数值分析

李庆扬　王能超　易大义

华中工学院出版社

数 值 分 析

李庆扬　王能超　易大文　编

TJ1183/25

北京师范大学
1310053
藏书
图书馆

华 中 工 学 院 出 版 社

数 值 分 析

李庆扬 王能超 易大义

责任编辑 孔繁民
封面设计 俞缦丽
*
华中工学院出版社
（武昌喻家山）
华中工学院出版社出版发行部发行
湖北省计委电子计算站印刷科印刷
*
开本 850×1168 1/32 印张 12 1/8
1982 年 7 月西版 1983 年 7 月第三次印刷
印数：27,001—42,000 字数：304 千字
统一书号：13255.006
定价：2.90 元

TY1183/25

前　　言

1980年7月在大连召开的工科院校“应用数学专业教学学术会议”，根据教育部直属工科院校“应用数学专业教学计划”，制定了“数值分析”课大纲，并决定由清华大学、华中工学院、浙江大学合编试用教材。本书第一版就是根据会议决定编写的。全书共分九章，第一、二、三章由李庆扬编写，第四、五、六章由王能超编写，第七、八、九章由易大义编写。

1981年元月在杭州召开的工科院校计算数学第一次教材审稿会，对本教材初稿进行了审查，1982年元月在上海交大召开的第二次计算数学教材审稿会，又对本书第一版提出了修改意见。会议考虑到理工科院校各专业普遍开设“数值分析”课的情况，重新修订了大纲（学时72）。本书第二版就是根据新大纲的要求修改的。它保持了第一版的主要内容及特点，但选材更注意基本要求，减少了部分内容，增加了部分习题答案。本书可作为理工科院校应用数学，力学，物理，计算机软件等专业大学生及其他专业研究生“数值分析”（或“计算方法”）课的教材，也可供学习“计算方法”的科技工作者参考。

我们对参加两次审稿会的同志表示衷心感谢，他们以认真负责的态度对本书提出了许多宝贵意见，对提高教材质量起了很大作用。

编　　者

1982年7月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章 绪论

§1 数值分析的对象与特点

数值分析是研究各种数学问题求解的数值计算方法。在电子计算机成为数值计算的主要工具以后，则要求研究适合于计算机使用的数值计算方法。为了更具体地说明数值分析的研究对象，我们考察用计算机解决科学计算问题时经历的几个过程：

$\boxed{\text{实际问题}} \to \boxed{\text{数学模型}} \to \boxed{\text{数值计算方法}} \to \boxed{\text{程序设计}} \to$

$\to \boxed{\text{上机计算求出结果}}$

由实际问题的提出到上机求得问题解答的整个过程都可看作是应用数学的任务。如果细分的话，由实际问题应用有关科学知识和数学理论建立数学模型这一过程，通常作为应用数学的任务。从根据数学模型提出求解的数值计算方法直到编出程序上机算出结果，这一过程则是计算数学的任务，这也就是数值分析研究的对象。因此，数值分析就是研究用计算机解决数学问题的数值计算方法及其理论。数值分析的内容，例如，积分数值计算，函数逼近与计算，方程求根数值解法，微分方程数值解法等，都是以数学问题为研究对象的。可见，数值分析也是数学的一个分支，只是它不像纯数学那样只研究数学本身的理论，而着重研究求解的数值方法及与此相关的理论，包括方法的收敛性、稳定性及误差分析，还要根据计算机特点研究计算时间最省（或计算费用最省）的计算方法。有的方法在理论上虽不够严格，但通过实际计算、对比分析等手段，被证明是行之有效的方法，也可采用。因

此，数值分析既有纯数学高度抽象性与严密科学性的特点，又有应用的广泛性与实际试验的高度技术性的特点，是一门与使用计算机密切结合的实用性很强的数学课程。例如，很多科学技术问题都须求线性代数方程组的解，而在“线性代数”课中只介绍求解方程组的一般理论和精确解法。但实际问题要解的方程未知量有时为几百个或几千个，有的甚至多达十几万个，且方程系数为零的个数很少。显然，“线性代数”中介绍的理论和方法是不能解决这类问题的，还必须根据方程特点，研究适合于计算机使用的、计算量较省的求解方法及有关理论。为保证能在机器上算出正确答案，通常还应根据计算机容量、速度、字长等指标，研究具体求解的计算步骤及程序设计技巧；有时还要通过试验才能定出最好的计算方案。这些都是“数值分析”要研究的问题，由此也可看到它与数学基础的关系。

根据“数值分析”的特点，学习时我们首先要注意掌握方法的基本原理和思想，要注意方法处理的技巧及其与计算机的结合，要重视误差分析、收敛性及稳定性的基本理论；其次，要通过例子，学习使用各种数值方法解决实际计算问题；最后，为了掌握本课的内容，还应做一定数量的理论与计算练习。由于本课内容包括了微积分、代数、常微分方程的数值方法，读者必须掌握这几门课的基本内容才能学好这一课程。

§2 误差来源与误差分析的重要性

用计算机解决科学计算问题首先要建立数学模型，它是对被描述的实际问题进行抽象、简化而得到的，因而是近似的。我们把数学模型与实际问题之间出现的这种误差称为**模型误差**。只有实际问题提法正确，建立数学模型时又抽象、简化得合理，才能得到好的结果。由于这种误差难于用数量表示，通常都假定数学

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

模型是合理的，这种误差可忽略不计，在“数值分析”中不讨论它。在数学模型中往往还有一些根据观测得到的物理量，如温度、长度、电压等等，这些参量显然也包含误差。这种由观测产生的误差称为**观测误差**，在“数值分析”中也不讨论这种误差。数值分析只研究用数值方法求解数学模型产生的误差。

当数学模型不能得到精确解时，通常要用数值方法求它的近似解，其近似解与精确解之间的误差称为**截断误差**或**方法误差**。例如，用$f(x)$的台劳(Taylor)展开式部分和$S_n(x)$近似函数$f(x)$，其余项$R_n(x)$就是真值$f(x)$的截断误差。有了求解数学问题的计算公式以后，用计算机做数值计算时，由于计算机位数有限，用有限位进行计算，对超过位数的数字就要进行舍入，由此产生的误差称为**舍入误差**。例如，用3.1416作π的近似值产生的误差就是舍入误差。此外，在有的计算公式中初始值的误差对计算结果有很大影响，由初值引起的误差称为**初值误差**。因此，“数值分析”中除了研究求解数学问题的计算方法外，还要研究计算结果的误差是否满足精度要求，这就是误差估计问题。本书主要讨论方法的截断误差，对舍入误差及初值误差只做一些定性分析。

例1 计算$I_n = e^{-1}\int_0^1 x^n e^x dx \quad (n=0,1,\cdots)$ 并估计误差。

由分部积分可得计算I_n的递推公式

$$I_n = 1 - nI_{n-1} \qquad (n=1,2,\cdots) \qquad (2.1)$$

$$I_0 = e^{-1}\int_0^1 e^x dx = 1 - e^{-1}$$

若计算出I_0，代入（2.1），可逐次求出$I_1, I_2, \cdots$的值。要算出I_0就要先计算e^{-1}，若用台劳展开部分和

$$e^{-1} \approx 1 + (-1) + \frac{(-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k!}$$

并取$k=7$，用4位小数计算，则得$e^{-1}\approx 0.3679$，截断误差$R_7 = |e^{-1} - 0.3679| \leqslant \frac{1}{8!} < \frac{1}{4}\times 10^{-4}$。计算过程中小数点后第5

位的数字按四舍五入原则舍入，由此产生的舍入误差这里先不讨论。当初值I_0取为$I_0 \approx 0.6321 = \widetilde{I}_0$时，用(2.1)递推的计算公式为

$$(\mathrm{A})\begin{cases}\widetilde{I}_0 = 0.6321\\ \widetilde{I}_n = 1 - n\widetilde{I}_{n-1} \qquad (n=1,2,\cdots)\end{cases}$$

计算结果见表1-1的$\widetilde{I}_n$列。用$\widetilde{I}_0$近似I_0产生的误差$E_0 = I_0 - \widetilde{I}_0$就是初值误差，它对后面计算结果是有影响的。

表1-1

n	$\widetilde{I}_n$(用(A)算)	I^*(用(B)算)	n	$\widetilde{I}_n$(用(A)算)	I_n^*(用(B)算)
0	0.6321 ↓	0.6321	5	0.1480 ↓	0.1455
1	0.3679	0.3679	6	0.1120	0.1268
2	0.2642	0.2643	7	0.2160	0.1121
3	0.2074	0.2073	8	−0.728	0.1035
4	0.1704	0.1708 ↑	9	7.552	0.0684 ↑

从表中看到$\widetilde{I}_8$出现负值，这与一切$I_n>0$相矛盾。实际上，由积分估值得

$$\frac{e^{-1}}{n+1} = e^{-1}\left(\min_{0<x<1} e^x\right)\int_0^1 x^n dx < I_n < e^{-1}\left(\max_{0<x<1} e^x\right)\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \tag{2.2}$$

因此，当n较大时用$\widetilde{I}_n$近似I_n显然是不正确的。这里计算公式与每步计算都是正确的，那么什么原因使计算结果错误呢？主要就是初值$\widetilde{I}_0$有误差$E_0 = I_0 - \widetilde{I}_0$，由此引起以后各步计算的误差$E_n = I_n - \widetilde{I}_n$，它满足关系

$$E_n = -nE_{n-1} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

容易推得

$$E_n = (-1)^n (n!) E_0$$

这说明$\widetilde{I}_0$有误差E_0，则$\widetilde{I}_n$就有E_0的$n!$倍误差。例如，$n=8$，若$|E_0|=\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，则$|E_8|=8!\times|E_0|>2$。这就说明$\widetilde{I}_8$完全不能近似$I_8$了。

如果我们用新的计算方案，由（2.2）取$n=9$，得

$$\frac{e^{-1}}{10}<I_9<\frac{1}{10}$$

若粗略取$I_9\approx\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}+\frac{e^{-1}}{10}\right)=0.0684=I_9^*$，然后将公式（2.1）倒过来算，即由$I_9^*$算出$I_8^*$，$I_7^*$，…，$I_0^*$，公式为

$$\text{(B)}\quad \begin{cases} I_9^*=0.0684 \\ I_{n-1}^*=\frac{1}{n}(1-I_n^*) \qquad (n=9,8,\cdots,1) \end{cases}$$

计算结果见表1-1的I_n^*列.我们发现I_0^*与I_0的误差不超过10^{-4}.由于$|E_0^*|=\frac{1}{n!}|E_n^*|$，$E_0^*$比$E_n^*$缩小了$n!$倍，因此，尽管$E_9^*$较大，但由于误差逐步缩小，故可用$I_n^*$近似$I_n$。反之，当用方案（A）计算时，尽管初值$\widetilde{I}_0$相当准确，由于误差传播是逐步扩大的，因而计算结果不可靠．这个例子说明，在数值计算中如不注意误差分析，用了类似方案（A）的计算公式，就会出现“差之毫厘，失之千里”的错误结果。尽管数值计算中估计误差比较困难，我们仍应重视计算过程的误差分析。

§3 误差的基本概念

3-1 误差与误差限

定义1 设x为准确值．x^*为x的一个近似值，称$e^*=x^*-x$为近似值的**绝对误差**，简称**误差**。

注意这样定义的误差e^*可正可负，故绝对误差不是误差绝对值。当绝对误差为正时近似值偏大，叫**强近似值**；当绝对误差为

负时近似值偏小，叫**弱近似值**.

通常我们不能算出准确值x，也不能算出误差e^*的准确值，只能根据测量工具或计算情况估计出误差的绝对值不超过某正数ε^*，也就是误差绝对值的一个上界. ε^*叫做近似值的**误差限**，它总是正数. 例如，用毫米刻度的米尺测量一长度x，读出和该长度接近的刻度x^*，x^*是x的近似值，它的误差限是0.5毫米，于是$|x^*-x|\leqslant 0.5$毫米；如读出的长度为765毫米，则有$|765-x|\leqslant 0.5$. 从这不等式我们仍不知道准确的x是多少，但知$764.5\leqslant x\leqslant 765.5$，说明$x$在区间$[764.5, 765.5]$内.

对于一般情形$|x^*-x|\leqslant\varepsilon^*$，即

$$x^*-\varepsilon^*\leqslant x\leqslant x^*+\varepsilon^*$$

这个不等式有时也表示为

$$x=x^*\pm\varepsilon^*$$

3-2　相对误差与相对误差限

误差限的大小还不能完全表示近似值的好坏. 例如，有两个量$x=10\pm1$，$y=1000\pm5$，则

$$x^*=10,\ \varepsilon_x^*=1;\ y^*=1000,\ \varepsilon_y^*=5$$

虽然ε_y^*比ε_x^*大 4 倍，但$\varepsilon_y^*/y^*=\dfrac{5}{1000}=0.5\%$比$\varepsilon_x^*/x^*=\dfrac{1}{10}=10\%$

要小得多，这说明y^*近似y的程度比x^*近似x的程度要好得多. 所以，除考虑误差的大小外，还应考虑准确值x本身的大小. 我们把近似值的误差e^*与准确值x的比值

$$\frac{e^*}{x}=\frac{x^*-x}{x}$$

称为近似值x^*的**相对误差**，记作e_r^*.

在实际计算中，由于真值x总是不知道的，通常取

$$e_r^*=\frac{e^*}{x^*}=\frac{x^*-x}{x^*}$$

作为x^*的相对误差，条件是$e_r^*=\frac{e^*}{x^*}$较小，此时

$$\frac{e^*}{x}-\frac{e^*}{x^*}=\frac{e^*(x^*-x)}{x^*x}=\frac{(e^*)^2}{x^*(x^*-e^*)}=\frac{(e^*/x^*)^2}{1-(e^*/x^*)}$$

是e_r^*的平方项级，故可忽略不计。

相对误差也可正可负，它的绝对值上界叫做**相对误差限**，记作ε_r^*：$\varepsilon_r^*=\frac{\varepsilon^*}{|x^*|}$。

据定义，上例$\frac{\varepsilon_x^*}{|x^*|}=10\%$与$\frac{\varepsilon_y^*}{|y^*|}=0.5\%$分别为$x$与$y$的相对误差限，可见$y^*$近似$y$的程度比$x^*$近似$x$的程度好。

3-3 有效数字

当准确值x有多位数时，常常按**四舍五入**的原则得到x的前几位近似值x^*，例如

$$x=\pi=3.14159265\cdots$$

取3位 $x_3^*=3.14$，$\varepsilon_3^*\leqslant 0.002$

取5位 $x_5^*=3.1416$，$\varepsilon_5^*\leqslant 0.000008$

它们的误差都不超过末位数字的半个单位，即

$$|\pi-3.14|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-2},\quad|\pi-3.1416|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-4}$$

若近似值x^*的误差限是某一位的半个单位，该位到x^*的第一位非零数字共有n位，我们就说x^***有n位有效数字**。如取$x^*=3.14$作π的近似值，x^*就有3位有效数字；取$x^*=3.1416$作π的近似值，x^*就有5位有效数字。x^*有n位有效数字可写成标准形式

$$x^*=\pm10^m\times(a_1+a_2\times10^{-1}+\cdots+a_n\times10^{-(n-1)})\tag{3.1}$$

其中，a_1是1到9中的一个数字，$a_2,\cdots,a_n$是0到9中的一个数字，m为整数，且

$$|x-x^*|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{m-n+1}\tag{3.2}$$

例2 按四舍五入原则写出下列各数具有5位有效数字的近似数：187.9325，0.03785551，8.000033，2.7182818

按定义，上述各数具有5位有效数字的近似数分别是

187.93，0.037856，8.0000，2.7183

注意$x=8.000033$的5位有效数字近似数是8.0000而不是8，因为8只有1位有效数字。

例3 重力常数g，如果以米/秒^{2}为单位，$g\approx 9.80$米/秒^2；若以千米/秒^{2}为单位，$g\approx 0.00980$千米/秒^2。它们都具有3位有效数字。因为，按第一种写法

$$|g-9.80|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-2}$$

据(3.1)，这里$m=0,n=3$，按第二种写法

$$|g-0.00980|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-5}$$

这里$m=-3$，$n=3$。它们虽然写法不同，但都具有3位有效数字。至于绝对误差限，由于单位不同结果也不同，$\varepsilon_1^*=\frac{1}{2}\times 10^{-2}$米/秒^2，$\varepsilon_2^*=\frac{1}{2}\times 10^{-5}$千米/秒^2，而相对误差都是

$$\varepsilon_r^*=0.005/9.80=0.000005/0.00980$$

注意相对误差与相对误差限是无量纲的，而绝对误差与误差限是有量纲的。

例3说明**有效位数与小数点后有多少位数无关**。然而，从(3.2)可得到具有n位有效数字的近似数x^*，其绝对误差限为

$$\varepsilon^*=\frac{1}{2}\times 10^{m-n+1}$$

在m相同的情况下，n越大则10^{m-n+1}越小，故**有效位数越多，绝对误差限越小**。

至于有效数字与相对误差限的关系，有

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com