

数学家像画家和诗人一样，是模式制造家。
G.H.哈代

数学的艺术

欧阳绛 著

农村读物出版社

数学的艺术

欧阳绛 著

JY1/30/19



农村读物出版社

数学的艺术

欧阳绛 著

* * *

责任编辑 朱 雷

农村读物出版社出版 (北京市朝阳区农展馆北路2号 100026)
新华书店北京发行所发行 河北省三河永和印刷有限公司印刷

787mm×1092mm32 开本 8.5 印张 180 千字

1997 年 8 月第 1 版 1997 年 8 月河北第 1 次印刷

印数 1-6 000 册 定价 12.50 元

ISBN 7-5048-2777-0/G·833

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

作者简介

欧阳绛：山西大学科技与社会研究所副教授。

1950年毕业于北京大学数学系。

1956~1957年，在中国科学院力学所工作，在钱学森和许志国先生指导下从事运筹学的研究。

1980年以后，在山西大学讲授和研究世界数学史。

著作和译著有：

(1)《数学的发现》(第一卷)，译自英文版，科学出版社，1982。

(2)《数学史概论》，译自英文版（原著是H·伊夫斯1976年第四版），山西人民出版社，1986。

(3)《数学史》，译自英文版，科学普及出版社，1987。

(4)《思维效率》，福建教育出版社，1990。

(5)《数学史上的里程碑》，与张鸿林合译自英文版，北京科学技术出版社，1990。

(6)《数学方法溯源》，江苏教育出版社，1991。

(7)《科学研究纲领方法论》，与范建年合译自英文版，商务印书馆，1992。

(8)《数学大观》(第一卷)，台北晓园出版

社，1993。

(9)《数学史概论》，译自英文版（原著是H·伊夫斯1990年第六版），山西经济出版社，1993。

(10)《数学轶事》，台北九章出版社，即将出版。

(11)《线性规划概论》，与林自新合译自英文版，科学出版社，1959。

(12)《生产组织与计划中的数学方法》，译自俄文版，科学出版社，1959。

注：(11)、(12)两本书，因故未署名。

此外，在思维科学、学习科学、数学教育、科学学等方面发表论文50余篇。

通信地址：山西省太原市山西大学28楼18号，邮编：030006。

序

数学是什么？在数学这块园地上耕耘，能给我们什么帮助？这是个耐人寻味的问题。几千年来，许多学者给出了自己的答案。

古希腊的毕氏学派就认为：数学和音乐能够净化人的灵魂。19世纪数学家J. J. 西尔维斯特 (J. J. Sylvester, 1814~1897) 更加明确地指出：“置身于数学领域中不断地探索 and 追求，能把人类的思维活动升华到纯净而和谐的境界。”当代数理逻辑学家王浩先生也说，数学具有纯净的美。

J. 阿巴思诺特说：“数学知识使思维增加活力，使之摆脱偏见、轻信和迷信的束缚。”

W. E. 羌塞劳尔说：“正如文学诱导人们的情感一样，数学则启发人们的想像与推理。”

数学

能令你的思维纯净、和谐，
会为你的思维增添活力。
它赋予你想像的翅膀，
为你开通推理的渠道。

关于数学与音乐的关系，J. J. 西尔维斯特说得好：“音乐不就是感觉中的数学，而数学不就是推理中的音乐吗？两者的灵魂是完全一致的！因此，音乐家可以感觉到数学，而数学家可以想像到音乐。虽说音乐是梦幻，而数学是现实，但

当人类智慧升华到完美的境界时，音乐和数学就互相渗透而融为一体了。”把数学和绘画做一对比，更有启发性。P. D. 拉克斯说：“把数学当作一门艺术来看时最近似于绘画，二者在两种目标间维持一种张力。在绘画中，既要表达可见世界的形状与色彩，又要在一块二维的画布上塑造出赏心悦目的图案；在数学中，既要研究自然的规律，又要编织出优美的演绎模式。最成功的创造必然在这两种倾向之间维持着最大的张力；最不令人满意的是那些只在某一方面呈支配之势的作品，如风俗画或纯粹的抽象画。”可以说，数学不仅是思维的艺术，而且本身就是一种艺术。

按照柏拉图的意见，数学不仅对于理财和搞工程技术的人是需要的，对于统治者也是需要的，因为他们需要了解自己生活于其中的多变的现象世界；而对多变的现象世界的认识决定于对不变的理念世界的理解，数学就是研究理念世界的不变关系的。I. 拿破仑也说：“数学的进步和完美与国家的繁荣和富强是紧密相连的。”一位是学者，一位是军事家，真乃是异曲同工。

J. F. 赫巴特说得更加透彻，他指出：“数学是我们时代压倒一切的科学，它的领域日益扩大，虽然是悄然无声地扩大。谁要是不用数学来为自己服务，有朝一日就会发现别人用数学来同自己对抗。”

本书旨在于把数学作为思维的艺术的各个侧面展现在读者的面前。

欧阳绛

1996年6月于山西大学

许多艺术能够美化人们的心灵，但却没有哪一种艺术能比数学更有成效地去美化和修饰人们的心灵。

——H. 比林斯利

目 录

第一部分 开始语	1
1. 关于数学	3
1.1 数学与思维有不解之缘	3
1.2 历史是最好的启发式	4
1.3 数学是怎样生成和发展的	5
1.4 数学的趣味性	6
1.5 数学是研究模式的学问	7
第二部分 数学，作为锻炼思维的手段	9
2. 数学与思维	11
2.1 逻辑思维	11
2.2 形象思维	17
2.3 直觉思维	20
2.4 小结	22
3. 像数学家那样思维	24
3.1 像数学家那样学习和思维	24
3.2 思维方式和思维方法	25
3.3 毕达哥拉斯的数学思想	26
3.4 莱布尼茨的数学思想	29
3.5 克莱因的数学思想	32
3.6 数学家们的思路	36
4. 解题思路	40
4.1 引言	40

4.2	双轨迹模式	41
4.3	笛卡儿法则	44
4.4	笛卡儿模式	47
4.5	教学与学习	49
第三部分 历史是最好的启发式		51
5.	数学思想史	53
5.1	数学与经验	53
5.2	到数学史中去探寻	57
5.3	数学思想史	58
5.4	数学思想史的分期	59
5.5	数学史给我们的启示	60
6.	几何学发展的三阶段	61
6.1	第一阶段：无意识的几何学	61
6.2	第二阶段：科学的（或者实验的、经验的、归纳的） 几何学	62
6.3	第三阶段：论证的（或者实际的、有系统的）几何学	65
6.4	希腊的奥秘	69
6.5	“个体发育再现系统发育”法则	71
7.	三角学	73
7.1	历史概述	73
7.2	希帕克的天文学	74
7.3	梅内劳斯的球面三角学	75
7.4	托勒密的弦表	79
7.5	托勒密之后的发展	81
8.	对数	85
8.1	耐普尔对数	85
8.2	一段趣事	87
8.3	对数发明的思路	88
8.4	造对数表的方法	92

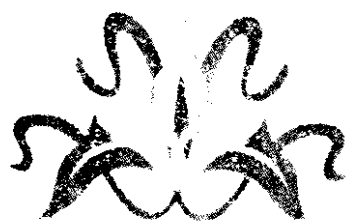
9. 解析几何	94
9.1 追本溯源	94
9.2 笛卡儿	95
9.3 费尔马	100
9.4 简短评述	102
10. 微积分学	104
10.1 思路和渊源	104
10.2 积分概念的三个支柱	105
10.3 问题引路	108
10.4 近在咫尺	111
10.5 牛顿和莱布尼茨的工作	112
10.6 质疑	120
10.7 严谨化	121
11. 几何学的解放	124
11.1 渊源与序幕	124
11.2 罗巴切夫斯基几何	127
11.3 黎曼几何	131
11.4 物理学与几何学	132
12. 代数学的解放	133
12.1 四元数、向量、矩阵	133
12.2 群论	139
12.3 开闸之后	152
第四部分 数学，多么有趣	153
13. 数学与猜想	155
13.1 猜想的重要性	155
13.2 猜想的慢镜头	158
13.3 哥德巴赫猜想	163
13.4 四色猜想	165
13.5 数学猜想是怎样发现的	167

14. 数学证明	169
14.1 从直观证明到逻辑证明	169
14.2 亚里士多德和墨子	171
14.3 公理学和证明论	173
14.4 提高证明能力的有效途径	175
14.5 证明的功用	176
14.6 反证法	181
14.7 存在性证明	183
14.8 不可能性证明	185
15. 数学游戏	187
15.1 从游戏到数学游戏	187
15.2 麦比乌斯带	188
15.3 从 142857 谈起	192
15.4 博弈论	194
15.5 一段轶事	197
16. 数学问题	199
16.1 科学来源于问题	199
16.2 历史上的著名问题	200
16.3 论数学问题	203
17. 数学方法	207
17.1 作为方法的科学和研究科学的方法	207
17.2 庖丁解牛新解	208
17.3 从问题到方法	209
17.4 研究数学的方法	210
17.5 数学方法的本质	213
17.6 探寻数学方法的方法	215
18. 数学怎样成为可应用的	217
18.1 “渗透”与“被渗透”	217
18.2 测量地球的大小	219

18.3	在物理学中的应用	220
18.4	在化学中的应用	221
18.5	在生物学中的应用	223
19.	数学模型	226
19.1	从模式谈起	226
19.2	数学模型	227
19.3	斐波纳契序列	229
19.4	由运输问题引出的数学模式	239
19.5	光合作用的数学模型	241
第五部分 结束语		245
20.	数学究竟是什么	247
20.1	语言、思维、逻辑	247
20.2	猜想与证明	248
20.3	历史是最好的启发式	249
20.4	数学与艺术	249
20.5	数学的趣味性	249
20.6	数学是研究模式的学问	250
20.7	一种文化体系	251
20.8	数学之树	252
20.9	数学与文明	252
参考书目		254
后记		256

第一部分

开始语



数学——科学不可动摇的
基石，促进人类事业进步的丰
富源泉。

——I. 巴罗

1. 关于数学

1.1 数学与思维有不解之缘

数学从它诞生那天起，就与思维结下了不解之缘。

创造数学，构造数学，学习数学，研究数学，都是思维的过程，而且是较为纯净的思维过程。就因为如此，学习数学是最好的思维训练。

数学与思维有千丝万缕的联系。认识并且掌握这种联系，才能在数学教育的过程中，对学生进行好思维训练。C. J. 凯泽说得好：“数学不是算账和计数的技术，正如建筑学不是造

砖伐木的技术，绘画不是调色的技术，地质学不是敲碎岩石的技术，解剖学不是屠宰的技术一样。”把数学单纯地看做一种技术的教师，是谈不上什么对学生进行思维训练的！

让学生学会像数学家那样思维，是数学教育所要达到的目的之一。阿基米得利用平衡法求球体体积公式的基本思想是：为了找出所求的面积或体积，可把它分割成很多窄的平行条形或薄而平行的片体，并且（在思想上）把这些片体挂在杠杆的一端，使它与容积和重心为已知的一个图形保持平衡。欧拉借助于纯形式的程序，获得大量奇妙的关系式，例如： $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ ——这些思想是何等地美妙和有效啊！

波利亚（G. Polya）在《数学的发现》一书中，把解题思路的慢镜头展现在读者面前，更为我们作出了范例。

当母亲教自己的孩子走路时，心灵上就在为他（她）编织着一幅美丽的前景；当教师为自己的学生编题时，心灵上就在为他（她）编织一条通向科学高峰的阶梯。

如果能把自己小时候掏麻雀窝的顽皮样子摄入镜头，那一定能给自己许多启示；如果能把自己解某些典型题的思路重复一遍，它必定能为今后的思考增添力量。笛卡儿说得好：走过两遍的路就是方法。

1.2 历史是最好的启发式

历史从哪里开始，思维就应该从哪里开始。历史上的东西都是曾经成为现实的东西。它成为现实，总有它成为现实的理由。正因为如此，要探讨数学是什么，必须从数学史着手。

数学史，也就是数学的脉络。只有掌握了数学的脉络，才