复旦大学数学系主编

实变函数与
应用泛函分析基础

夏道行　严绍宗　编

上海科学技术出版社

实变函数与
应用泛函分析基础

复旦大学数学系　主编

夏道行　严绍宗　编

上海科学技术出版社

责任编辑　顾可敬

实变函数与应用泛函分析基础

复旦大学数学系　主编

夏道行　严绍宗　编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　江苏扬中印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 23.75　字数 631,000

1987 年7 月第 1 版　1987 年 7 月第 1 次印刷

印数 1— 5,700

统一书号：13119·1404　　定价：5.20 元

序

多年以来，我系一直在尝试着对数学专业以及计算数学、力学专业的教材进行改革．这项工作从六十年代一开始就着手进行了，在上海科学技术出版社的大力支持下，1960 年出版了一套试用教材，并在此基础上经过修订，从 1962 年到 1965 年陆续出版了《数学分析》、《常微分方程》、《概率论与数理统计》、《数学物理方程》、《实变函数与泛函分析概要》等教材，为我系教材改革提供了一些经验．当时就数学教材提出的一些问题，如理论联系实际和教学内容现代化等问题，在今天也仍然是有意义的．

1980 年，教育部颁发了部属综合性大学理科数学专业、计算数学专业的教学计划和各门课程的教学大纲．同时指出，执行教学计划和教学大纲应该体现"统一性与灵活性相结合的原则"．按照我们的体会，所谓统一性是指：教学计划和教学大纲是从总体上反映了教和学两个方面所应该达到的基本要求；而灵活性则是指在具体实施时应该从实际情况出发，在不降低基本要求的前提下，有所创新和改革．我们打算按照这一指导思想陆续编写一套教材．

要在教学计划和教学大纲的指导下编写出一套比较成熟的教材，实在不是一件轻而易举的事，它应该是一个长期努力的过程．这次编写只是作为这个过程的又一个新的开端．

数学学科与某些别的学科不同，它的基础知识相对地来说是比较成熟和稳定的．其中大量经典的内容，即使是按照现代科学技术的发展水平来看，也是必不可少的．这是一个基本的事实，是我们编写时选材的重要依据．但是我们还注意到，在各门基础课程的教材中应当防止片面追求自身的完备化，尽量根据每门课程在整个教学计划中的作用和地位以及学时的安排，作整体的考虑．使各门教材内容的深度和广度互相衔接，协调一致，既能和教学计

划中的安排相一致，又符合学生学习过程中由浅入深的认识规律.我们希望做到各门课程的教材，都能在教学计划规定的学时数内完成教学.

对某些经典的内容，我们尝试按现代数学的观点加以处理，使思想更严谨、陈述更明确简炼，并起到承上启下的作用. 在进行这种尝试的时候，力求使这些处理方法能为大多数教师所接受. 正确处理好具体和抽象、特殊和一般、实际和理论的辩证关系.

不断总结课堂教学的经验，是编好教材的前提之一，这次编写的教材都经过多次的课堂教学实践. 一般是先编成讲义，在教学过程中，检查交流，听取有关教师和学生的意见，不断改进，其目的是为了在保证教学要求的前提下，教师便于教，学生便于学. 我们将按照各门教材在教学实践中的成熟程度，陆续交付出版.

编写一套适应于四个现代化发展需要的数学教材，是一项长期而又艰巨的任务. 由于我们的水平有限，实践也还不够，教材中出现各种各样的缺点和错误在所难免，殷切期望专家和广大读者提出宝贵的意见，给予批评指正，使我们的教材编写工作，日趋成熟.

上海科学技术出版社的同志对于我们的教材建设多年来一直给予密切配合和大力支持，我们表示衷心的感谢.

复旦大学数学系

1982. 4.

编者的话

本书是作者对复旦大学数学系应用数学专业和计算数学专业讲授"实变函数论与应用泛函分析"这一课程的基础上写成的，它的原稿也曾在一些师资培训班上用过.

本书的取材除作为基础课所最必要的有关实变函数论和泛函分析的内容外，还选了一些作者认为对这些专业学生可能是有益的重要内容(在本书中作为附录，用小五号字体排出)：有的作为开阔视野；有的作为加深，提高；有的则是某个方面重要事实. 自然，在基础课所规定学时内，只能讲授本书的部分(或大部分)内容.

全书分上、下两篇. 上篇是实变函数论部分，共三章. 第一章介绍实变函数论中所必须的集、直线上点集的知识以及单调函数、有界变差函数，并不加证明地引入 Riemann-Stieltjes 积分性质作为介绍 Lebesgue-Stieltjes 积分的背景材料. 第二章介绍区间上的 Lebesgue-Stieltjes 积分以及平面上重积分和累次积分. 第三章介绍可测函数、可测集及其构造、积分和微分等，并在附录中介绍了一般集上测度和积分理论的全部结果. 本书在介绍测度、积分理论时，采用了黎斯(或丹尼尔)方法，即先建立积分理论，然后给出可测函数、可测集，这和通行的一些教本中的测度→可测函数→积分的顺序正相反. 这种讲法的特点是以初学者熟悉的极限方法为基础，避免太多运用对初学者说来并不熟悉的点集分析方法而引起的困扰，从而起到用较少的学时就能掌握"积分"这一基本分析工具的作用. 它特别适宜于对实变函数论中细致的点集分析方法要求不太高的专业和科技工作者. 对于这样的对象，只要学习第一章的大部分(例如 § 3 的第 2～4 小节就可不学)、第二章、第三章的 § 1～2 以及 § 5 的第 1、3 两小节即可. 这样做，除个别地方外，并不影响对本书下篇泛函分析中最基本内容的学习. 对于数学专业，自然，还应学习第三章中的其余内容. 在 1960～1964

年，作者就曾用上述体系向数学系的数学、计算专业(当时没有应用数学专业)讲授过，当时 Г. И. Шилов 也用这种体系(见文献[6])在莫斯科大学数学系讲授，现在西方也有不少教本采用这种方式．编者对这一体系试教的结果是满意的．

下篇是泛函分析部分，共四章．考虑到泛函分析发展的现状，它不仅是分析数学理论研究的基本工具之一，而且也是许多应用性较强的学科，甚至是工程、技术性的学科中使用的一种数学工具．为了适应不同读者的需要，所以这部分的取材的面较宽一些，以供选择．例如本书中是以赋准范线性空间(或 Fréchet 空间)作为线性泛函分析的讨论基础；加强了凸集和空间结构(属于自反性、对偶性方面)的讨论；介绍了一般的不动点定理；对 Banach 空间上的谱论中的解析方法也有所加强等，此外还用一节介绍了非线性泛函的极值问题．当然，从应用来说，理应适当介绍一点广义函数，但考虑到篇幅，特别是文献[2]中已有扼要介绍，所以本书中未予列入．这里不拟对下篇的每章内容作简介，只拟就泛函分析作为基础课的最必要的内容，按作者的理解，提供一个方案以供参考：它们应是第四章 § 1～4，§ 5 的大部分和 § 7 的第 1、2 两小节；第五章的 § 1～2，§ 4 以及 § 3 的第 1、2 两小节；第六章的 § 1～3，§ 4 的第 1～3 小节，§ 5 的第 1～4 小节以及 § 6～7；第七章的 § 1 等．

在完成本书的过程中，复旦大学数学研究所和数学系不少同志以及许多兄弟院校的有关同志都提出过不少有益的意见和建议，有的同志还为本书的出版付出了巨大的劳动，在此，编者谨表示衷心的感谢．

编　者

一九八六年九月

目　　录

上　　篇

下　篇

上　　　篇

概　述

本书上篇主要介绍实变函数论中最基础的内容. 实变函数论是十九世纪末二十世纪初形成的一门学科，它的基本内容已成为分析数学各分支的普遍基础，也是某些数学分支的基本工具. 它不仅应用广泛，而且它的观念和方法以及它在其它分支方面的应用对形成近代数学的两个重要分支——点集拓扑学和泛函分析有极为重要的影响.

实变函数论就其本意来说，仍象微积分一样是从连续性、可微性、可积性等三个方面研究一般的实变数(包括多变数)的函数. 如果说微积分中处理的都是性质"良好"的函数，那末实变函数论是讨论相当一般的函数，即主要讨论从微积分看来是性质"差"的函数. 实变函数论是微积分学的发展和提高.

关于一般函数的连续性、可微性、可积性，实变函数论不仅都具有丰富的内容，而且都有很深刻的结果，作为基础课教材的本书自然不能都加以介绍，只以分析数学各分支普遍最为需要的积分作为主要介绍对象. 考虑到人们工作中对积分这个数学工具的要求普遍提高，所以本书中介绍 Lebesgue-Stieltjes 积分. 另外，本书中介绍积分理论时是沿着积分→可测函数→可测集这条路线，而不是通常较多采用的从可测集→可测函数→积分这条路线，目的是为了使读者较快地先掌握"逐项积分"、"积分交换顺序"这些最为基本的定理. 根据过去几届和现在在应用数学和计算数学专业两届教学实践的结果，看来是能做到易懂、花时少地实现这个目的.

第一章　集，直线上点集

§1　集和集的运算

1. 集

一般地说，把在一定场合所要考察和研究的某些对象的全体称为一个集合，或简称为集，而称对象为*元素*．例如，自然数的全体是一个集，而每个自然数就是这个集中的元素．又例如$[a, b]$上连续函数全体是一个集，$[a, b]$上的每个连续函数就是这个集中的元素，但$[a, b]$上不连续的函数就不是这个集中的元素．

通常用大写字母，例如A、B、X、Y、E、F……表示集，而用小写字母，例如a、b、x、y……表示元素．

集和元素之间有如下两个基本关系：

(1) x是集A中的元素，这时称x*属于*A，记为$x\in A$；

(2) x不是集A中的元素，这时称x*不属于*A，记为$x\overline{\in} A$．

集和集之间也有如下两个最基本的关系：

(1) 如果集A中的每个元素都是集B中的元素，那末称A是B的*子集*，记为$A\subset B$，读做A(被)包含在B中，或者记为$B\supset A$，读做B包含A．

显然$A\subset A$．

如果$A\subset B$，并且B中确有元素b不属于A，那末称A是B的*真子集*，记做$A\subsetneqq B$．

(2) 如果$A\subset B$，同时有$B\subset A$，那末称A*等于*B，记做$A=B$．

显然，$A=B$意味着A、B是由相同的元素构成的集．例如，A是数集$\{1, -1\}$，B是多项式x^2-1的根的全体，显然，$A=B$．

2. 集的运算

集之间有三个基本的代数运算:和(并)、通(交)、差.

设 A、B 是两个集. 由或是属于 A 或是属于 B 的元素全体所成的集称做 A、B 的和集(又称并集),A、B 的和集记为 $A\cup B$. 由同时属于 A、B 两个集的元素全体所成的集称做 A、B 的通集(又称做交集),A、B 的通集记为 $A\cap B$. 如果 A、B 中没有同时属于 A、B 的元素,那末称 A、B 是互不相交的.

如果引入一个不含任何元素的集 $\emptyset$, 称 $\emptyset$ 是空集, 显然, A、B 互不相交的充要条件就是 $A\cap B=\emptyset$. 规定空集是任何集的子集.

和、通运算又分别称为集的加法和乘法运算. 由和、通运算的定义,这两个运算显然有如下的代数性质:

1° 和、通的幂等性

$$A\cup A=A,\ A\cap A=A;$$

2° 空集是加法的零元

$$A\cup\emptyset=A;$$

3° 和、通的交换律

$$A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A;$$

4° 和、通的结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$$

5° 和、通的分配律

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C).$$

设 A、B 是两个集,由一切属于 A 但不属于 B 的元素全体所构成的集称为 A 减 B 的差集, 简称差, 记为 $A-B$. 差集 $A-B$ 又被称为 B 相对于 A 的余集,常记为 C_AB.

特别, 如果 X 是一个集合, 并且所要讨论的集 A、B、$Y\cdots$ 都只是 X 的子集, 那末称 X 是空间. 在一个空间 X 中, 任何集 B 相对于 X 的余集 C_XB 就简称为余集,记为 B^C.

对于减法运算,显然有如下性质: