

# 复变函数引论

И. И. 普里瓦洛夫 著

闵嗣鹤 程民德 董怀允 译

吴文达 萧树铁 陈 杰

许 宝 骥 校

---

中 华 出 版 社

# 复 变 函 数 引 论

И. И. 普里瓦洛夫 著

闵嗣鹤 程民德 董怀允 译

吴文达 萧树铁 陈 杰

许 宝 骥 校

人 民 教 育 出 版 社

本书系伊·伊·普里瓦洛夫(И. И. Привалов)著“复变函数引论”(Введение в теорию функции комплексного переменного) 1948年第八版译出,并参照原书1954年第九版修订过。

本书可作为综合大学和师范学院数学系教学参考书。

### 简装本说明

目前850×1168毫米规格纸张较少,本书暂以787×1092毫米规格纸张印刷,定价相应减少20%。希鉴谅。

## 复 变 函 数 引 论

---

И. И. 普里瓦洛夫著

闵嗣鹤等译

许宝騄校

人民教育出版社(北京沙滩后街)

上海商务印刷厂印装

新华书店上海发行所发行

各地新华书店经售

---

统一书号13012·0115 开本787×1092 1/32 印张15

字数366,000 印数57,201—97,200 定价(5)¥1.12

1956年8月第1版 1978年4月上海第17次印刷

## 第六版序

插入单独一章，第十一章，来对椭圆函数的初等理论作专题叙述，是这一版与以前各版的主要区别。

伊·普里瓦洛夫。

## 第五版序

在这一版里，我的书“复变函数引论”对前一版的正文有了部分的修改与补充。在这个工作中，接受了阿·伊·马尔古谢维奇的帮忙，我对他表示深刻的谢意。

伊·普里瓦洛夫。

---

在印行第九版以前，本书（原著）经阿·伊·马尔古谢维奇教授重新全部审阅过，并作了必要的修订。

# 目 录

序 .....	x
引論 .....	1

## 第一章 复数

§ 1. 复数及其运算 .....	6
1. 复数概念(6)。—2. 复数的加法与乘法(6)。—3. 复数的减法与除法(8)。	
§ 2. 复数的几何表示法·关于模与辐角的定理 .....	9
1. 复数的几何表示法(9)。—2. 复数的加法与减法的几何意义(10)。—3. 模与辐角的概念(10)。—4. 关于模与辐角的定理(11)。—5. 数 $\frac{1}{z}$ 的几何表示法(13)。—6. 复数的积与商的几何作图(14)。	
§ 3. 极限 .....	15
1. 极限理論的基本原則(15)。—2. 极限点概念(17)。—3. 有界的与无界的复数序列(17)。—4. 波尔察諾-維尔斯脫拉斯定理(18)。—5. 复数序列的收敛概念(19)。—6. 极限理論的基本定理(20)。—7. 哥西判別法(20)。	
§ 4. 复数球面·无穷远点 .....	22
1. 复数在球面上的表示法·无穷远点(22)。—2. 球极投影的公式(23)。—3. 球极投影的基本性质(24)。—4. 保角性(25)。	
§ 5. 級数 .....	26
1. 收敛級数与发散級数的概念(26)。—2. 收敛級数的一个必要条件(27)。—3. 绝对收敛級数的概念(28)。—4. 級数的加法与减法(29)。—5. 关于二重級数的一个定理(30)。—6. 級数的項的重排(32)。—7. 級数的乘法(33)。	
第一章习题 .....	35

## 第二章 复变数与复变函数

§ 1. 复变函数 .....	37
1. 复变函数概念(37)。—2. 区域的概念·約当曲綫(38)。—3. 复变函数的連續性(41)。—4. 关于一致連續性的定理·海涅-波勒尔預备定理(44)。	
§ 2. 函数項級数 .....	46
1. 一致收敛級数的概念(46)。—2. 关于級数的和的連續性的定理(49)。—3. 一致收敛級数的判別法(50)。	

§ 3. 幂级数 .....	51
1. 幂级数的收敛区域的概念(51)。—2. 阿贝尔第一定理(52)。—3. 收敛圆(53)。—4. 上极限的概念(55)。—5. 收敛半径的判定(56)。—6. 幂级数的一致收敛性(60)。—7. 阿贝尔第二定理(61)。	
§ 4. 复变函数的微分法·初等函数 .....	64
1. 导数概念(64)。—2. 在一个区域内解析的函数的概念(65)。—3. 微分概念(66)。—4. 哥西黎曼条件(67)。—5. 共轭调和函数(71)。—6. 幂级数的微分法(72)。—7. 指数函数、三角函数与双曲线函数(73)。—8. 单叶函数·反函数(78)。—9. 根式、对数函数与反正弦函数(80)。—10. 多值函数的分支·关于支点的概念(82)。—11. 黎曼曲面的概念(89)。	
§ 5. 保角映射 .....	94
1. 导数的辐角的几何意义(94)。—2. 导数的模的几何意义(97)。—3. 保角映射(97)。—4. 第二类保角映射(98)。—5. 微分的几何意义(101)。—6. 映射 $w=f(z)$ 的主要部分(102)。	
第二章习题 .....	104
<b>第三章 线性变换与其他的简单变换</b>	
§ 1. 线性函数 .....	107
1. 整线性函数(107)。—2. 函数 $w = \frac{1}{z}$ (108)。—3. 一般线性函数(110)。—4. 线性函数关于圆周的性质(111)。—5. 线性变换的参变数与不变量(112)。—6. 把上半平面变成自己的映射(114)。—7. 在线性变换下互相对称的点对的不变性(115)。—8. 把圆变成上半平面的映射(116)。—9. 把圆变成自己的映射(117)。—10. 用对称映射来表示线性变换(118)。—11. 线性变换的不同类型(119)。—12. 重点的性质(123)。—13. 椭圆式变换的几何意义(125)。—14. 把圆变成自己的变换的特征(125)。	
§ 2. 线性变换与罗拔切夫斯基几何 .....	127
1. 罗拔切夫斯基几何在圆上的欧几里得图像(127)。—2. 给定附标的两点间的非欧距离的算法(128)。—3. 非欧几里得圆周(129)。—4. 曲线的非欧长度(130)。—5. 非欧几里得面积(130)。—6. 远环(131)。—7. 超环(131)。—8. 罗拔切夫斯基几何在半平面上的欧几里得图像(132)。—9. 圆周的非欧几里得长度(133)。—10. 罗拔切夫斯基几何中的平行角(134)。—11. 圆与三角形的非欧几里得面积(135)。	
§ 3. 若干初等函数与这些函数构成的映射 .....	137
1. 幂函数与根式(137)。—2. 指数函数与对数函数(141)。	
第三章习题 .....	143

## 第四章 哥西定理·哥西积分

## § 1. 复变积分 ..... 145

1. 复变积分的概念(145)。—2. 复变积分的基本性质(147)。—3. 一致收敛级数的积分法(149)。—4. 哥西定理(150)。

## § 2. 哥西定理 ..... 152

1. 基本预备定理(152)。—2. 哥西定理证明的简化(154)。—3. 哥西定理的证明(155)。—4. 复数域中的不定积分概念(158)。—5. 哥西定理扩充到复闭路的情形(161)。—6. 对数函数(163)。—7. 预备定理(167)。—8. 哥西定理的推广(169)。

## § 3. 哥西积分 ..... 171

1. 哥西公式(171)。—2. 哥西公式扩充到复闭路的情形(172)。—3. 哥西型积分(174)。—4. 区域内解析函数的一切高级导函数的存在性(177)。—5. 摩勒尔定理(178)。—6. 在解析函数理论的建立中的各种不同的观点(179)。—7. 哥西型积分的极限值(180)。—8. 当边界函数满足火伊尔德-立勃希兹条件时哥西型积分的极限值(185)。—9. 波哇松积分(192)。

## 第四章习题 ..... 195

## 第五章 解析函数项级数·解析函数的幂级数展开式

## § 1. 一致收敛的解析函数项级数 ..... 198

1. 维尔斯特拉斯第一定理(198)。

## § 2. 戴劳级数 ..... 203

1. 维尔斯特拉斯定理在幂级数上的应用(203)。—2. 解析函数的幂级数展开式(205)。—3. 全纯函数的概念以及它与解析函数概念的等价性(208)。—4. 解析函数的唯一性(209)。—5. 最大模原理(213)。—6. 解析函数的零点(216)。—7. 零点的级(217)。—8. 幂级数系数的哥西不等式(217)。—9. 里乌威尔定理(218)。—10. 维尔斯特拉斯第二定理(218)。

## 第五章习题 ..... 219

## 第六章 单值函数的孤立奇异点

## § 1. 罗朗级数 ..... 221

1. 解析函数的罗朗展开式(221)。—2. 罗朗级数的正则部分与主要部分(223)。—3. 罗朗展开式的唯一性(224)。

## § 2. 单值函数的奇异点的分类 ..... 225

1. 孤立奇异点的三种类型(225)。—2. 可去奇异点(226)。—3. 极点(226)。—4. 零点与极点间的联系(227)。—5. 本性奇异点(229)。—6. 函数在孤立奇异点邻域内的性质(231)。

§ 3. 解析函数在无穷远点的性质 .....	232
1. 无穷远点的邻域(232)。—2. 在无穷远点的邻域内的罗朗展开式(233)。	
—3. 函数在无穷远点邻域内的性质(234)。—4. 哥西型积分轉化成哥西积分的条件(235)。	
§ 4. 最简单的解析函数族 .....	236
1. 整函数(236)。—2. 半純函数(237)。—3. 展开有理函数成部分分式(239)。	
—4. 代数基本定理(239)。	
§ 5. 在流体动力学中的应用 .....	239
1. 无渦旋且无源泉的流体流动(239)。—2. 流动的特征函数(241)。—3. 繞过圆柱体的无环流流动(242)。	
—4. 純环流(245)。—5. 一般情形(245)。	
第六章习题 .....	247

## 第七章 残数理論

§ 1. 残数的一般理論 .....	251
1. 函数关于孤立奇异点的残数(251)。—2. 关于残数的基本定理(252)。	
—3. 函数关于极点的残数之計算(253)。—4. 函数关于无穷远点的残数(254)。	
—5. 积分 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ 的計算(256)。	
§ 2. 残数理論的应用 .....	259
1. 代数基本定理(259)。—2. 儒歇定理(260)。—3. 残数理論在定积分計算上的应用(262)。	
—4. $\operatorname{ctg} z$ 展开成簡單分式(267)。	
第七章习题 .....	270

## 第八章 毕卡定理

§ 1. 布洛赫定理 .....	272
1. 关于全純函数的反函数的定理(272)。—2. 布洛赫定理的证明(273)。	
§ 2. 朗道定理 .....	275
1. 朗道定理的证明(275)。—2. 毕卡的小定理(277)。	
§ 3. 夏特基不等式 .....	278
1. 夏特基不等式的导出(278)。—2. 广义夏特基不等式(280)。	
§ 4. 毕卡的一般定理 .....	281
第八章习题 .....	282

## 第九章 无穷乘积与它对解析函数的应用

§ 1. 无穷乘积 .....	283
-----------------	-----



1. 收敛的与发散的无穷乘积 (283)。	—2. 无穷乘积收敛性的基本判别法 (285)。	—3. 全纯函数的无穷乘积表示法 (289)。	
§ 2. 无穷乘积在整函数理论上的应用			290
1. 维尔斯特拉斯公式 (290)。	—3. 整函数的无穷乘积表示法 (294)。	—3. 把半纯函数表作两个整函数之比 (296)。	—4. 米他格-列夫勒问题 (296)。
§ 3. 解析函数唯一性定理的推广			297
1. 解析函数唯一性定理可能的推广 (297)。	—2. 雅可比与靳生公式 (298)。	—3. 唯一性定理的证明 (300)。	—4. 对有界函数来说唯一性定理再进一步推广的可能性 (302)。
第九章习题			304

## 第十章 解析开拓

§ 1. 解析开拓的原理			306
1. 解析开拓的概念 (306)。	—2. 维尔斯特拉斯意义下的完全解析函数的概念 (308)。	—3. 按照解析开拓原理在复数域上扩充实变函数 (311)。	
§ 2. 例			312
1. 单值函数的例 (312)。	—2. 多值函数的例 (313)。		
第十章习题			314

## 第十一章 椭圆函数理论初步

§ 1. 椭圆函数的一般性质			316
1. 椭圆函数的定义 (316)。	—2. 周期平行四边形 (317)。	—3. 基本定理 (318)。	—4. 二级椭圆函数 (323)。
§ 2. 维尔斯特拉斯函数			326
1. 预备定理 (327)。	—2. 函数 $\sigma, \zeta$ 与 $\wp$ (328)。		
§ 3. 任意椭圆函数的简单分析表示法			335
1. 把椭圆函数表成一些简单基元之和 (335)。	—2. 把椭圆函数表成基本因子的乘积之比 (337)。		
§ 4. 函数 $\sigma_k$			339
§ 5. 雅可比椭圆函数			342
§ 6. 西他函数			345
1. 整周期函数的展开式 (345)。	—2. 函数 $\theta$ (347)。	—3. 函数 $\theta_k$ (350)。	—4. 西他函数的性质 (353)。
§ 7. 用西他函数表示雅可比椭圆函数			357

§ 8. 雅可比椭圆函数的加法公式 .....	359
第十一章习题 .....	361

## 第十二章 保角映射理论的一般原则

§ 1. 确定保角映射的条件 .....	364
1. 把单位圆变成它自己的映射(364)。—2. 确定保角映射的唯一性的条件(366)。	
§ 2. 保角映射理论的基本原则 .....	368
1. 保存区域的原则(368)。—2. 双方单值对应的原则(373)。—3. 黎曼-希瓦尔兹对称原则(374)。—4. 对称原则的推广(380)。—5. 解析开拓的希瓦尔兹原则(381)。—6. 调和函数的对称原则(382)。—7. 对称原则的应用(385)。	
§ 3. 把单位圆变到一个内部区域的一般变换 .....	386
1. 把圆 $ z  < 1$ 变到一个内部区域的全纯函数的解析表达式(386)。2. 希瓦尔兹预备定理(389)。—3. 应用希瓦尔兹预备定理来估计满足这个定理的条件的那些函数的导函数(392)。—4. 希瓦尔兹预备定理的一般形式(393)。—5. 变换的重点的存在性(395)。	
§ 4. 解析函解的唯一性 .....	396
1. 由边界值来确定解析函数的唯一性(396)。—2. 唯一性定理的推广(398)。	
§ 5. 把二次曲线所包围的区域变成上半平面的保角映射 .....	399
1. 等轴双曲线(399)。—2. 抛物线(400)。—3. 双曲线与椭圆(405)。—4. 把椭圆内部变成半平面的映射(410)。	
§ 6. 单连通区域的保角映射 .....	412
1. 黎曼定理提法的化简(413)。—2. 辅助函数及其基本性质(415)。—3. 基本预备定理(416)。—4. 黎曼定理的证明(417)。	
§ 7. 在保角映射下边界的对应关系 .....	419
1. 问题的提法(421)。—2. 关于边界对应的定理的证明(422)。	
§ 8. 把矩形与任意多边形变成上半平面的映射 .....	426
1. 矩形(426)。—2. 雅可比椭圆函数(431)。—3. 多边形(433)。—4. 三角形(439)。—5. 把多边形的外部变成上半平面的映射(443)。	
第十二章习题 .....	444

## 第十三章 单叶函数的一般性质

§ 1. 系数问题 .....	447
1. 内部面积定理(447)。—2. 外部面积定理(449)。—3. 在单叶函数展开式	

- 中含  $z^2$  项系数的模的上界(450)。—4. 柯北常数(451)。—5. 变形定理(452)。  
—6. 单叶函数的模的界限(453)。—7. 旋轉定理(455)。—8. 单叶函数展开式中系数的模的一般界限(456)。—9. 在单叶函数展开式中实系数的模的共同界限(457)。
- § 2. 凸性界限与星性界限 .....459  
1. 凸性界限(459)。—2. 星性界限(460)。
- § 3. 构成把单位圆变成特殊区域的单叶保角映射的函数的性质 .....461  
1. 星形函数与凸函数(461)。—2. 凸函数与星形函数的展开式中系数的模的上界(462)。
- § 4. 把区域映射成圆的函数的极值問題 .....464  
1. 預备定理(464)。—2. 第一极值問題(466)。—3. 第二极值問題(468)。

## 引 論

那些在数学中必須考虑的运算可以分为两类：正的运算与逆的运算。例如，对应于加法运算的逆运算是减法，对应于乘法的是除法，对应于正整数次乘方的就是开方。

对两个任意的正整数施行加法运算，結果我們总还是得到正整数；換句話說，从自然数系出发，通过正运算加法，我們不会超出这个系的范围。但逆运算——减法——就把我們引出了自然数系的范围之外，并且只有在把零与負整数合并到自然数系之后，这个逆运算的施行才成为永远可能。第二个逆运算——除法——，为了它自己的能够施行，就要求一个更广泛的数的概念，这个更广泛的概念是借助于分数的引进才完成的。全部整数与分数合称为有理数，这个有理数系，对于加法、减法、乘法与除法等前面四个代数基本运算來說，是封閉的，也就是說，对任意两个有理数（除了用零除以外）施行这些运算中的任何一个时，結果得到的将依旧是这个系中的元素——有理数。最后，逆运算——开方——甚至在最简单的二次根的情形，就一方面給我們以非有理实数的例子，即所謂无理数，而另一方面給我們以  $y\sqrt{-1}$  形式的数，其中  $y$  表示实数。 $y\sqrt{-1}$  形式的数，其中  $y$  是任意一个不等于零的实数，称为純虛数。

从以上所提到的这些例子就已經可以看出，逆运算使我們感到数的概念有逐漸扩充的必要。假如我們現在来看比开平方根还更較复杂一些的逆运算——解  $ax^2+bx+c=0$  形式的二次方程，其中  $a, b$  与  $c$  都是实数，那末我們就会看到，它的根将是  $x+y\sqrt{-1}$  形式的数，其中  $x$  与  $y$  都表示实数。这样的数称为复数。当  $y=0$  时复数退化成实数，而当  $x=0, y\neq 0$  时它就成为純虛数。复数的全体，包含了全部实

数,是一个对于所有的数学运算來說都封閉的数域。例如,在代数学中大家都知道,任一个复系数的 $n$ 次方程的根就全都是复数。在复数域中能够施行所有的数学运算而使运算結果不至于超出这个数域的范围,这一点,在极大的程度上說明了这种数在数学中所具有的巨大的意义。

在本书中我們將研究复变数  $z = x + y\sqrt{-1}$  的函数的性质,其中  $x$  与  $y$  都是独立实变数。复变函数有它自己的很多的应用,一方面是在各种实用数学課目上,如理論物理、流体动力学、彈性理論、天体力学等,另一方面也在純粹数学的各个部門上如代数、解析数論、微分方程等。除此而外,复变函数理論是一种异常諧合一致而且具有完整的邏輯系統的理论建筑,通曉这个理論中的一些基本問題,无疑地,必須是数学教育的内容之一。

为了指出复变函数的方法的力量,我現在只来提起在純粹数学范围内借助于这种方法而做成的某些巨大成果:素数分布方面的最困难的問題就建立在与某一个复变函数的零点的分布的关系上;关于任意一个正整数表为有限个数的任意次方之和的瓦麟問題也是在复变函数的方法的基础上解决的;天体力学方面最困难的問題,所謂“三体”問題,其一般形式也还是由于吸取了复变分析的方法而解决的。最后我們还可以从讀者所熟知的一些基本数学部門中举出許多例子來說明复变函数所具有的巨大意义与它的特殊作用。

以下仅限于少数几个例子的叙述。例如关于每一个代数方程至少有一个复数根的命題是代数学的基本定理。其次,复数在有理函数的积分与常系数綫性微分方程求解的問題中所具有的意义,在积分学中,也是众所熟知的。我們还必须指出,許多古典分析的問題,只是由于复变分析的出現才得到了明确的形式并找到了完全的解答。例如,大家所知道的尤拉恒等式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  就曾經用来揭破如下所述的貝路利与萊伯尼茲的詭論:

由于

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

我們把分式  $\frac{1}{1+x^2}$  分解为部分分式<sup>①</sup>

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right),$$

积分后, 就求出:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \ln \frac{i-x}{i+x}.$$

令  $x=1$ , 我們得到

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} 1 &= \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i} \ln \frac{i-1}{i+1} = \frac{1}{4i} \ln \left( \frac{i-1}{i+1} \right)^2 = \frac{1}{4i} \ln(-1) = \\ &= \frac{1}{8i} \ln(-1)^2 = \frac{1}{8i} \ln 1 = 0, \text{ 这就是說 } \frac{\pi}{4} = 0. \end{aligned}$$

尤拉指出了指数函数  $e^z$  的周期性之后就揭破了这个詭論。事实上, 用  $-iz$  来代替尤拉恒等式中的  $x$ , 我們得到

$$e^z = \cos(-iz) + i \sin(-iz) = \cos iz - i \sin iz. \quad (1)$$

在这个等式中用  $z+2\pi i$  代替  $z$ , 我們就有

$$e^{z+2\pi i} = \cos(iz-2\pi) - i \sin(iz-2\pi) = \cos iz - i \sin iz = e^z, \text{ ②}$$

也就是說, 當我們用  $z+2\pi i$  代替  $z$  时, 函数  $e^z$  不改变它的数值, 換句話說,  $2\pi i$  是这个函数的周期。因此, 从等式  $e^z = w$  所确定的自然对数  $z = \ln w$ , 对应于一个确定的  $w$  的值, 由于  $e^z$  的周期性, 就有无穷多个不同的数值, 其中每两个值彼此相差一个  $2\pi i$  的倍数。当  $w > 0$  时,  $z = \ln w$  有一个数值是实数, 所有其他的数值全是虚数。当  $w < 0$  时, 則  $z = \ln w$  的数值, 无例外地, 全是虚数。所以, 对数函数是多值的, 假如我

① 以后我們总用記号  $i$  表示  $\sqrt{-1}$ 。

② 这里我們利用了复变数的正弦函数与余弦函数的周期性。这将在第 II 章, §4 第 7 段中证明。

們取  $\ln 1 = 2\pi i$ , 詭論就无从立脚了。

尤拉恒等式揭露出三角函数与指数函数之間的关系, 另外, 如果在公式(1)中用  $-z$  代替  $z$ , 我們有

$$e^{-z} = \cos iz + i \sin iz. \quad (2)$$

对恒等式(1)与(2)施用加法与减法, 我們就得到

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

这些公式給出了双曲綫正弦函数与双曲綫余弦函数通过三角函数的表达式, 而这样一来, 从普通三角函数的公式出发就可以得到全部的双曲綫三角函数的公式。

我們还要从幂級数的理論中来指出一个事实, 它的完滿的解釋只有从复变函数的观点才能給出来。在分析中大家都知道: 展开式

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

只有当  $x$  的值滿足不等式  $|x| < 1$  时才成立。如果我們限制在实变数  $x$  的范围, 我們就沒有可能去发现原来函数的性质以及它的級数却只有在  $x$  的值适合条件  $-1 < x < +1$  时才收敛这一事实之間的关系。因为事实上, 函数  $\frac{1}{1+x^2}$  对于从  $-\infty$  到  $+\infty$  的区間内的任何  $x$  的值都是

确定的, 而且自变数的值  $-1$  与  $+1$  对于它又并非是什么特别的数值。因此我們不能了解为什么級数  $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$  当  $x$  的值滿足不等式:  $x \leq -1$  与  $x \geq +1$  时就不再收敛。然而, 如果在复数域中来考虑这个現象, 它的背景就完全可以弄清楚了。实际上, 分式  $\frac{1}{1+x^2}$  的分母当

$x = \pm i$  时为零, 从而自变数的这两个值对于我們的函数来說是它的奇异值。当我們把复数  $\alpha = a + bi$  表示为以  $a$  与  $b$  为坐标的平面上的点, 則由于上面指出的两个奇异点与坐标原点的距离等于一, 我們可以断定: 給定的函数在以坐标原点为中心, 以一为半径的圆的内部沒有奇

异点,而在它的圓周上却有奇异点。这种情况,我們将在正文中加以证明,就决定了給定的級数当  $x$  的值的模大于 1 时的发散性。

最后关于本教程的計劃有几句話。在头几章里我們將研究一些在实数分析中已知的基本概念与运算在复数域中的推广,例如极限、导数、积分等;这样一来,类似于实数域中的情形,我們將建立一系列研究复变函数的分析工具。在这个基础有了之后,我們才来搞清楚所謂解析函数的一类可导的复变函数的基本性质,也就是說,我們来闡明这类函数的理論的最重要部分。



# 第一章 复数

## § 1. 复数及其运算

**1. 复数概念** 具有一定顺序的一对实数  $a$  与  $b$  叫做一个复数  $\alpha$ :  $\alpha = (a, b)$ 。假如  $b = 0$ , 我們可以把这相应的一对簡記作  $a$ , 就是說規定  $(a, 0) = a$ 。所以, 全部实数是全部复数的一部分。在作为一对实数引进了复数的概念之后, 我們来确定这些数的基本运算法則。

因为全部实数是全部复数的一部分, 所以, 当建立复数的基本算术运算时, 我們必須要求, 对于实数应用这些运算所得到的数, 跟在实数的算术中所得到的数相同。另一方面, 如果我們希望在分析的問題中使得复数有广泛的应用, 我們还应当要求所引进的基本运算, 能够适合实数算术中的一般公理。

**2. 复数的加法与乘法** 我們用下面的等式来确定复数  $\alpha = (a, b)$  与  $\beta = (c, d)$  的加法:

$$\alpha + \beta = (a + c, b + d). \quad (\text{I})$$

应用这个定义到两个实数  $a$  与  $c$  上, 我們得到

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0) = a + c,$$

这表示对于加法来說, 滿足了我們引进运算法則时的第一个要求。

我們用下面的等式来定义两个复数  $\alpha$  与  $\beta$  的乘法:

$$\alpha\beta = (ac - bd, ad + bc). \quad (\text{II})$$

应用这个定义到两个实数  $a$  与  $c$  上, 便成为

$$(a, 0)(c, 0) = (ac, 0) = ac,$$

这表示乘法运算与实数的算术运算沒有矛盾。由定义(I)与(II), 容易驗明复数的加法运算与乘法运算遵循大家所知道的算术的五个法則:

1) 加法交换律:  $\alpha + \beta = \beta + \alpha,$