

高等学校教材

电磁场理论

林德云 全泽松 赵玉书 编著

电子工业出版社

电 磁 场 理 论

林德云、全泽松、赵玉书 编著

电子工业出版社

内 容 提 要

本书主要讲述电磁场的基本原理和基本分析方法。全书共分七章,包括静电场、静电场边值问题的解法、稳恒电流与稳恒磁场、时变电磁场、平面电磁波、电磁波的辐射和狭义相对论。每章末均附有一定量的练习题。

本书是全国高等院校工科电子类统编教材之一,可作为电磁场与微波技术专业、天线专业、无线电技术专业等的教材或教学参考书,亦可供从事电磁场、微波、天线工作的科学技术人员参考。

电 磁 场 理 论

林德云、全泽松、赵玉书 编著

责任编辑 洋溢

电子工业出版社出版(北京万寿路)

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

开本 787×1098 1/16 印张: 18³ 字数: 460 千字

1990年2月第1版 1990年2月第1次印刷

印数: 1300册 定价: 3.75元

ISBN 7-5053-0713-4/TN · 262-

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定,我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力,有关出版社的紧密配合,从1978年至1985年,已编审、出版了两轮教材,正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要,贯彻“努力提高教材质量,逐步实现教材多样化,增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材”的精神,我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会,在总结前两轮教材工作的基础上,结合教育形势的发展和教学改革的需要,制订了1986~1990年的“七五”(第三轮)教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近400种选题。这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿,是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中经院校推荐,由编审委员会(小组)评选择优产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量,作出了不懈的努力。

限于水平和经验,这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处,希望使用教材的单位,广大教师和同学积极提出批评建议,共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

机械电子工业部教材办公室

前 言

本书系按电子工业部制定的工科电子类专业教材 1986~1990 年编审出版规划,由电磁场与微波技术编审委员会电磁场理论小组组织征稿、审定,并推荐出版。责任编委杨铨让。

本书由清华大学、电子科技大学、西安电子科技大学合作编写。东南大学杨铨让担任主审。

本课程的参考教学时数为 80~100 学时,主要讲述电磁场的基本原理和基本分析方法。全书共分七章。第一章静电场,主要讲述静电场的基本性质与基本方程,一维场的基本解法,点源的 δ 函数表示,静电势的多极展开极化,介质中静电场的基本方程和边界条件,静电场能量与静电力。第二章静电场边值问题解法,主要介绍静电场的解析解法,其中包括镜象法、分离变量法、复势函数与保角变换法、格林函数法,也扼要介绍了一种数值方法——有限差分法。第三章稳恒电流与稳恒磁场,主要讲述稳恒电流电场与静电场的比拟、对偶关系,稳恒磁场的基本方程,矢势及矢势的多极展开,磁标势及其微分方程,电磁感应与电感,磁场能量与磁场力。第四章时变电磁场,主要讲述时变电磁场方程组,时变电磁场中的势函数,标量波动方程与标量波函数,矢量波动方程与矢量波函数、推迟势,电磁场的能量与波印亭定理,时变电磁场中的格林函数。第五章平面电磁波,主要讲述无耗媒质中的均匀平面波,有耗媒质中的均匀平面波,电磁波的极化,各向异性媒质中的平面电磁波,波的色散,非均匀平面波,平面电磁波的反射与折射,有界空间中的电磁波,金属波导与谐振腔。第六章电磁波的辐射,主要讲述推迟势的多极展开,电偶极子与磁偶极子辐射,电磁波的衍射,惠更斯-基尔霍夫原理。第七章狭义相对论,主要讲述狭义相对论的基本原理,相对论的时空性质,物理规律协变性的数学形式,电磁规律的四维表述,电磁场的变换。

本课程的先修课程是普通物理与高等数学(含场论,复变函数、数理方程与特殊函数等)。本教材虽然是针对电磁场与微波技术专业本科生编写的,但也适用于无线电技术类专业。鉴于各院校开设课程的情况不完全相同,在讲授时可酌情取舍或增减。

本书第一第二章由西安电子科技大学赵玉书编写,第四第五章由清华大学林德云、李国定编写,第三第六第七章由电子科技大学全泽松编写,最后由清华大学林德云进行统编。

东南大学杨铨让教授认真审阅了全部书稿,并提出了许多宝贵意见,在此表示诚挚的感谢。由于编者水平有限,书中难免还存在一些缺点和错误,殷切希望广大读者批评指正。

编者 1989. 3.

目 录

前言	v
第一章 静电场	1
1.1 库仑定律	1
1.2 电场强度	3
1.3 高斯定理	4
1.4 静电场的旋度 电势(或电位)	6
1.5 泊松方程与拉普拉斯方程	9
1.6 用 δ 函数描述点电荷的密度	10
1.7 泊松方程的积分形式解	12
1.8 电势的多极展开	14
1.9 多导体系统 部分电容	19
1.10 介质的极化	22
1.11 介质中的场方程 介电常数	24
1.12 边界条件	27
1.13 静电场的能量	30
1.14 电场力	34
习题	37
第二章 静电场边值问题的解法	42
2.1 边值问题提法	42
2.2 唯一性定理	43
2.3 镜象法	44
2.4 分离变量法	55
2.5 复变函数法	73
2.6 格林函数法	84
2.7 有限差分法	91
习题	94
第三章 稳恒电流与稳恒磁场	98
3.1 稳恒电流与稳恒电流的电场	98
3.2 安培定律 磁场 毕奥-萨伐尔定律	105
3.3 稳恒磁场的基本方程	109
3.4 磁场的矢势及其微分方程	111
3.5 矢势的多极展开	115
3.6 介质的磁化 磁化电流	118
3.7 磁场强度 介质中稳恒磁场的基本方程	119
3.8 磁场的边界条件	121
3.9 磁场的标势及其微分方程	125
3.10 法拉第电磁感应定律	129

3.11	互感和自感	132
3.12	磁场能量	137
3.13	磁场力	139
	习题	142
第四章	时变电磁场	147
4.1	麦克斯韦方程组	147
4.2	时变场中的电磁势函数	155
4.3	齐次波动方程的解	160
4.4	时变场的格林函数	168
4.5	时变场的波印廷定理	172
4.6	解的唯一性定理与辐射条件	177
	习题	178
第五章	平面电磁波	180
5.1	无损耗媒质中的均匀平面波	180
5.2	有损耗媒质中均匀平面波的传播特性	186
5.3	电磁波的极化	188
5.4	电磁波在各向异性媒质中的传播	192
5.5	媒质的色散与波的色散	201
5.6	非均匀平面波	206
5.7	平面电磁波的反射与折射	207
5.8	平面电磁波对导体平面的投射	215
5.9	多层介质的反射与折射	221
5.10	导波与谐振腔	225
	习题	238
第六章	电磁波的辐射	241
6.1	推迟势的多极展开	241
6.2	电偶极场和电偶极辐射	245
6.3	磁偶极场和磁偶极辐射	248
6.4	线天线辐射	249
6.5	电磁波的衍射	252
	习题	257
第七章	狭义相对论	259
7.1	相对论的基本原理	259
7.2	相对论的时空坐标变换式	261
7.3	相对论的时空观	262
7.4	四维协变量及方程的协变性	264
7.5	电磁规律的四维表述	268
7.6	电磁场的变换关系式	272
	习题	276
附录一	矢量与矢量微分算符 ∇	277
附录二	张量	279

第一章 静 电 场

静电场是指相对于观察者为静止的电荷所产生的场。静电场的最基本的定律是库仑定律,它是由实验结果概括得到的。大量实验证实,当两个点电荷之间的距离 R 小到 10^{-10} 米左右时,库仑定律的准确度仍优于 10^{-9} 。所以本章从库仑定律和迭加原理出发,运用矢量分析,得出真空中静电场的基本方程。在此基础上,再讨论静电场中的导体和导体系统,介质中的静电场,静电场的能量和电场力等。

静电场理论除它本身有着许多实际应用外,熟悉处理它的方法及所得出的结论,将有助于后续各章的学习。

1.1 库 仑 定 律

描述真空中两个静止点电荷之间相互作用力的定律,称为库仑定律。大量实验结果表明,库仑定律可用矢量形式表示为

$$\mathbf{F}_q = \frac{q'q\mathbf{e}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} = -\mathbf{F}_{q'} \quad (1.1-1)$$

式中, q 和 q' 是两个点电荷的电量,单位为库仑(C); R 是 q' 与 q 间的距离,单位为米(m),而 $\mathbf{e}_R$ 是从 q' 指向 q 的单位矢量;

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ 法拉/米 (F/m)},$$

是真空中介电常数; $\mathbf{F}_q$ 是 q' 对 q 的作用力, $\mathbf{F}_{q'}$ 是 q 对 q' 的作用力,两者满足牛顿第三定律。

为了应用方便,将 q' 和 q 的位置用图 1-1 所示的坐标表示,则式(1.1-1)可改写为

$$\mathbf{F}_q(\mathbf{r}) = \frac{qq'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.1-2)$$

式中 $\mathbf{r}'$ 是从坐标原点到 q' 所在点 p' 的矢径, $\mathbf{r}$ 是 q 所在点 p 的矢径。以后均以 $\mathbf{r}$ (或 $\mathbf{r}'$)表示空间一点的位置,用 $f(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 分别表示 $\mathbf{r}$ 点的标量函数和矢量函数。

因为 $\mathbf{F}_q$ 是 q' 作用于 q 的力, q' 是此力的源,故把点 $\mathbf{r}'$ 称作源点, q 所在点 $\mathbf{r}$ 则称作观察点(或场点)。今后当需要区分这两类点时,用带撇号的坐标表示源点,用不带撇号的坐标表示场点。

如果空间同时存在两个以上的点电荷,则根据迭加原理,点电荷 q 在点 $\mathbf{r}$ 所受到的

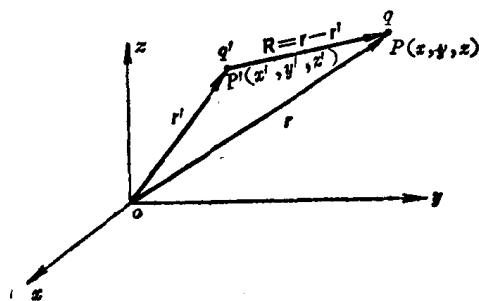


图 1-1

作用力就应是多个源点电荷单独作用力的矢量和,即

$$\mathbf{F}_q(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i'|^3} \quad (1.1-3)$$

式中 q_i' 是位于 $\mathbf{r}_i'$ 处的点电荷。

库仑定律只能直接用于点电荷。所谓点电荷,是指当带电体的尺寸远小于它们彼此间的距离时,将电荷集中于一点而得到的理想化模型。如果上述条件不满足,就不能把带电体当作点电荷,而应认为电荷是分布在一定区域内,称为分布电荷。当然,从物质的结构理论而言,电荷的分布是不连续的,但是即使是很大的原子核,其直径也只有 10^{-14} 米的数量级,所以在研究宏观电磁规律时,可以将电荷看成是连续分布的。当电荷连续分布于一定区域内时,为了定量描述电荷的分布情况,需要引入电荷密度的概念。

在电荷分布的区域 V 内,取体积元 ΔV , 如果其中电量为 Δq , 则定义

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad (1.1-4)$$

为体电荷密度,单位为库仑/米³ (C/m³)。

如果电荷分布区域是厚度为 h 的薄层,且在宏观尺度下 h 很小,则可认为电荷分布在几何曲面上 ($h \rightarrow 0$), 称为面电荷若在该曲面上取面积元 ΔS , 其上电量为 Δq , 则定义

$$\rho_s(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \quad (1.1-5)$$

为面电荷密度,单位为库仑/米² (C/m²)。实际上 Δq 分布于体积元 $\Delta V = h\Delta S$ 内, 即 $\Delta q = \rho h \Delta S$, 因此面电荷密度是

$$\rho_s = \lim_{h \rightarrow 0} \rho h$$

显然,当把带电薄层看成面电荷时,其体电荷密度为无限大。

如果电荷分布在细长的区域中,且其横截面 S 很小时,可忽略其横向尺寸而认为电荷分布在曲线上,称为线电荷。若在该曲线上取线元 Δl , 其中电量为 Δq , 则定义

$$\rho_l(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \quad (1.1-6)$$

为线电荷密度,单位为库仑/米 (C/m)。类似于点电荷,面电荷和线电荷都是在特殊情况下,将分布于一定体积中的电荷加以理想化而引入的概念。

现在利用上面引入的电荷密度求分布电荷对点电荷的作用力。设在电荷分布区域 V 中,点 $\mathbf{r}'$ 处的体积元 dV' 内电荷为

$$dq' = \rho(\mathbf{r}')dV'$$

则 dq' 可看成点电荷,并可用式 (1.1-2) 求它对点电荷 q 的作用力。再由迭加原理,即可得 V 中所有分布电荷对 q 的作用力为

$$\mathbf{F}_q(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}')dV' \quad (1.1-7)$$

至于面电荷或线电荷对 q 的作用力,只需要将上式中的 $\rho(\mathbf{r}')dV'$ 分别换成 $\rho_s(\mathbf{r}')dS'$ 和 $\rho_l(\mathbf{r}')dl'$, 并在电荷分布的曲面或曲线上进行积分即得。所以可将分布电荷对 q 的作用力统一表示为

$$\mathbf{F}_q(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{电荷分布区域}} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dq' \quad (1.1-8)$$

其中

$$dq' = \begin{cases} \rho(\mathbf{r}')dV' & (\text{对于体电荷}) \\ \rho_s(\mathbf{r}')dS' & (\text{对于面电荷}) \\ \rho_l(\mathbf{r}')dl' & (\text{对于线电荷}) \end{cases} \quad (1.1-9)$$

1.2 电场强度

将某些离散的或连续分布的电荷对 q 的作用力,看成是这些电荷在其周围空间产生的场对 q 的作用,即可引入电场这一概念。电场是一种特殊形态的物质。

我们用电场强度 $\mathbf{E}$ 来描述电场,并将场中点 $\mathbf{r}$ 处的电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, 定义为位于该点的单位正试探电荷所受的力。因此,在点 $\mathbf{r}$ 处点电荷 q 所受的力为

$$\mathbf{F}_q(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (1.2-1)$$

式中 $\mathbf{E}$ 的单位是牛顿/库仑 (N/C) 或伏特/米 (V/m)。为了避免因试探电荷的引入而影响原来的场分布,必须令试探电荷的电量趋于零。

比较式 (1.1-2) 和 (1.2-1), 立即得到点 $\mathbf{r}'$ 处的点电荷 q' 在点 $\mathbf{r}$ 处的电场强度为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.2-2)$$

同理, n 个点电荷和分布电荷的电场强度分别为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q'_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|^3} \quad (1.2-3)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{电荷分布区域}} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dq' \quad (1.2-4)$$

式中 dq' 由式 (1.1-9) 给出。

在求分布电荷的电场强度时,积分是在电荷分布区域中对带撇号的坐标进行计算的,此时 $\mathbf{r}$ 当作常矢量,所得结果是 $\mathbf{r}$ 的函数。下面举例说明之。

例 1.2-1 设无限大带电平面,面电荷密度为 ρ_s (常数),求它所产生的电场。

解: 取坐标系如图 1-2, 使带电平面与 $z = 0$ 平面重合。由于电荷分布均匀, $\mathbf{E}$ 与 x, y 无关,故可将场点选在 z 轴上。由图可见,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= z\mathbf{e}_z \\ \mathbf{r}' &= x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y = r' \cos \theta' \mathbf{e}_x + r' \sin \theta' \mathbf{e}_y \\ dS' &= r' dr' d\theta' \\ \mathbf{r} - \mathbf{r}' &= z\mathbf{e}_z - r' \cos \theta' \mathbf{e}_x - r' \sin \theta' \mathbf{e}_y \\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= (z^2 + r'^2)^{1/2} \end{aligned}$$

将以上关系式代入式 (1.2-4), 得到

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{z\mathbf{e}_z - r' \cos \theta' \mathbf{e}_x - r' \sin \theta' \mathbf{e}_y}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} r' d\theta' dr'$$

因为 $\cos \theta'$ 和 $\sin \theta'$ 在 $0 \sim 2\pi$ 区间内积分为零,故上式中 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 只有 z 分量,即

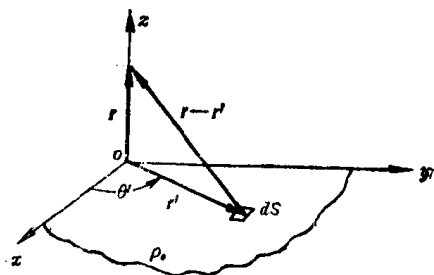


图 1-2

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \pm \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_z \quad (1.2-5a)$$

式中, $z > 0$ 时取“+”号, $z < 0$ 时取“-”号。也可以将上式改写为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_s z}{2\epsilon_0 |z|} \mathbf{e}_z \quad (1.2-5b)$$

为了形象地描述电场分布,常引入电力线的概念。电力线上每点的切线方向与该点电场强度矢量的方向相同,场中某点的电力线密度等于该点的电场强度值。在电力线上任一点上取一线元矢量 $d\mathbf{l}$, 由于它与该点的 $\mathbf{E}$ 平行,便有

$$\mathbf{E} \times d\mathbf{l} = 0$$

因此,在正交曲线坐标系中,电力线方程为

$$\frac{h_1 du_1}{E_1} = \frac{h_2 du_2}{E_2} = \frac{h_3 du_3}{E_3} \quad (1.2-6)$$

式中, $u_i (i = 1, 2, 3)$ 是曲线坐标, h_i 是拉梅系数, E_i 是电场强度矢量的分量。

静电场是矢量场。根据矢量分析,可以用矢量场的散度和旋度来表示场的特性。如果已知任一矢量场在 V 中的散度和旋度,以及该矢量场在包围 V 的闭合面上的分布,则由亥姆霍兹定理*, 此矢量场即可完全确定。所以下面我们从场矢量的散度和旋度入手来讨论静电场。

1.3 高斯定理

在讨论高斯定理之前,先引入立体角的概念。

一、立体角

立体角是由过一点的射线,绕过该点的某一轴旋转一周扫出的锥面所限定的空间。如果它是由过点 o' 的射线,沿给定有向曲面 S 的边缘绕行一周所得,则称之为 S 对 o' 所张的立体角。立体角度量与平面角类似:以其顶点 o' 为球心、 r 为半径作球面,若立体角的锥面在球面上截下的面积为 S , 则此立体角的大小是

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \quad (1.3-1)$$

视曲面 S 正方向与射线正方向的不同,立体角可正可负。为了直接从任一有向曲面 S 计算其对 o' 的立体角,可先在 S 上的 $\mathbf{r}$ 处取一面积元 $d\mathbf{S}$, 它对点 o' 所张的立体角为 $d\Omega$, 如图 1-3 所示。再设从 o' 到点 $\mathbf{r}$ 的矢径为 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, 如果角 $\langle d\mathbf{S}, \mathbf{R} \rangle = \theta$ 为锐角,则 $d\mathbf{S}$ 在 $\mathbf{R}$ 方向的分量 dS' 为正;如果 θ 为钝角,则 dS' 为负。因此,按照立体角定义有

$$d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{R^2} = \frac{d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

故 S 对点 o' 所张的立体角是

* 参阅 M. Javid and P. M. Brown "Field Analysis and Electromagnetics" Chapter 5, McGRAW-HILL, 1963

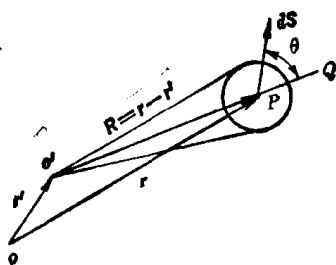


图 1-3

$$Q = \int_s \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.3-2)$$

如果 S 是封闭面(按惯例,其外侧为正侧),则有

$$Q = \oint_s \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 4\pi & (\mathbf{r}' \text{ 在 } S \text{ 内}) \\ 0 & (\mathbf{r}' \text{ 在 } S \text{ 外}) \end{cases} \quad (1.3-3)$$

即任意封闭曲面 S 对其内部任一点所张的立体角为 4π ; 对位于其外部的点所张的立体角为零。

二、高 斯 定 理

高斯定理陈述通过任意封闭曲面的电场强度通量,与该封闭面内净电荷量之间的关系,它可由库仑定律直接导出,实质上是库仑定律的另一种表达形式。

按定义,穿过任意封闭曲面 S 的电场强度通量为

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

若此电场为一点电荷 q 所产生,则有

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

将上式代入电场强度通量的算式中,即得

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_s \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} q/\epsilon_0 & (q \text{ 在 } S \text{ 内}) \\ 0 & (q \text{ 在 } S \text{ 外}) \end{cases} \quad (1.3-4)$$

上式是单个点电荷的高斯定理。对于点电荷系或分布电荷,由迭加原理可得高斯定理为

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.3-5)$$

此即高斯定理的积分形式。式中, Q 为 S 中的净电荷。因此,高斯定理可陈述为:真空中穿出任意封闭曲面的电场强度通量,等于该封闭面内净电荷量与 ϵ_0 之比。它说明,穿出任意封闭曲面的电场强度通量,只与该封闭面内净电荷量有关,而与曲面外的电荷无关。但决不能误解为封闭曲面上任意点处的电场强度 $\mathbf{E}$, 只与该封闭曲面内的净电荷量有关,而与曲面外的电荷无关。

如果封闭面 S 所包围的是密度为 ρ 的体电荷,则式(1.3-5)可写成

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dV \quad (1.3-6)$$

其中 V 是 S 所包围的体积。利用散度定理, 式 (1.3-6) 可化为

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

由于 V 是任意的, 故上式成立时必有

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (1.3-7)$$

这是高斯定理的微分形式。由此可见, 电场强度 $\mathbf{E}$ 在任一点的散度, 等于该点的电荷密度与 ϵ_0 之比。它反映了静电场的一个重要特性: 静电场是个有源场, 电荷是场源。

高斯定理的积分形式提供了一个求解场强值的简便方法。解题的关键是能将待求量 $\mathbf{E}$ 从式 (1.3-6) 的积分号中提出来, 这就要求找出一个封闭曲面 S (高斯面), 使 S 上处处 $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{S}$, 且 $\mathbf{E}$ 值相同; 或 S 的一部分 S' 上满足上述条件, 另一部分 S'' 上 $\mathbf{E} \perp d\mathbf{S}$, 因而有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = ES \quad (\text{或 } ES' = Q/\epsilon_0)$$

由上式即得 E 。要做到这一点就要我们在利用高斯定理的积分形式求解场强值之前, 应首先判断电场分布是否具有对称性。所以, 用这种方法所能求解的静电场问题是极为有限的。

1.4 静电场的旋度 电势(或电位)

一、静电场的旋度

注意到 1.2 节中, 点电荷及分布电荷的场强表示式 (1.2-2)~(1.2-4) 均含有因子 $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$, 利用

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

可以将它们改写为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \left(\frac{q'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (1.4-1a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q'_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (1.4-1b)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{电荷分布区域}} \frac{dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (1.4-1c)$$

在后面两个方程中, 因求和及积分是对带撇号坐标进行的, 故把算子 ∇ 移到求和及积分号之外。

式 (1.4-1) 表明, $\mathbf{E}$ 等于一标量势(位)函数的负梯度。由于标量势(位)函数梯度的旋度恒为零, 所以有

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.4-2)$$

即静电场是无旋场(保守场)。

二、电势(电位)

如上所述, 对标量势函数进行负梯度运算可得到电场强度 $\mathbf{E}$ 。显然, 处理标量势函

数比直接处理矢量场函数更为方便,因此定义标量电势 ϕ 为

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (1.4-3)$$

ϕ 的单位为伏特 (V)。比较式 (1.4-1) 和 (1.4-3) 可见,点电荷 q' 在点 $\mathbf{r}$ 处产生的电势为

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.4-4)$$

而分布电荷的电势则是

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.4-5)$$

式中 dq' 由式 (1.1-9) 确定,积分在电荷分布的区域内进行。

其实,由式 (1.4-1) 得到式 (1.4-4) 和 (1.4-5) 的过程中,还应考虑积分常数问题。常数的梯度恒为零,故在式 (1.4-4) 和 (1.4-5) 中附加一常数并不影响电场强度 $\mathbf{E}$ 。为简单计,取此积分常数为零。

至此,我们已可以由电荷分布求 ϕ ,再用 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ 求 $\mathbf{E}$ 。下面再导出 $\mathbf{E}$ 和 ϕ 间另一个有用的关系式:由 $\mathbf{E}$ 求 ϕ 。

考虑 $\mathbf{E}$ 沿某一路径自点 $\mathbf{r}_1$ 到点 $\mathbf{r}_2$ 的线积分

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \nabla\phi \cdot d\mathbf{l}$$

由于

$$\nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz$$

所以

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\phi = - [\phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1)] \quad (1.4-6)$$

由此可见, $\mathbf{E}$ 在两点间的线积分与路径无关,只取决于起点和终点的电势,这是静电场为保守场的另一种表达形式。通常把此线积分称为点 $\mathbf{r}_1$ 与点 $\mathbf{r}_2$ 之间的电势差或电压 U_{12} ,即

$$U_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \phi(\mathbf{r}_1) - \phi(\mathbf{r}_2) \quad (1.4-7)$$

如果选定某点 $\mathbf{r}_0$ 的电势为零 ($\mathbf{r}_0$ 称为参考点),则点 $\mathbf{r}$ 与参考点间的电势差,即为点 $\mathbf{r}$ 处的电势

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.4-8)$$

当电荷分布在有限区域内时,常以无限远处为参考点,即

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.4-9)$$

若将点电荷 q' 的电场强度公式 (1.2-2) 代入上式,便得到式 (1.4-4);利用迭加原理,可得到式 (1.4-5)。所以式 (1.4-4) 和 (1.4-5) 表示参考点选在无限远处时的电势。前面提到应在式 (1.4-4) 和 (1.4-5) 中附加不同的常数,只表明选用了不同的参考点。

由于试探电荷 q 所受的电场力为

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

故由式(1.4-6)可知,试探电荷 q 从 r_1 沿任意路径移至 r_2 时,电场力所做的功

$$A = q \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q[\phi_1(r_1) - \phi_2(r_2)]$$

场力做功是以能量消耗为代价的,这种能量称为 q 在静电场中的电势能(或称电位能)。场力所做的功只能度量电势能之差。但如以 r_0 为电势及电势能的参考点,则 q 在 r 处的电势能为

$$W_e(r) = q \int_r^{r_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q\phi(r) \quad (1.4-10)$$

电势能的单位为焦耳(J)。上式表明,电势能等于 q 从 r 移至 r_0 时电场力所做的功,也等于 q 从 r_0 移至 r 时外力 $-q\mathbf{E}$ 所做的功。这样,电势 $\phi(r) = W_q(r)/q$ 就等于单位正电荷的电势能。

电势 ϕ 是一个标量场, $\phi(r) = \text{常数}$ 的曲面称为等势面。由于任一点处标量场的梯度与过该点的等值面垂直,且指向标量场的变化率最大的方向。所以,从 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ 可知,电力线垂直于等势面(线),且指向电势下降的方向。同时,通过 $\phi(r)$,可使根据迭加原理计算场强的问题大为简化。下面举例说明之。

例 1.4-1 一根长为 $2d$ 的均匀带电直线段,其线电荷密度为 ρ_l ,求空间任一点处的电势和电场强度。

解: 根据式(1.4-5)

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\rho_l(r') dl'}{|r - r'|}$$

取柱坐标系,使带电直线段与 z 轴重合,如图1-4。由于电荷分布对称于 z 轴,可知 ϕ 与 φ 无关,只是 ρ, z 的函数。

由图1-4可见,

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_\rho \rho + \mathbf{e}_z z, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{e}_z z'$$

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [\rho^2 + (z - z')^2]^{1/2}$$

$$dl' = dz'$$

所以

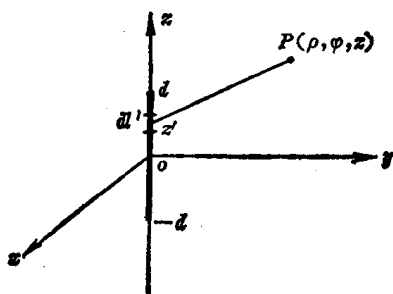


图 1-4

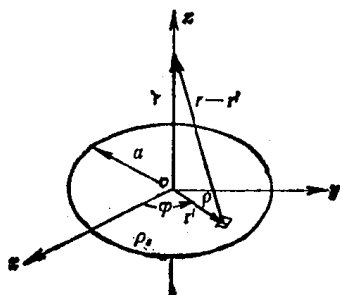


图 1-5

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-d}^d \frac{dz'}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \\ &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(z + d) + \sqrt{\rho^2 + (z + d)^2}}{(z - d) + \sqrt{\rho^2 + (z - d)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi - \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{e}_z \\
&= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\rho\mathbf{e}_\rho + [(z-d) + \sqrt{(z-d)^2 + \rho^2}]\mathbf{e}_z}{[(z-d)^2 + \rho^2] + (z-d)\sqrt{(z-d)^2 + \rho^2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\rho\mathbf{e}_\rho + [(z+d) + \sqrt{(z+d)^2 + \rho^2}]\mathbf{e}_z}{[(z+d)^2 + \rho^2] + (z+d)\sqrt{(z+d)^2 + \rho^2}} \right\}
\end{aligned}$$

例 1.4-2 位于 $x-y$ 平面上半径为 a 、圆心在坐标原点的带电圆盘，面电荷密度为 ρ_s ，如图 1-5。求 z 轴上的电势和电场强度。

解：由式 (1.4-5)，对面电荷有

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_s \frac{\rho_s dS'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

由图 1-5 可见，

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (z^2 + \rho'^2)^{1/2}$$

$$dS' = \rho' d\varphi' d\rho'$$

代入上式，得

$$\begin{aligned}
\phi(z) &= \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^a \frac{\rho' d\rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{1/2}} \\
&= \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} [(a^2 + z^2)^{1/2} - z]
\end{aligned}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{e}_z = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \right] \mathbf{e}_z$$

值得指出的是，题中所求的仅是 z 轴上的电势，它与 x ， y 无关。由此只能求得 z 轴上电场的 z 分量 E_z 。但由于电荷分布是对称的，电场只有 z 分量，故所得结果就是 z 轴上的总电场。

1.5 泊松方程和拉普拉斯方程

综合 1.3 节和 1.4 节所述，真空中静电场的基本方程为

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho/\epsilon_0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.5-1)$$

而其积分形式为

$$\left. \begin{aligned} \oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= Q/\epsilon_0 \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.5-2)$$

即静电场为有源无旋场。

与 $\mathbf{E}$ 的旋度方程等效的是 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ 。将此式代入 $\mathbf{E}$ 的散度方程，可得电势的偏微分方程为

$$\nabla \cdot \nabla\phi = -\rho/\epsilon_0$$

或

$$\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0 \quad (1.5-3)$$

上式称为泊松方程。若所论区域中 $\rho = 0$, 则 ϕ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.5-4)$$

静电场的基本问题可归结为求解这些方程的问题。关于它们的一般求解方法, 将在第二章中讨论。至于我们已有的电势解

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

是满足泊松方程的。

1.6 用 δ 函数描述点电荷的密度

为了今后讨论泊松方程的求解方法, 在理论上要弄清如何用密度来描述一个点源。显然, 一个点源的密度不能用通常的方法来定义, 因为它的体积为零, 而电荷量却是有限值, 即要求零体积与密度的乘积, 是不为零的有限值。但要将点电荷用密度去定义它也并不困难, 因为已经得出点电荷的电势为

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

根据泊松方程

$$\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0$$

将点电荷电势 ϕ 的表示式代入上式, 可得

$$\nabla^2 \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{q}{\epsilon_0} \nabla^2 \left(\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\rho/\epsilon_0$$

如果能找到 $\nabla^2 \left(\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$ 的表达式, 即可对点电荷的密度给以定义。为此, 先介绍

Dirac Delta 函数, 简称 δ 函数。

一、 δ 函数

δ 函数定义为

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} 0 & (\mathbf{r} \neq \mathbf{r}') \\ \infty & (\mathbf{r} = \mathbf{r}') \end{cases} \quad (1.6-1)$$

$$\int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = \begin{cases} 1 & (\mathbf{r}' \text{ 在 } V \text{ 内}) \\ 0 & (\mathbf{r}' \text{ 在 } V \text{ 外}) \end{cases} \quad (1.6-2)$$

式 (1.6-1) 中 δ 函数的空间坐标是用位置矢量来表示的, 在常用的正交坐标系中, 它可写成

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') & (\text{直角坐标系}) \\ \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho')\delta(\varphi - \varphi')\delta(z - z') & (\text{圆柱坐标系}) \\ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r')\delta(\theta - \theta')\delta(\varphi - \varphi') & (\text{球坐标系}) \end{cases}$$