复变函数引论

И. И. 普里瓦洛夫 著

闵嗣鹤 程民德 董怀允 吴文达 萧树铁 陈 杰 译

许 宝 騄 校

育出版社

复 变 函 数 引 论

И. И. 普 里 瓦 洛 夫 著
闵嗣鹤 程民德 董怀允
吴文达 萧树铁 陈 杰 译
许 宝 騄 校

人 民 教 育 出 版 社

本书系伊·伊·普里瓦洛夫(И. И. Привалов)著"复变函数引论"(Введение в теорию функции комплексного переменого)1948年第八版译出，并参照原书1954年第九版修订过。

本书可作为综合大学和师范学院数学系教学参考书。

简装本说明

目前850×1168毫米规格纸张较少，本书暂以787×1092毫米规格纸张印刷，定价相应减少20%。希鉴谅。

复变函数引论

И. И. 普里瓦洛夫著

闵嗣鹤等译

许宝騄校

人民教育出版社(北京沙滩后街)

上海商务印刷厂印装

新华书店上海发行所发行

各地新华书店经售

統一书号13012·0115　开本787×1092 1/32　印張15

字数366,000　印数57,201—97,200　定价(5)半1.12

1956年8月第1版　1978年4月上海第17次印刷

第六版序

插入单独一章，第十一章，来对椭圆函数的初等理論作专题叙述，是这一版与以前各版的主要区别。

伊·普里瓦洛夫。

第五版序

在这一版里，我的书“复变函数引論”对前一版的正文有了部分的修改与补充。在这个工作中，接受了阿·伊·馬尔古謝維奇的帮忙，我对他表示深刻的謝意。

伊·普里瓦洛夫。

在印行第九版以前，本书（原著）經阿·伊·馬尔古謝維奇教授重新全部审閱过，幷作了必要的修訂。

目录

第三章 綫性变换与其他的簡单变换

第四章 哥西定理·哥西积分

第五章 解析函数項級数·解析函数的冪級数展开式

第六章 单値函数的孤立奇异点

第七章 残数理論

第八章 毕卡定理

第九章 无穷乘积与它对解析函数的应用

第十章　解析开拓

第十一章　椭圓函数理論初步

第十二章 保角映射理論的一般原則

第十三章 单叶函数的一般性质

引　論

那些在数学中必須考慮的运算可以分为两类: 正的运算与逆的运算。例如,对应于加法运算的逆运算是减法,对应于乘法的是除法,对应于正整数次乘方的就是开方。

对两个任意的正整数施行加法运算,結果我們总还是得到正整数;換句話說,从自然数系出发,通过正运算加法,我們不会超出这个系的范圍。但逆运算——减法——就把我們引出了自然数系的范圍之外,并且只有在把零与負整数合并到自然数系之后,这个逆运算的施行才成为永远可能。第二个逆运算——除法——,为了它自己的能够施行,就要求一个更广泛的数的概念,这个更广泛的概念是借助于分数的引进才完成的。全部整数与分数合称为有理数,这个有理数系,对于加法、减法、乘法与除法等前面四个代数基本运算来說,是封閉的,也就是說,对任意两个有理数(除了用零除以外)施行这些运算中的任何一个时,結果得到的将依旧是这个系中的元素——有理数。最后,逆运算——开方——甚至在最簡单的二次根的情形,就一方面給我們以非有理实数的例子,即所謂无理数,而另一方面給我們以 $y\sqrt{-1}$ 形式的数,其中 y 表示实数。$y\sqrt{-1}$ 形式的数,其中 y 是任意一个不等于零的实数,称为純虛数。

从以上所提到的这些例子就已經可以看出,逆运算使我們感到数的概念有逐漸扩充的必要。假如我們現在来看比开平方根还更較复杂一些的逆运算——解 $ax^2+bx+c=0$ 形式的二次方程,其中 a, b 与 c 都是实数,那末我們就会看到,它的根将是 $x+y\sqrt{-1}$ 形式的数,其中 x 与 y 都表示实数。这样的数称为复数。当 $y=0$ 时复数退化成实数,而当 $x=0$, $y\neq 0$ 时它就成为純虛数。复数的全体,包含了全部实

数，是一个对于所有的数学运算来說都封閉的数域。例如，在代数学中大家都知道，任一个复系数的 n 次方程的根就全都是复数。在复数域中能够施行所有的数学运算而使运算結果不至于超出这个数域的范圍，这一点，在极大的程度上說明了这种数在数学中所具有的巨大的意义。

在本书中我們将研究复变数 $z=x+y\sqrt{-1}$ 的函数的性质，其中 x 与 y 都是独立实变数。复变函数有它自己的很多的应用，一方面是在各种实用数学課目上，如理論物理、流体动力学、彈性理論、天体力学等，另一方面也在純粹数学的各个部門上如代数、解析数論、微分方程等。除此而外，复变函数理論是一种异常諧合一致而且具有完整的邏輯系統的理論建筑，通曉这个理論中的一些基本問題，无疑地，必須是数学教育的內容之一。

为了指出复变函数的方法的力量，我現在只来提起在純粹数学范圍內借助于这种方法而做成的某些巨大成果：素数分布方面的最困难的問題就建立在与某一个复变函数的零点的分布的关系上；关于任意一个正整数表为有限个数的任意次方之和的瓦林問題也是在复变函数的方法的基础上解决的；天体力学方面最困难的問題，所謂“三体”問題，其一般形式也还是由于吸取了复变分析的方法而解决的。最后我們还可以从讀者所熟知的一些基本数学部門中举出許多例子来說明复变函数所具有的巨大意义与它的特殊作用。

以下仅限于少数几个例子的叙述。例如关于每一个代数方程至少有一个复数根的命題是代数学的基本定理。其次，复数在有理函数的积分与常系数綫性微分方程求解的問題中所具有的意义，在积分学中，也是众所熟知的。我們还必須指出，許多古典分析的問題，只是由于复变分析的出現才得到了明确的形式幷找到了完全的解答。例如，大家所知道的尤拉恒等式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 就曾經用来揭破如下所述的貝路利与莱伯尼兹的詭論:

由于

$$\operatorname{arctg} x=\int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

我們把分式$\frac{1}{1+x^2}$分解为部分分式①

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right),$$

积分后，就求出：

$$\operatorname{arctg} x=\frac{1}{2i}\ln\frac{i-x}{i+x}.$$

令 $x=1$，我們得到

$$\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2i}\ln\frac{i-1}{i+1}=\frac{1}{4i}\ln\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^2=\frac{1}{4i}\ln(-1)=$$

$$=\frac{1}{8i}\ln(-1)^2=\frac{1}{8i}\ln 1=0,\text{ 这就是說}\frac{\pi}{4}=0。$$

尤拉指出了指数函数 e^z 的周期性之后就揭破了这个詭論。事实上，用 $-iz$ 来代替尤拉恒等式中的 x，我們得到

$$e^z=\cos(-iz)+i\sin(-iz)=\cos iz-i\sin iz. \tag{1}$$

在这个等式中用 $z+2\pi i$ 代替 z，我們就有

$$e^{z+2\pi i}=\cos(iz-2\pi)-i\sin(iz-2\pi)=\cos iz-i\sin iz=e^z②,$$

也就是說，当我們用 $z+2\pi i$ 代替 z 时，函数 e^z 不改变它的数值，换句話說，$2\pi i$ 是这个函数的周期。因此，从等式 $e^z=w$ 所确定的自然对数 $z=\ln w$，对应于一个确定的 w 的值，由于 e^z 的周期性，就有无穷多个不同的数值，其中每两个值彼此相差一个 $2\pi i$ 的倍数。当 $w>0$ 时，$z=\ln w$ 有一个数值是实数，所有其他的数值全是虚数。$w<0$ 时，则 $z=\ln w$ 的数值，无例外地，全是虚数。所以，对数函数是多值的，假如我

① 以后我們总用記号 i 表示$\sqrt{-1}$。

② 这里我們利用了复变数的正弦函数与余弦函数的周期性。这将在第 II 章，§4 第 7 段中证明。

們取 $\ln 1=2\pi i$，議論就无从立脚了。

尤拉恒等式揭露出三角函数与指数函数之間的关系，另外，如果在公式(1)中用 $-z$ 代替 z，我們有

$$e^{-z}=\cos iz+i\sin iz. \tag{2}$$

对恒等式(1)与(2)施用加法与减法，我們就得到

$$\operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}=\cos iz,\quad \operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}=-i\sin iz,$$

这些公式給出了双曲綫正弦函数与双曲綫余弦函数通过三角函数的表达式，而这样一来，从普通三角函数的公式出发就可以得到全部的双曲綫三角函数的公式。

我們还要从冪級数的理論中来指出一个事实，它的完滿的解釋只有从复变函数的观点才能給出来。在分析中大家都知道：展开式

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$$

只有当 x 的值滿足不等式 $|x|<1$ 时才成立。如果我們限制在实变数 x 的范圍，我們就沒有可能去发現原来函数的性质以及它的級数却只有在 x 的值适合条件 $-1<x<+1$ 时才收斂这一事实之間的关系。因为事实上，函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 对于从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的区間內的任何 x 的值都是确定的，而且自变数的值 -1 与 $+1$ 对于它又幷非是什么特别的数值。因此我們不能了解为什么級数 $1-x^2+x^4-x^6+\cdots$ 当 x 的值滿足不等式：$x\leqslant -1$ 与 $x\geqslant +1$ 时就不再收斂。然而，如果在复数域中来考慮这个現象，它的背景就完全可以弄清楚了。实际上，分式 $\frac{1}{1+x^2}$ 的分母当 $x=\pm i$ 时为零，从而自变数的这两个值对于我們的函数来說是它的奇异值。当我們把复数 $\alpha=a+bi$ 表示为以 a 与 b 为坐标的平面上的点，則由于上面指出的两个奇异点与坐标原点的距离等于一，我們可以断定：給定的函数在以坐标原点为中心，以一为半徑的圓的內部沒有奇

异点，而在它的圓周上却有奇异点。这种情况，我們将在正文中加以证明，就决定了給定的級数当 x 的值的模大于 1 时的发散性。

最后关于本教程的計划有几句話。在头几章里我們将研究一些在实数分析中已知的基本概念与运算在复数域中的推广，例如极限、导数、积分等；这样一来，类似于实数域中的情形，我們将建立一系列研究复变函数的分析工具。在这个基础有了之后，我們才来搞清楚所謂解析函数的一类可导的复变函数的基本性质，也就是說，我們来闡明这类函数的理論的最重要部分。

第一章　复数

§1. 复数及其运算

1. 复数概念　具有一定顺序的一对实数 a 与 b 叫做一个复数 α: $\alpha=(a,b)$。假如 $b=0$，我們可以把这相应的一对簡記作 a，就是說規定 $(a,0)=a$。所以，全部实数是全部复数的一部分。在作为一对实数引进了复数的概念之后，我們来确定这些数的基本运算法則。

因为全部实数是全部复数的一部分，所以，当建立复数的基本算术运算时，我們必須要求，对于实数应用这些运算所得到的数，跟在实数的算术中所得到的数相同。另一方面，如果我們希望在分析的問題中使得复数有广泛的应用，我們还应当要求所引进的基本运算，能够适合实数算术中的一般公理。

2. 复数的加法与乘法　我們用下面的等式来确定复数 $\alpha=(a,b)$ 与 $\beta=(c,d)$ 的加法：

$$\alpha+\beta=(a+c,b+d). \tag{I}$$

应用这个定义到两个实数 a 与 c 上，我們得到

$$(a,0)+(c,0)=(a+c,0)=a+c,$$

这表示对于加法来說，滿足了我們引进运算法則时的第一个要求。

我們用下面的等式来定义两个复数 α 与 β 的乘法：

$$\alpha\beta=(ac-bd,ad+bc). \tag{II}$$

应用这个定义到两个实数 a 与 c 上，便成为

$$(a,0)(c,0)=(ac,0)=ac,$$

这表示乘法运算与实数的算术运算沒有矛盾。由定义(I)与(II)，容易驗明复数的加法运算与乘法运算遵循大家所知道的算术的五个法則：

1）加法交换律：　　$\alpha+\beta=\beta+\alpha$,