，如果判别式 $b^2-4ac<0$，就会遇到负数开平方的问题．最简单的一个例子，是在解方程

$$x^2+1=0$$

时，就会遇到 -1 开平方的问题．

十六世纪中叶，意大利卡尔丹(Cardan，1545)在解三次方程时，首先产生了负数开平方的思想．他把 40 看作 $5+\sqrt{-15}$ 与 $5-\sqrt{-15}$ 的乘积，然而这只不过是一种纯形式的表示而已．当时，谁也说不上这样表示究竟有什么好处．

为了使负数开平方有意义，也就是要使上述这类方程有解，我们需要再一次扩大数系，于是，就引进了虚数，使实数域扩大到复数域．但最初，由于对复数的有关概念及性质了解得不清楚，用它们进行计算又得到一些矛盾，因而，长期以来，人们把复数看作不能接受的“虚数”．直到十七世纪和十八世纪，随着微积分的发明与发展，情况才逐渐有了改变．另外的原因，是由于这个时期复数有了几何的解释，并把它与平面向量对应起来解决实际问题的缘故．

关于复数理论最系统的叙述，是由瑞士数学家欧拉(Euler)作出的．他在 1777 年系统地建立了复数理论，发现了复指数函数和三角函数间的关系，创立了复变函数论的一些基本定理，并开始把它们用到水力学和地图制图学上．用符号“i”作为虚数的单位，也是他首创的．此后，复数才被人们广泛承认和使用．

在复数域内考虑问题往往比较方便．例如，一元 n 次方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0(a_0\neq0),$$

其中系数 a_0、a_1、$\cdots$、a_n 都是复数，在复数域内恒有解．这就是著名的代数学基本定理，它用复变函数理论来证明，是非常简洁的．又如，在实数域内负数的对数无意义，而在复数域内，我们就可以定义负数的对数．

在十九世纪，复变函数的理论经过法国数学家柯西(Cauchy)、德国数学家黎曼(Riemann)和维尔斯特拉斯(Weierstrass)的巨大努力，已经形成了非常系统的理论，并且深刻地渗入到代数学、解析数论、微分方程、概率统计、计算数学和拓扑学等数学分支；同时，它在热力学、流体力学和电学等方面也有很多的应用．

二十世纪以来，复变函数已被广泛地应用在理论物理、弹性理论和天体力学等方面，与数学中其它分支的联系也日益密切．致使经典的复变函数理论，如整函数与亚纯函数理论、解析函数的边值问题等有了新的发展和应用．并且，还开辟了一些新的分支，如复变函数逼近论、黎曼曲面、单叶解析函数论、多复变函数论、广义解析函数论和拟保形变换等．另外，在种种抽象空间的理论中，复变函数还常常为我们提供新思想的模型．

复变函数研究的中心对象是所谓解析函数，因此，复变函数论又称为解析函数论，简称函数论．

复变函数是我国数学工作者从事研究最早也最有成效的数学分支之一．我国老一辈的数学家在单复变函数及多复变函数方面做过许多重要的工作，不少成果均已达到当时的国际水平．而今，在他们的热忱帮助下，我国许多中青年数学工作者，正在健康成长，不少人已在数学的各个领域中做出了许多优异的成绩．

第一章　复数与复变函数

复变函数就是自变量为复数的函数．我们研究的主要对象，是在某种意义下可导的复变函数，通常称为解析函数．为建立这种解析函数的理论基础，在这一章中，我们首先引入复数域与复平面的概念．其次引入复平面上的点集、区域、约当曲线以及复变函数的极限与连续等概念．

§1．复　　数

1．复数域　形如

$$z=x+iy \text{ 或 } z=x+yi$$

的数，称为复数，其中 x 和 y 是任意的实数，i 合于 $i^2=-1$，称为虚单位．实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部，常记为：

$$x=\mathrm{Re}z,\quad y=\mathrm{Im}z.$$

复数 $z_1=x_1+iy_1$ 及 $z_2=x_2+iy_2$ 相等，是指它们的实部与实部相等，虚部与虚部相等，即

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2$$

必须且只须

$$x_1=x_2,\quad y_1=y_2.$$

虚部为零的复数就可看作实数，即 $x+i\cdot 0=x$；因此，全体实数是全体复数的一部分．特别，$0+i\cdot 0=0$．

虚部不为零的复数称为虚数；实部为零且虚部不为零的复数称为纯虚数．

复数 $x+iy$ 和 $x-iy$ 称为互为共轭复数，即 $x+iy$ 是 $x-iy$ 的共轭复数，或 $x-iy$ 是 $x+iy$ 的共轭复数．复数 z 的共轭复数常

记为 $\bar{z}$. 于是

$$x-iy=\overline{x+iy}.$$

对于这样定义的复数. 我们必须规定其运算方法. 由于实数是复数的特例,规定复数运算的一个基本要求是:复数运算的法则施行于实数特例时,能够和实数运算的结果相符合,同时也要求复数运算能够满足实数运算的一般定律.

复数的加(减)法可按实部与实部相加(减),虚部与虚部相加(减). 即复数 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$ 相加(减)的法则是:

$$z_1 \pm z_2=(x_1 \pm x_2)+i(y_1 \pm y_2),$$

结果仍是复数. 我们称复数 z_1+z_2 是复数 z_1 与 z_2 的和,称复数 z_1-z_2 是复数 z_1 与 z_2 的差.

复数的加法遵守交换律与结合律,而且减法是加法的逆运算,这些都很容易验证.

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 及 $z_2=x_2+iy_2$ 相乘,可按多项式乘法法则进行,只须将结果中的 i^2 换成 -1,即

$$z_1 z_2=(x_1 x_2-y_1 y_2)+i(x_1 y_2+y_1 x_2),$$

结果仍是复数,我们称它为 z_1 与 z_2 的积.

也易验证,复数的乘法遵守交换律与结合律,且遵守乘法对于加法的分配律.

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 及 $z_2=x_2+iy_2$ 相除(除数 $\neq 0$)时,可先把它写成分式的形式,然后分子分母同乘以分母的共轭复数,再进行简化,即

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1 x_2+y_1 y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{y_1 x_2-x_1 y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2 \neq 0),$$

结果仍是复数,我们称它为 z_1 与 z_2 的商. 这里除法是乘法的逆运算.

全体复数并引进上述运算后就称为复数域. 在复数域内,我们熟知的一切代数恒等式,如象