数 学 分 析

上 册

范秋君 沈锡文
刘 芸 傅 珉 编著

北京师范学院出版社

数学分析

上册

范秋君　沈锡文
刘　芸　傅　珉　编著

*

北京师范学院出版社出版发行
（北京阜成门外花园村）
全国新华书店经销
北京昌平兴华印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32　印张：12　字数：263千
1991年4月北京第1版　1991年4月北京第1次印刷
印数：0,001—3,000册
ISBN 7-81014-502-9/O·6
定价：4.80 元

前 言

本书是在1985年为我系编写的数学分析讲义的基础上，经几次试用，反复修改而成的．该讲义是按部颁高等师范院校《数学分析》教学大纲的要求结合高师的实际情况编写的．本书可作为高等师范院校数学系本科或专科的《数学分析》教材．

本书分上、下两册．上册内容包括实数理论、极限理论、一元微积分；下册内容包括级数理论，广义积分、含参变量的积分、多元微积分．讲授本书大约需要200学时左右．

本书在内容顺序的安排上与目前国内通行的《数学分析》教材相比，作了较大的变动．主要是把极限理论与实数理论分成两部分，在第一章给出实数连续性公理，并用此公理较容易地推证出确界存在定理，然后应用这定理严格地证明了闭区间上连续函数的性质，而其它刻画实数连续性的定理放在第九章再逐步引出．在第三章只讲函数极限理论，而数列极限理论放在级数前进行系统介绍．我们认为这样安排一方面可以缩短讲授极限与实数理论所用的时间，使学生能及早地接触到数学分析的主体——微积分．另一方面，使学生在具有一定微积分的基本知识基础上学习数列极限与实数理论，易于理解新知识．同时在数列的内容之后紧接着就引进级数的内容，这样作可使学生学到的知识马上得以应用，从而起到巩固并深化所学知识的作用．

在内容处理上，本书对微积分基本理论等部分的具体内容采取了不同的处理方法，例如在定积分一章，我们没有采用一般教材常用的以黎曼和的极限为基础的理论，而是利用确界知识通过上、下限积分，达布定理等较快地得到定积分的两个等价定义，从而建立起积分存在性理论，用较简单的一个可积的充要条件论证了可积函数类与定积分的部分性质，使可积性理论处理得比较简练．又如把台劳公式归入第十二章与台劳级数紧密联系起来，这样处理不仅在学习上有其方便之处，也有益于理解台劳公式与台劳级数的实质．对内容的种种处理，经过几届试用，得到较好的教学效果．

结合中学数学教学，本书上册的附录中介绍了实数的定义及其性质，刻画实数连续性的各定理之间的等价性和无理指数幂定义．可供读者参阅．

本书将习题作为教材不可分割的一部分，每章都配有一定数量的习题，其中包括少量具有一定难度的题目（加有*号），书后附有习题答案或简单提示．

我们特别要感谢赵慈庚教授、杨守廉教授和邝荣雨副教授，他们曾十分仔细地审阅过原讲义，并提出了许多具体而又十分宝贵的意见．周祖逵、王万良及我系分析教研室其他同志在和我们共同使用原讲义过程中，对原讲义的修改与补充提出过很好的建议．周祖逵副教授还对原稿中第十一至第十三章作了具体的修改，在此对他们表示感谢．

由于我们水平有限，虽经几次修改，一定还存在不少缺点和不足，殷切期望读者予以批评指正．

编者

1990年9月于北京师范学院

TJ1/229/107

目　　录

安东

柯西 - Chinese

第一章　引　　论

数学分析是数学的一个重要分支，它为各式各样的运动现象提供了进行定量研究的方法．数学分析是一个与极限概念相联系的数学分支，它包含函数连续性、微分学、积分学和无穷级数的收敛性等内容．作为这些内容的基础是“数”这一基本概念，我们并不想定义这一抽象概念，而是把中学所学过的有关数的概念作为已知，以求尽快研究数学分析的主要内容．

§1　实　数　集

1.1　有理数集

全体自然数构成的集合叫自然数集，记作$\mathbf{N}$．自然数集、自然数的相反数之集与$\{0\}$的并集，称为整数集，记作$\mathbf{Z}$．即

$$\mathbf{Z}=\mathbf{N}\cup-\mathbf{N}\cup\{0\}$$

其中
$$-\mathbf{N}=\{-n\mid n\in\mathbf{N}\}$$

显然，
$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$$

形如$\frac{p}{q}$（$p,q\in\mathbf{Z}$且$q\neq0$）的数称为有理数．全体有理数的集合称为有理数集，记作$\mathbf{Q}$．即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\mid p,\ q\in\mathbf{Z}\text{且}q\neq0\right\}$$

显然，$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$. 由于分数可以化成有限小数或无限循环小数，因此，也可以说，有理数是有限小数与无限循环小数的统称.

有理数集对四则运算是封闭的. 此外，有理数集还具有

1. **有序性** 任何两个不同的有理数r_1，$r_2(r_1\neq r_2)$，必有$r_1<r_2$或$r_1>r_2$.

2. **稠密性** 任何两个不同的有理数r_1，r_2之间，总存在有理数$r\left(\text{例如 } r=\frac{1}{2}(r_1+r_2)\right)$. 从而可知，任何两个有理数之间都存在无穷多个有理数.

若用数轴上到原点距离为某一正有理数r的点表示有理数r与$-r$(该点在原点右侧表示r，在原点左侧表示$-r$)，那么，全体有理数都可用数轴上的点表示出来，我们把这样的点称为有理点. 有理点并没有充满数轴，也就是说，数轴上的点并非都是有理点. 例如，在原点右侧，到原点距离等于边长为1的正方形的对角线长的点A（图1-1），就不是有理点. 否则该点所表示的有理数必可写成分数$\frac{p}{q}$（p，q为互质的正整数)，且$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$，即$p^2=2q^2$，由此可知$p$是偶数，设$p=2k$，则有$q^2=2k^2$，从而$q$也是偶数，这与$p$，$q$互质相矛盾，所以不存在平方等于2的有理数，即点$A$不是有理点. 这说明有理数集在数轴上的分布是有“空隙”的.

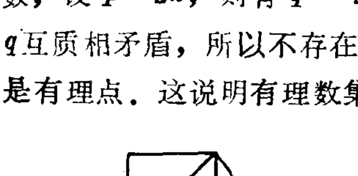

图 1-1

令数轴上每个非有理点都表示一个新数——无理数，并把这样的点叫做无理点. 有理点和无理点的全体布满整个数

轴.

1.2 实数集

有理数集与无理数集的并称为实数集，记作$\mathbf{R}$.

显然，$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

实数集不仅对四则运算封闭，而且还有

1. 有序性 (1) 任意两个实数α，β必满足且仅满足下面三种关系之一：

$$\alpha>\beta,\ \alpha=\beta,\ \alpha<\beta$$

(2) 任意三个实数α,β,γ，若$\alpha>\beta$且$\beta>\gamma$，则$\alpha>\gamma$.

2. 稠密性 任何两个不同的实数α，β，必有有理数r介于α与β之间.

此外，实数集还有有理数集不具备的性质：

3. 完备（连续）性 这一性质在直观上就是：实数集与数轴上的一切点所成的集合之间可以建立一一对应. 关于这一性质有各种不同形式的确切描述，我们这里用下面形式的公理给出：

实数的完备（连续）公理

若X与Y是$\mathbf{R}$的非空子集，且具有性质：对于任何$x\in X$，$y\in Y$，有$x\leqslant y$，那么，存在$c\in\mathbf{R}$，使对任何$x\in X$，$y\in Y$有$x\leqslant c\leqslant y$.

在数学上，为强调实数连续性，常把实数集称为“实数连续统”.

由于实数与数轴上的点之间可以建立一一对应，我们常常对实数与其在数轴上所对应的点，不予区分.

1.3 区间和邻域

在数学分析中常常要用到实数集$\mathbf{R}$的一些特殊形式的子

集——区间，其定义如下：

定义1 设a，$b\in\mathbf{R}$，

$(a, b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x<b\}$——开区间；

$[a, b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x\leqslant b\}$——闭区间；

$(a, b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x\leqslant b\}$——左开右闭区间；

$[a, b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x<b\}$——左闭右开区间.

左开右闭区间和左闭右开区间，统称为半开（闭）区间.

$(a, +\infty)=\{x\in\mathbf{R}\mid x>a\}$

$[a, +\infty)=\{x\in\mathbf{R}\mid x\geqslant a\}$

$(-\infty, b)=\{x\in\mathbf{R}\mid x<b\}$

$(-\infty, b]=\{x\in\mathbf{R}\mid x\leqslant b\}$

$(-\infty, +\infty)=\mathbf{R}$

上面之所列，统称为无穷区间.

定义2 设$x_0\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，开区间

$$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)=\{x\in\mathbf{R}\mid |x-x_0|<\delta\}$$

称为点x_0的δ邻域，记作$U_\delta(x_0)$（或$V_\delta(x_0)$），x_0称为邻域的中心，δ称为邻域的半径.

数集

$U_\delta(x_0)-\{x_0\}=\{x\in\mathbf{R}\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$

称为点x_0的去心邻域，记作$\mathring{U}_\delta(x_0)$.

最后我们在这里介绍几个常用的逻辑符号：

“$\forall$”表示“对任意的……”，“对每一个……”；

“$\exists$”表示“存在”，“找到”；

“$\Rightarrow$”表示“蕴含”，“若……，则……”；

“$\Longleftrightarrow$”表示“充分必要”，“等价”；

"$\wedge$" 表示 "与", "并且";
"$\vee$" 表示 "或", "或者".

§2 有界数集及其上、下确界

今后在一般情况下，我们称实数集的非空子集为**数集**.

2.1 有界数集

定义1 给定数集E,若存在实数B，使E中每一实数x，都满足不等式$x\leqslant B$，则称数集E有上界，并称B是数集E的一个上界．用逻辑符号可表述为

$$\exists B\in \mathbf{R}\,\forall x(x\in E\Rightarrow x\leqslant B)$$

定义2 若存在实数A，使数集E中每一实数x，都满足不等式$x\geqslant A$，则称数集E有下界，并称A是数集E的一个下界．即

$$\exists A\in \mathbf{R}\,\forall x(x\in E\Rightarrow x\geqslant A)$$

定义3 若数集E既有上界又有下界，则称E为有界集，即

$$\exists B\in \mathbf{R}\,\exists A\in \mathbf{R}\,\forall x(x\in E\Rightarrow A\leqslant x\leqslant B)$$

定理1 数集E有界的充分必要条件是存在正数M，使得E中任何实数x，都有

$$|x|\leqslant M$$

即
$$\exists M>0\,\forall x(x\in E\Rightarrow |x|\leqslant M)$$

证明 必要性 已知E有界，即

$$\exists B\in \mathbf{R}\,\exists A\in \mathbf{R}\,\forall x(x\in E\Rightarrow A\leqslant x\leqslant B)$$

取$M=\max\{|B|, |A|\}>0$，则 $\forall x\in E\Rightarrow -M\leqslant x\leqslant M$；即$|x|\leqslant M$.

充分性　已知$\exists M>0 \forall x(x\in E\Rightarrow |x|<M)$.
即

$$-M\leqslant x\leqslant M$$

所以数集E有界（其中max表示“最大”，max是maximum（最大）的缩写）. ∎

区间(a, b), $[a, b]$, $(a, b]$等都是有界集.

例1　证明任何有限集$F=\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$是有界集.

证明　任何有限个数中总有最大数与最小数. 令

$$B=\max\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$$

$$A=\min\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$$

（其中min表示“最小”，min是minimum（最小）的缩写），则有

$$A\leqslant r_i\leqslant B, \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

由定义3知F是有界集，B，A分别是F的一个上界和一个下界. ∎

定义4　若对任何实数B，在数集E中总有实数x_0，使得$x_0>B$，则称数集E无上界，即

$$\forall B\in \mathbf{R} \exists x_0(x_0\in E\wedge x_0>B)$$

若对任何实数A，在数集E中总有实数x'，使得$x'<A$，则称数集E无下界，即

$$\forall A\in \mathbf{R} \exists x'(x'\in E\wedge x'<A)$$

若数集E无上界或无下界，则称数集E为无界集.

无穷区间$(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$都是无界集，其中$(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$为无下界集，$(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$为无上界集.

例2 证明数集$E=\{x\in\mathbf{R}|\ (x=\frac{1}{t})\wedge(t>0)\}$有下界，但无上界.

证明 $\forall t>0$，有$x=\frac{1}{t}>0$，所以0是E的一个下界，故E有下界.

$\forall B>0$，$\exists t_0\in(0,\ +\infty)$，使$0<t_0<\frac{1}{B}$. 令$x_0=\frac{1}{t_0}$，则$x_0\in E$，且$x_0>B$，所以$E$无上界. ▌

2.2 数集的确界

若数M是数集E的一个上界，则凡是大于M的数都是数集E的上界. 因此任何有上界的数集必有无穷多个上界. 同理，有下界的数集必有无穷多个下界. 在这无穷多个上(下)界中，若有最小（大）数，则称它为该数集的上（下）确界.

定义5 若数β是数集E的最小上界，则称β是E的上确界，记作$\beta=\sup E$或$\beta=\sup\limits_{x\in E}\{x\}$.

定义6 若数α是数集E的最大下界，则称α是E的下确界，记作$\alpha=\inf E$或$\alpha=\inf\limits_{x\in E}\{x\}$.（这里sup是supremum（上确界）的缩写，inf是infimum（下确界）的缩写）.

改用下面形式叙述上（下）确界的定义，使用更为方便.

定义7 给定数集E，若存在$\beta\in\mathbf{R}$，使得

1) $\forall x(x\in E\Rightarrow x\leqslant\beta)$；

2) $\forall\varepsilon>0\ \exists x_0(x_0\in E\wedge x_0>\beta-\varepsilon)$. 则称$\beta$是$E$的上确界，即$\beta=\sup E$.

定义8 给定数集E，若存在$\alpha\in\mathbf{R}$，使得

1) $\forall x(x\in E\Rightarrow x\geqslant\alpha)$；

2) $\forall \varepsilon>0 \exists x'(x' \in E \wedge x'<\alpha+\varepsilon)$，则称$\alpha$是$E$的下确界，即$\alpha=\inf E$.

定义 5 与定义 7 的等价性以及定义 6 与定义8 的等价性是显然的，这一点留给读者自己证明.

由数集的上（下）确界的定义立即可以得出：

定理2 若一数集有上（下）确界，则其上（下）确界是唯一的.

例3 证明(1) 若数集E有最大数β，则E有上确界，且$\sup E=\beta$.

(2) 若数集E有最小数α，则E有下确界，且$\inf E=\alpha$.

证明 (1) 因为$\beta=\max E$，所以$\forall x(x \in E \Rightarrow x \leqslant \beta)$，$\forall \varepsilon>0$，取$x_0=\beta$，则$x_0 \in E$，且$x_0=\beta>\beta-\varepsilon$.
根据定义 7 知$\sup E=\beta$.

同理可证(2) $\inf E=\alpha$. ∎

例4 求数集$E=\left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathrm{N}\right\}$的上（下）确界，并加以证明.

证明 由初步观察得$\sup E=1$，$\inf E=0$，下面加以证明.

先证$\sup E=1$.

因为$\max E=1$，所以由例 3 知$\sup E=1$.

再证$\inf E=0$.

$\forall \frac{1}{n} \in E(n \in \mathrm{N})$，都有$\frac{1}{n}>0$，又$\forall \varepsilon>0$，必能取到$n_0 \in \mathrm{N}$，使$n_0>\frac{1}{\varepsilon}$，则

$$\frac{1}{n_0} \in E，且\frac{1}{n_0}<0+\varepsilon.$$

根据定义8知$\inf E=0$.

例5 求开区间 $(0,1)$ 的上确界，并证明之.

证明 由初步观察得 $\sup\limits_{x\in(0,1)}\{x\}=1$，下面加以证明.

$\forall x\in(0,1)$，有 $x<1$，又 $\forall\varepsilon>0$（不妨设 $\varepsilon<1$），取 $x_0=1-\dfrac{\varepsilon}{2}$，则 $0<x_0<1$，即 $x_0\in(0,1)$，且 $x_0=1-\dfrac{\varepsilon}{2}>1-\varepsilon$，根据定义7知 $\sup\limits_{x\in(0,1)}\{x\}=1$. ∎

由以上几个例题可以看到，一个数集的上（下）确界不一定属于这个数集．若一个数集的上（下）确界属于这个数集，则称它的上（下）确界是可达的.

显然，数集E的上（下）确界是可达的充分必要条件是E有最大（最小）数，而且此时$\sup E=\max E$（$\inf E=\min E$）．任何有限集的上（下）确界都是可达的.

无上（下）界数集必无上（下）确界，但为了讨论方便，当数集E无上界时，记作

$$\sup E=+\infty$$

当数集E无下界时，记作

$$\inf E=-\infty$$

2.3 确界存在定理

有界数集是否一定有确界？下面定理作了肯定的回答.

定理3（确界存在定理）

有上界数集必有上确界，有下界数集必有下确界；

再提醒一次，这里所说的“数集”均指实数集的非空子集.

证明 用实数完备（连续）公理来证明.

设X是任一有上界数集，Y是X的所有上界组成的集合，即

$$Y=\{y\in\mathbf{R}\mid \forall x\in X，有x\leqslant y\}$$

由题设知，$X\neq\phi$，$Y\neq\phi$，且$\forall x\in X$，$\forall y\in Y$，都有$x\leqslant y$，根据完备（连续）公理，必存在$c\in\mathbf{R}$，使得$\forall x\in X$，$\forall y\in Y$，有

$$x\leqslant c\leqslant y$$

因此，c是X的上界，故$c\in Y$，且c是Y的最小数，所以

$$c=\sup X.$$

同理可证，有下界数集必有下确界. ▮

例6 设E是一数集，若$\forall x\in E$，都有$x\leqslant b$（b是常数），则$\sup E\leqslant b$.

证明 由题设知b是E的一个上界，根据确界存在定理知E有上确界$\sup E$，由定义5知$\sup E$是E的最小上界，故$\sup E\leqslant b$. ▮

例7 设A，B是两个有界数集，$A\subset B$，则$\sup A\leqslant\sup B$，$\inf A\geqslant\inf B$.

证明 由题设，根据确界存在定理知数集A，B的上、下确界均存在.

因为$\forall x\in A$，有$x\in B$，所以$\forall x\in A$，有$x\leqslant\sup B$，即$\sup B$是数集A的一个上界，故有

$$\sup A\leqslant\sup B$$

同理可证，$\inf A\geqslant\inf B$. ▮

例8 设X，Y是两个数集，且$\forall x\in X$，$\forall y\in Y$，有$x\leqslant y$，则$\sup X$及$\inf Y$存在，而且

$$\sup X\leqslant\inf Y$$

证明 由题设知$\forall y\in Y$，y是X的上界，故根据确界存在定理知$\sup X$存在，且$\forall y\in Y$，有