

(美) C. D. 霍兰 A. I. 利亚比斯 著

求解动态分离问题的 计算机方法

科学出版社

求解动态分离问题的 计算机方法

[美] C. D. 霍兰 A. I. 利亚比斯 著

黄朝伟 金志强 方加恩 译

宋心琦 校

科学出版社

内 容 简 介

本书把分离过程的原理、过程的模型、过程的控制及数值方法结合在一起,以描述分离过程的动态特性。全书分三部分,共十四章:第一部分介绍用两点隐合法求解分级分离问题;第二部分论述用半隐含 Runge-Kutta 法和 Gear 法求解分级分离问题;第三部分讨论连续分离过程有关问题的解。每章后有习题和工作实例等资料,以供读者进一步加深对内容的理解。

本书可供从事化工分离过程设计、研究和操作等人员使用,也可供高等院校有关专业师生参考。

C. D. Holland A. I. Liapis

COMPUTER METHODS FOR SOLVING DYNAMIC SEPARATION PROBLEMS

McGraw-Hill Book Company, 1983

求解动态分离问题的 计算机方法

[美] C. D. 霍兰 A. I. 利亚比斯 著

黄朝伟 金志强 方加恩 译

宋心琦 校

责任编辑 张英娥

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经营

*

1988年 5月第 一 版 开本: 850×1168 1/32

1988年 5月第一次印刷 印张: 16 1/8

印数: 0001—2,450 字数: 424,000

ISBN 7-03-000250-4/TQ·1

定价: 6.80 元

前 言

由于高速计算机的应用，这样的时刻即将到来：工程师将能在解决系统的非稳态问题时，就像解决稳态问题一样熟练。

本书把分离过程的原理、过程的模拟、过程的控制及数值方法结合在一起，以描述分离过程的动态特性。也就是说，本书是“集大成者”，通过应用大型实际体系清楚地阐明每个领域的特殊作用。

内容的编写顺序与可预计的数值方法的困难程度相适应。求解微分方程组和代数方程组的两点法在第一部分讲解，而多点法在第二部分讲解。一些求解偏微分方程的方法放在第三部分。每一节材料的编排也是从易到难，这样的编写顺序使那些与这方面没有接触过或接触不多的学生或现场工程师更易于接受。

书中还介绍了描述各种模型的方程式的推导方法，而且每个过程的模型都十分细心地进行推导，这样使对给定的分离过程并不熟悉的读者也能理解。

一般而言，对每个分离过程都给出了一些与常用数据相适应的，最佳的可能模型。设想模型的可靠性由实验数据及现场测试来验证。例如，蒸发器系统的模型所预示的动态特性与在 Freeport 试验厂所观察到的蒸发器系统的特性作了比较。在 Zollar 煤气工厂关于蒸馏塔、吸收塔和间歇蒸馏塔的实验数据以及现场测试资料也被用来验证计算值。为同一目的，还使用了关于吸附和冷冻蒸干方面的实验结果。

本书所介绍的各种模型的推导和试验，得到许多人的帮助，对于他们，以及对于其他为本书的出版做出过贡献的人们，作者表示深深的感谢！（以下从略）

C. D. 霍兰 A. I. 利亚比斯

目 录

前言

第一章 引言——模拟和数值方法.....	1
1-1 为某些物料和能量衡算模型建立方程式	2
1-2 几种数值方法——它们的用途和特点	13
1-3 数值方法的稳定性	25
符号	31
习题	33
附录 1A-1 定理	34

第一部分 用两点隐含法求解分级分离问题

第二章 蒸发器系统动态特性引论.....	37
2-1 蒸发的基本原理	37
2-2 单效蒸发器的动态特性	45
2-3 用两点隐含法求解过渡性蒸发器问题	51
2-4 三效蒸发器系统的方程式	68
符号	70
习题	72
第三章 多效蒸发器系统的动态特性.....	73
3-1 传热模型的推导和分析	78
3-2 Freeport 试验厂蒸发器系统模型的表达式.....	88
3-3 现场测试结果的分析	103
符号	112
习题	114
附录 3A-1	121
第四章 用两点隐含法求解有关连续蒸馏塔的问题.....	125
4-1 隐含法和 θ 法的应用	125
4-2 用隐含法和 θ 法求解与普通蒸馏塔有关的问题	131

4-3	两点隐含法和 $2N$ Newton-Raphson 法相结合的应用	166
	符号	171
	习题	174
附录 4A-1	平衡数据和焓数据	178
附录 4A-2	偏摩尔焓的有效值	180
第五章	解间歇蒸馏问题	183
5-1	开动期 ($D = 0, B = 0, F = 0$)	184
5-2	生产期 ($B = 0, D > 0$)	193
5-3	由两点隐含法和 $2N$ Newton-Raphson 法相结合求解间歇蒸馏塔问题	199
5-4	循环操作	204
5-5	间歇蒸馏过程的最优化	211
	符号	216
	习题	217
附录 5A-1	221
附录 5A-2	222

第二部分 用半隐含 Runge-Kutta 法和 Gear 法 求解分级分离问题

第六章	用半隐含 Runge-Kutta 法和 Gear 法求解非稳态的吸收塔问题	224
6-1	在解微分和代数方程组时半隐含 Runge-Kutta 法的应用	224
6-2	Gear 法在微分和代数方程组上的应用	236
6-3	用半隐含 Runge-Kutta 法和 Gear 法求解吸收塔问题	243
	符号	256
	习题	257
附录 6A	平衡数据和焓数据	258
第七章	非稳态操作下填料吸收塔的模拟	262
7-1	基本关系式	263
7-2	现场测试结果的分析	265
	符号	276
第八章	蒸馏塔及其控制系统的模拟	277

8-1 用 Gear 法列蒸馏塔模型的方程式	277
8-2 用 Gear 法解例题 8-1	294
符号	304
习题	306
附录 8A	307
第九章 Runge-Kutta 法和多步积分算法的推导	311
9-1 Runge-Kutta 法	311
9-2 多步数值积分算法	319
习题	339

第三部分 连续分离过程有关问题的解

第十章 可应用于微分和偏微分方程的数值方法推导	340
10-1 正交配置法	340
10-2 有限差分法解偏微分方程	359
10-3 特征线法	367
第十一章 吸附过程的基本原理	373
11-1 固态吸附剂对纯气体和混合物的物理吸附	374
11-2 由对流传输机理而产生的传质	383
11-3 吸附过程中孔隙与表面扩散的作用	390
符号	396
习题	399
第十二章 用吸附塔分离多组分混合物	401
12-1 GLUECKAUF 模型	401
12-2 薄膜的阻力和扩散模型	405
12-3 固定床吸附塔的绝热操作	417
12-4 周期性操作	429
符号	431
习题	434
第十三章 冷冻蒸干问题的模拟和求解	435
13-1 冷冻蒸干过程模型的建立	435
13-2 移动边界问题的解	445
符号	451

习题	454
第十四章 固体吸附剂对纯气体和多组分混合气体的物理吸 附热力学	455
14-1 描述多组分混合物的物理吸附所需的热力学函数	457
14-2 动力学吸附模型状态方程的特征	475
符号	481
习题	483
参考文献	486
内容索引	497
人名索引	503

第一章 引言——模拟和数值方法

本书深入地讨论了动态分离过程的模拟以及相应方程式的数值解法。

当建立描述处于非静态的每个分离过程的模型之后，就能用各种数值方法来求解这些模型相对应的方程式。可用的方法有二点隐含法、半隐含 Runge-Kutta 法、Gear 法、配置法、有限差分法以及特征线法等。掌握了这些方法，工程师就能更有效地进行工艺设计，更合理地选用控制工艺的仪器。本书的第一部分采用了二点隐含法(或简称隐含法)；在第二部分中采用半隐含 Runge-Kutta 法和 Gear 法；第三部分则用配置法、有限差分法和特征线法。本章将通过求解一些比较简单的数学例题来说明第一和第二部分中数值方法的用途。第十章推导出第三部分中所用的方法，并且解一些比较简单的数学题来说明它们的用处。

有关建立工艺模型的技术，在考虑具体工艺过程时做了充分的说明，这些工艺过程包括蒸发、分馏、吸收、吸附和冷冻蒸干等。书中既论及分级的过程，如加有隔板的分馏塔，也论述了连续的过程，如吸附作用等。所有这些模型的基础是下列的基本原则：

1. 质量守恒或物料衡算
2. 能量守恒或能量衡算
3. 传质

为了说明如何建立方程式来代表物料和能量的衡算，1-1 节论述了在非稳态操作中的几个不同体系。随后的章节还推导一些具体工艺模型的方程式，以便进一步说明上述的方法。

可以采用多种数值方法来解给定工艺模型的方程式。有代表性的方法已列在上面。1-2 节将简要地介绍所选用的方法以及它们的特点。

1-1 为某些物料和能量衡算模型建立方程式

物料衡算

如将所考虑的那部分宇宙称为**体系**，则其余的部分就是**环境**。一个体系的物料衡算是建立在**质量守恒定律**的基础上。从应用的角度来看，这个定律可以通俗地表达如下：**除质量转化为能量或相反过程外，物质既不能创生也不能消灭**。所以，如果我们不去考虑那些涉及质量和能量互相转化的体系，那么，在从 $t = t_n$ 到 $t_n + \Delta t$ 的时间间隔内，

$$\left(\begin{array}{c} \text{在时间间隔 } \Delta t \\ \text{内输入体系的} \\ \text{物料} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{在时间间隔 } \Delta t \\ \text{内输出体系的} \\ \text{物料} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{在时间间隔 } \Delta t \\ \text{内体系中积存} \\ \text{的物料} \end{array} \right)$$

积存这个词的定义如下：

$$\left(\begin{array}{c} \text{在时间间隔 } \Delta t \\ \text{内体系中积存} \\ \text{的物料} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{在时间 } t_n + \Delta t \\ \text{时体系中的物料} \\ \text{总重} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{在时间 } t_n \text{ 时} \\ \text{体系中的物} \\ \text{料总量} \end{array} \right)$$

在分析非稳态体系时，把上列物料衡算的表达式改成如下形式更便于应用：

$$\int_{t_n}^{t_n + \Delta t} \left[\left(\begin{array}{c} \text{每单位时间} \\ \text{输入的物质} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{每单位时间} \\ \text{输出的物质} \end{array} \right) \right] dt \\ = \left(\begin{array}{c} \text{体系中的} \\ \text{物料总量} \end{array} \right) \Big|_{t_n + \Delta t} - \left(\begin{array}{c} \text{体系中的} \\ \text{物料总量} \end{array} \right) \Big|_{t_n} \quad (1-1)$$

为说明物料衡算式的建立，先考虑图 1-1 所示的理想混合器，要求推导出微分方程式来描述在进料出现反常后的任意时刻 t 总的物料衡算。设进料反常发生在时间 $t = 0$ 时。在从 t_n 到 $t_n + \Delta t$ 的时间间隔内的组分物料衡算由下式给出：

$$\int_{t_n}^{t_n + \Delta t} (FX_i - Lx_i) dt = (Ux_i) \Big|_{t_n + \Delta t} - (Ux_i) \Big|_{t_n} \quad (1-2)$$

式中

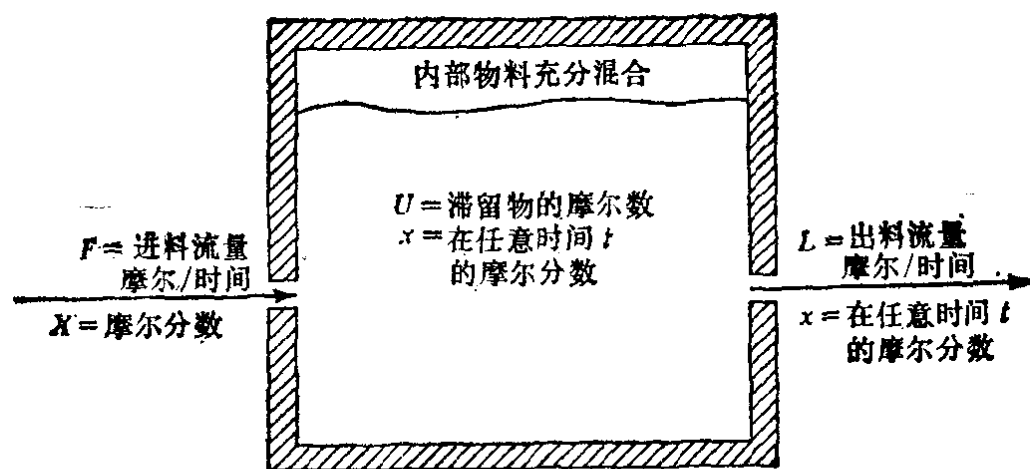


图 1-1 理想混合器的示意图

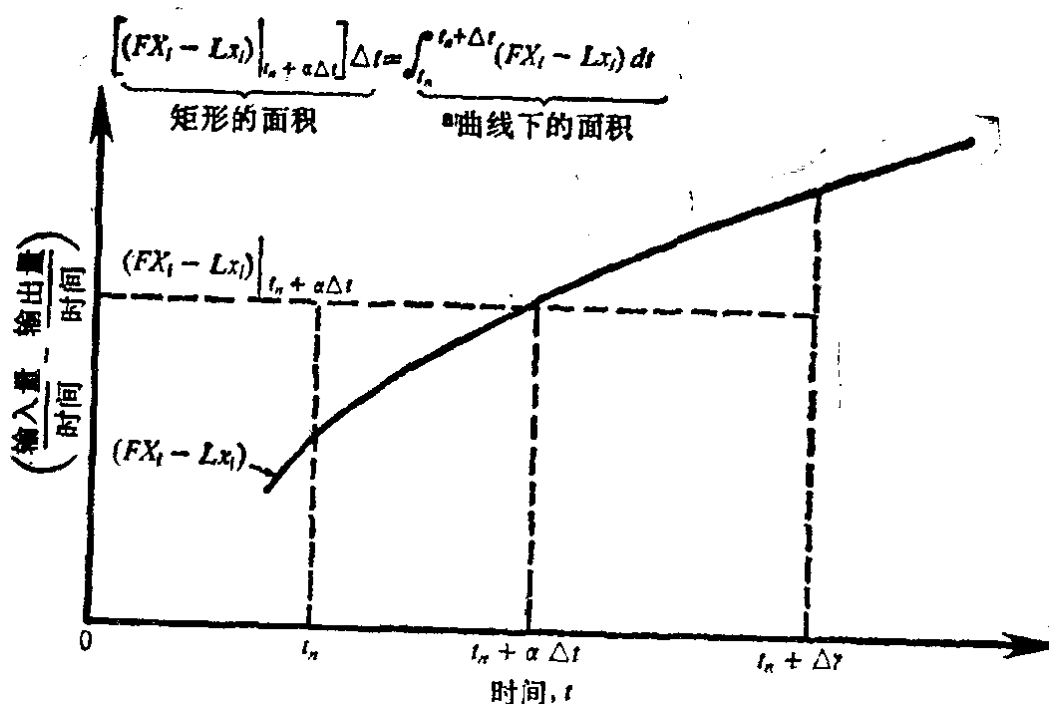


图 1-2 积分均值定理的几何意义

F = 进料流量, mol/h (或质量每小时)(注意: 在不发生化学反应时, 摩尔数不变)

L = 产量, mol/h (或质量每小时)

U = 滞留量, mol (或质量)

x_i = 在任意时刻 t 混合器中组分 i 的摩尔(或质量)分数

X_i = 在任意时刻 t 进入物料中组分 i 的摩尔(或质量)分数

[正如在此后各章中要说明的一样, 当使用两点隐含法、Euler 法和梯形法则时, 数值方法可直接用于方程 (1-2).]

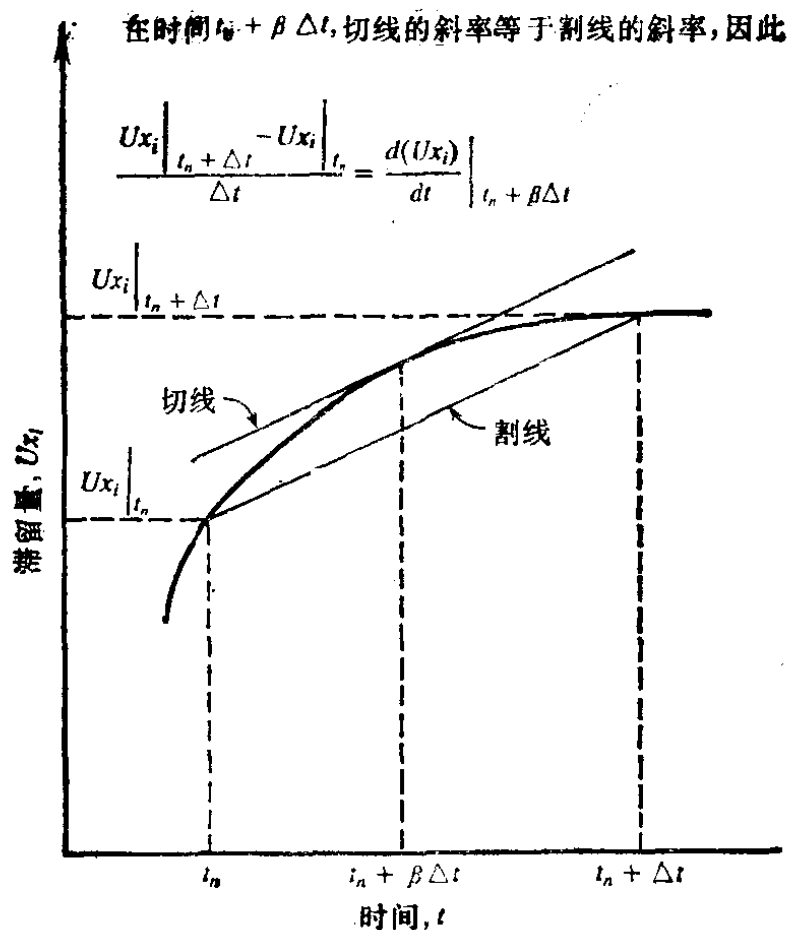


图 1-3 微分均值定理的几何意义

利用均值定理可以得到与方程 (1-2) 对应的微分方程式。首先,把积分均值定理(附录 1A)用于方程 (1-2) 的左边可得

$$\int_{t_n}^{t_n + \Delta t} (FX_i - Lx_i) dt = \left[(FX_i - Lx_i) \Big|_{t_n + \alpha \Delta t} \right] \Delta t \quad (1-3)$$

式中 $0 \leq \alpha \leq 1$ 。方程 (1-3) 的几何意义是: 有这样一个矩形, 其高为 $(FX_i - Lx_i) \Big|_{t_n + \alpha \Delta t}$, 其底为 Δt , 它的面积恰好等于

$$(FX_i - Lx_i)$$

对 t 的曲线在时间间隔 t_n 到 $t_n + \Delta t$ 之内的面积; 参看图 1-2。

把微分均值定理用于方程 (1-2) 的右边得

$$(Ux_i) \Big|_{t_n + \Delta t} - (Ux_i) \Big|_{t_n} = \Delta t \frac{d(Ux_i)}{dt} \Big|_{t_n + \beta \Delta t} \quad (1-4)$$

式中 $0 < \beta < 1$ 。方程 (1-4) 的几何图形是: 有这么一条切线, 它的斜率是 $d(Ux_i)/dt \Big|_{t_n + \beta \Delta t}$, 在 (Ux_i) 对 t 的曲线上连接在 t_n 和 $t_n + \Delta t$ 两点的割线的斜率恰好等于上述切线的斜率。

令方程 (1-3) 和 (1-4) 的右边相等, 把得到的表达式除以 Δt 便得到

$$(FX_i - Lx_i) \Big|_{t_n + \alpha \Delta t} = \frac{d(Ux_i)}{dt} \Big|_{t_n + \beta \Delta t} \quad (1-5)$$

在 Δt 趋于零的极限下, 方程 (1-5) 简化为

$$(FX_i - Lx_i) \Big|_{t_n} = \frac{d(Ux_i)}{dt} \Big|_{t_n} \quad (1-6)$$

既然 t_n 是人为选择的, 对于所有 $t_n > 0$ 方程 (1-6) 都成立, 因此最后的结果是

$$FX_i - Lx_i = \frac{d(Ux_i)}{dt} \quad (t > 0) \quad (1-7)$$

能量衡算

能量衡算以热力学第一定律为基础, 它断言宇宙间的能量为一常量。因而, 进入宇宙某个特殊部分(称为**体系**)的总能量与离开体系的总能量的差值, 必须等于该体系中积存的能量。下列能量衡算的公式很容易应用到非稳态操作的体系中去:

$$\int_{t_n}^{t_n + \Delta t} \left[\left(\begin{array}{c} \text{每单位时间输} \\ \text{入体系的能量} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{每单位时间输} \\ \text{出体系的能量} \end{array} \right) \right] dt \\ = \left(\begin{array}{c} \text{体系中的} \\ \text{总能量} \end{array} \right) \Big|_{t_n + \Delta t} - \left(\begin{array}{c} \text{体系中的} \\ \text{总能量} \end{array} \right) \Big|_{t_n} \quad (1-8)$$

为计算进入和离开体系的所有能量, 由体系所吸收的净热和体系对环境所做的净功的等当能量都应当考虑在内。**热和功**代表体系和其环境间互相转移的能量。接受外功的体系把机械能转化成了内能。在下面的分析中, 选取一磅的物料 (1 个 lb_m^*) 做为基础。这样, 符号 KE , PE 和 E 分别代表动能、势能和内能, 以每磅流体的英国热单位 (Btu)** 表示, 而每磅流体具有的总能量用 E_T 表示, 则

$$E_T = E + KE + PE \quad (1-9)$$

* $\text{lb}_m(\text{lb}) = 0.453592 \text{ kg}$. ——译者注

** $\text{Btu} = 1055.06 \text{ J}$. ——译者注

1 lb_m 流体的焓 H 定义为

$$H = E + P v \quad (1-10)$$

式中

P = 压力, lb_f*/ft²** , 这里 lb_f 表示磅力

V = 比容, ft³/lb_m

为简单起见, 在方程 (1-10) 及其后的其他方程中都把 Pv 乘积的除数热功当量 (778 ftlb_f/Btu) 省略了. 为了方便, 令

$$H_T = E_T + P v \quad (1-11)$$

对于在稳态操作的流动体系(即变量不随时间变化的操作过程), 方程 (1-8) 简化成众所周知的表达式 $\Delta H = Q$, 式中体系不对环境做功, 而且动能和势能的变化可以忽略. 但是, 对于非稳态过程, 能量衡算的表达式并不如此简单. 在下面的进一步论述中考虑了两个类型的体系, 它们对随后各节所考虑的体系来说是有代表性的.

管道中的液流

在此后的论述中, 假定管道中流体流动畅通, 在径向能充分混合, 而在轴向 z 不发生混合(参看图 1-4). 设 z_j, z_{j+1}, t_n 和 t_{n+1} 是在感兴趣的时间和空间范围内任意选定的, 即

$$0 < z_j < z_{j+1} < z_T \quad t > 0$$

这里

$$\Delta z = z_{j+1} - z_j$$

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n$$

在 t_n 到 t_{n+1} 的时间间隔内从 z_j 到 z_{j+1} 的体积之中的流体单元上的能量衡算可用公式表示如下. 每单位时间进入 z_j 体积元的流体所含的能量在任意时刻 t ($t_n \leq t \leq t_{n+1}$) 是

$$\left(\begin{array}{l} \text{每单位时间因流} \\ \text{动而输入的能量} \end{array} \right) = w E_T \Big|_{z_j, t} \quad (1-12)$$

* lb_f = 4.44822 N.——译者注

** ft = 0.3048 m.——译者注

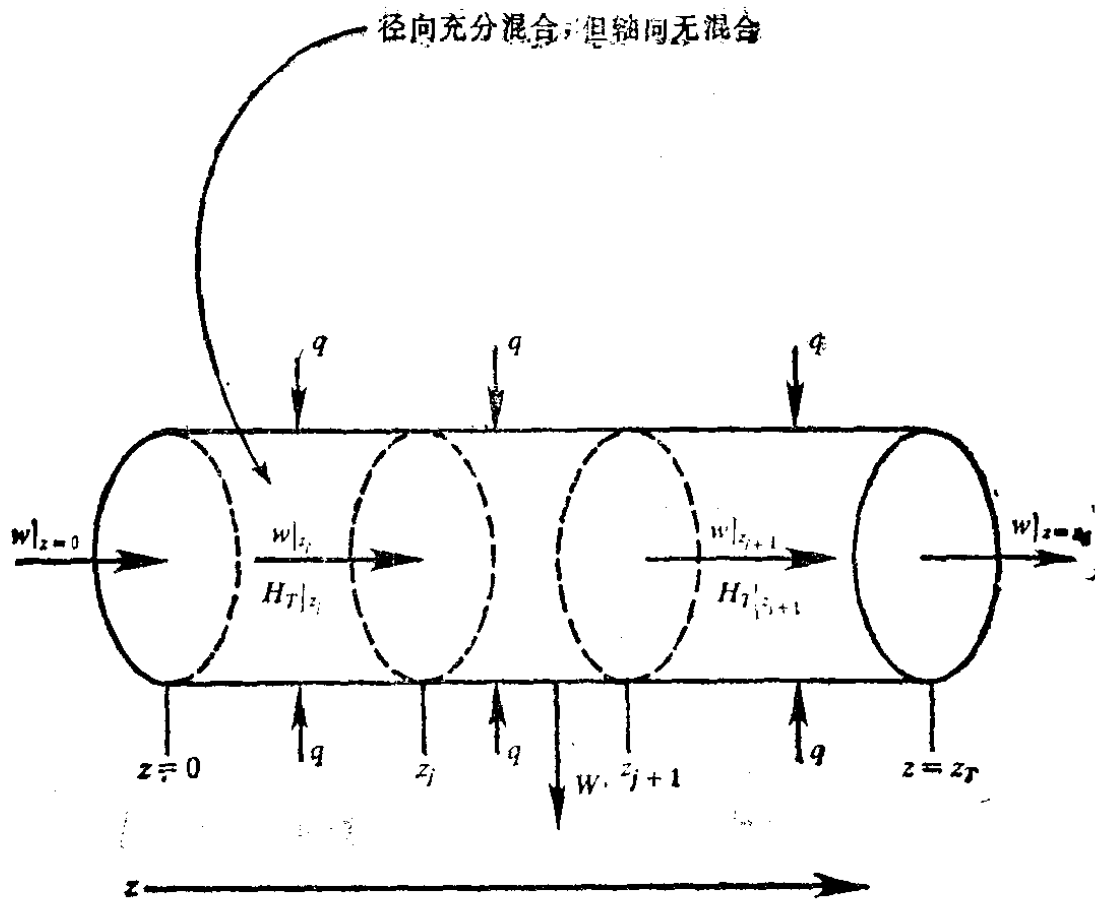


图 1-4 流动体系中从 z_j 到 z_{j+1} 的体积元上的能量衡算

在任意时刻 $t (t_n \leq t \leq t_{n+1})$, 迫使一磅流体进入 z_j 体积元所需的功为

$$\left(\begin{array}{l} \text{每单位质} \\ \text{量的功} \end{array} \right) = \int_0^v P dv \Big|_{z_j, t} = P v \Big|_{z_j, t} \quad (1-13)$$

应当注意, 在时间间隔 Δt 期间, 这个功 Pv 可以随时间而变化. 在任意时刻 t

$$\left(\begin{array}{l} \text{流入的液体对体} \\ \text{积元做功的速率} \end{array} \right) = (w P v) \Big|_{z_j, t} \quad (1-14)$$

假定如图 1-4 所示, 热量沿着边界连续不断地从环境经各个 z 传递到体系中去. 用 q [Btu/(h · ft)] 来表示传热速率. 那么在各个 $z (z_j \leq z \leq z_{j+1})$ 及任何大于零的时刻 t

$$\left(\begin{array}{l} \text{单位时间内越过体积} \\ \text{元边界所传输的热量} \end{array} \right) = \int_{z_j}^{z_{j+1}} q dz \quad (1-15)$$

在这里考虑了两种属于体系对环境做功(通常称为轴输出功)的情况. 第一种情况, 如图 1-4 所示, 体系仅在 z_j 和 z_{j+1} 之间的某点

z 对环境做功, 用 \mathcal{W} [ftlb_f/(ft 单位时间)] 来表示在每一点做功的速率. 那么

$$\left(\begin{array}{l} \text{单位时间内体积元对} \\ \text{环境所做的轴输出功} \end{array} \right) = \int_{z_j}^{z_{j+1}} \mathcal{W} dz \quad (1-16)$$

所列出的积分-差分方程适用于第一种情况, 但适用于第二种情况的最后结果也可由此很快地得到. 方程 (1-8) 的输入项如下:

$$\left(\begin{array}{l} \text{在时间间隔 } \Delta t \text{ 期间} \\ \text{输入到体积元的能量} \end{array} \right) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[(wE_T) \Big|_{z_j, t} \right. \\ \left. + (wPv) \Big|_{z_j, t} + \int_{z_j}^{z_{j+1}} q dz \right] dt \quad (1-17)$$

输出项为

$$\left(\begin{array}{l} \text{在时间间隔 } \Delta t \text{ 的期间} \\ \text{内从体积元输出的能量} \end{array} \right) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[(wE_T) \Big|_{z_{j+1}, t} \right. \\ \left. + (wPv) \Big|_{z_{j+1}, t} + W \right] dt \quad (1-18)$$

在时间间隔 Δt 的期间内体积元中所积存的能量是

$$\left(\begin{array}{l} \text{在时间间隔 } \Delta t \text{ 的期间内} \\ \text{体积元中所积存的能量} \end{array} \right) = \int_{z_j}^{z_{j+1}} (\rho S E_T) \Big|_{t_{n+1}, z} dz \\ - \int_{z_j}^{z_{j+1}} (\rho S E_T) \Big|_{t_n, z} dz \quad (1-19)$$

式中 ρ 是流体的密度 (lbm/ft³), S 是体积元的横截面积, 如图 1-4 所示. 横截面积 S 通常与 z 无关, 在此后的推导中都将做为常数处理. 既然 $\rho = 1/v$, 从方程 (1-11) 可得

$$\rho E_T = \rho H_T - \rho(Pv) = \rho H_T - P \quad (1-20)$$

利用这个表达式可把方程 (1-19) 改写为

$$\left(\begin{array}{l} \text{在时间间隔 } \Delta t \text{ 的期} \\ \text{间内所积存的能量} \end{array} \right) = \int_{z_j}^{z_{j+1}} \left(\rho H_T \Big|_{t_{n+1}, z} \right. \\ \left. - \rho H_T \Big|_{t_n, z} \right) S dz - \int_{z_j}^{z_{j+1}} \left(P \Big|_{t_{n+1}, z} - P \Big|_{t_n, z} \right) S dz \quad (1-21)$$

用方程 (1-11) 把输入和输出表达为 H_T 项, 这样能量衡算的最后表达式可以改写为

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[(wH_T) \Big|_{z_j, t} - (wH_T) \Big|_{z_{j+1}, t} + \int_{z_j}^{z_{j+1}} q dz - W \right] dt$$

$$= \int_{z_j}^{z_{j+1}} \left[(\rho H_T) \Big|_{t_{n+1}, z} - (\rho H_T) \Big|_{t_n, z} \right] S dz - \int_{z_j}^{z_{j+1}} \left(P \Big|_{t_{n+1}, z} - P \Big|_{t_n, z} \right) S dz \quad (1-22)$$

方程 (1-22) 右边第二个积分项表明, 它的物理意义就是在时刻 t_{n+1} 和 t_n 扫过体积元所需功的数量差. 在大多数工艺过程中, 这个差比起右边焓差来说是可以忽略的.

如果体积元在边界上的每一点 z 连续地对环境做轴输出功, 则方程 (1-22) 中的 W 可以用方程 (1-16) 所给的表达式来代替.

能量衡算的偏微分方程的推导

从下式着手, 这是一个用于管道中液流能量衡算的公式

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[(wH_T) \Big|_{z_j, t} - (wH_T) \Big|_{z_{j+1}, t} + \int_{z_j}^{z_{j+1}} q dz - W \right] dt = \int_{z_j}^{z_{j+1}} \left[(\rho E_T S) \Big|_{t_{n+1}, z} - (\rho E_T S) \Big|_{t_n, z} \right] dz \quad (1-23)$$

适当地应用均值定理(附录 1A, 定理 1A-1 和 1A-2), 并在 Δz 和 Δt 趋于零的情况下取极限, 便可获得相应的偏微分方程. 但是, 为把积分均值定理用到方程 (1-23) 的左边, 被积函数在

$$z_j < z < z_{j+1}$$

的间隔内必须是连续的. 如果在点 z_k 体系对环境做功 W , 那么被积函数在 z_k 就有一个不连续点, 因为

$$\begin{aligned} W &= 0 \quad (0 < z < z_k, t > 0) \\ W &= W \quad (z = z_k, t > 0) \\ W &= 0 \quad (z_k < z < z_T, t > 0) \end{aligned} \quad (1-24)$$

这样, 如果要把均值定理用到下一步的任何运算中, 就必须使间隔 $(z_j < z < z_{j+1})$ 不含有 z_k , 也就是说, 间隔 $(z_j < z < z_{j+1})$ 可以是在 z_k 的左边或右边. (如果 $z_k = z_j$, 在 Δz 趋于零的极限情况下, 偏微分方程不成立.) 这样一来, 所考虑的方程与方程 (1-23) 就有相同的形式, 只不过它不含 W , 它适用于从 t_n 到 t_{n+1} 的时间间隔内, 以及在 $z_{j-1} < z < z_{j-1} < z_k$ 或 $z_k < z_j < z < z_{j+1}$ 的