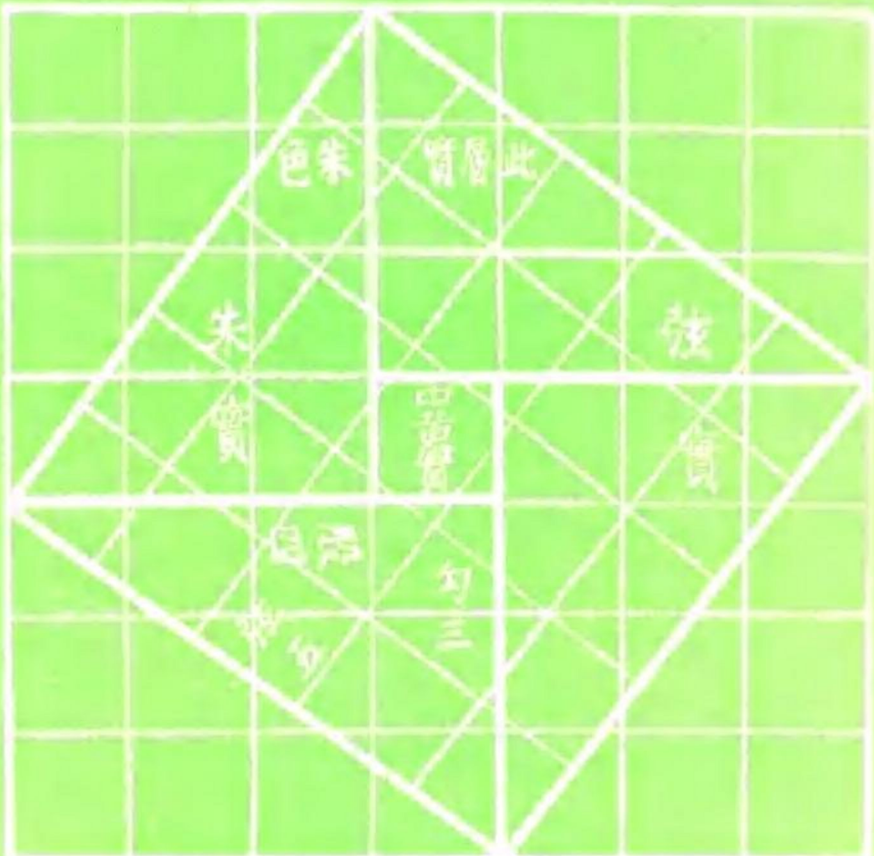
數學史研究文集

第二辑

弦圖



内蒙古大学出版社
九章出版社

数学史研究文集

第二辑

李迪　　主编

内蒙古大学出版社
九　章　出　版　社

数学史研究文集

第二辑

李迪　主编

内蒙古大学出版社
（呼和浩特市大学西路1号）
九章出版社
（台北市虎林街252巷51弄77号3F）
联合出版

本书简化汉字版由：
内蒙古大学出版社出版发行　内蒙古新华书店经销
内蒙古大学新技术公司排版　内蒙古大学印刷厂印刷

开本：787×1092/16　印张：11.375　字数：261千
1991年7月第1版　第1次印刷

ISBN 7—81015—189—4/O·16

定价：4.90元

缘　起

中国传统数学有悠久的发展历史，曾经出现过几次高峰，获得了大量成果，有些长期保持世界领先地位。从本世纪初以来，这种情况逐渐引起国内外有关学者的注意，开始用西方的方式对中国数学史进行研究。到现在已有七十多年的历史，成果也相当可观。八十年代以来的发展更快，主要表现有以下四个方面：

1. 论著的大量出现。主要的著作有：苏联别列兹金娜的《中国古代数学》（俄文，1980）、中国白尚恕的《<九章算术>注释》（1983）和《测圆海镜今译》（1985）、李迪的《中国数学史简编》（1984）、沈康身的《中算导论》（1986）、李培业的《算法纂要校释》（1986）、中外数学简史编写组的《中国数学简史》（1986）、莫由等的《中国现代数学史话》（1987）、孔国平的《李冶传》（1988）、华印椿的《中国珠算史稿》（1987）、蒋术亮的《中国在数学上的贡献》（1984）、李迪和郭世荣的《清代著名天文数学家梅文鼎》（1988）、日本伊东俊太郎的《数学的历史》Ⅰ“中世纪的数学”（其中第4章为中国数学，川原秀城执笔，日文，1987）、法国马若安的《梅文鼎的数学著作研究》（法文，1981）和《中算史导论》（法文，1988）等，稍早的还有比利时李倍始的《十三世纪中国数学》（英文，1973）、新加坡兰丽蓉的《<杨辉算法>研究》（英文，1977）、新西兰谢元作的《四元玉鉴中的数字系数方程系统》（法文，1977）、日本薮内清的《中国的数学》（日文，1974）、美国的F. J. 斯维兹和T. I. 高（Kao）的《是中国的毕达格拉斯吗?》（英文，1977）等等。论文集有《科学史集刊》第11期（1984）、《科技史文集》第8辑（1982）、《<九章算术>与刘徽》（1982）、《秦九韶与<数书九章>》（1987）、《中国数学史论文集》（一）至（三）（1985－1987），还有一些不纯是中国数学史的文集，如《从李约瑟出发》（1985）、《钱宝琮科学史论文选集》（1983）、《华中师范大学学报》“数学史专辑”（1987）、《辽宁师范大学学报》“数学史专辑”（1986）、《内蒙古师范大学学报》“科学史增刊”（1989）等。根据这些情况来看，中国数学史论著之多超过了历史上任何时期。

2. 研究队伍的扩大。目前，国内外从事中国数学史研究的专兼职人员迅速增加，总人数约在百人左右。与原来的不足十人相比，可以说盛况空前。特别是，从八十年代初以来，受过专门训练的研究生陆续毕业，其中有硕士生约二十名，博士生三名，在校的还有十余名。

3. 成为有关国际会议的重要内容。从1982年起曾经先后召开过六次中国科学史国际会议，几乎每一次都把数学史列为中心议题，提交的论文也多，以1988年8月5日到10日在美国圣迭哥召开的第五届中国科学史国际会议为例，会上设“数学”和“十三世纪后中国数学”两组，后一组用一天的时间，而在“传记”组还有3篇数学家传记论文，总数达到25篇，是各组中最多的一科。

4. 研究机构的增加。八十年代以前，仅中国科学院自然科学史研究所设有数学史研究组，

进入八十年代以来，先后在内蒙古师范大学、北京师范大学、西北大学、辽宁师范大学等院校成立了以数学史为主要方向的科学史研究机构，有一批专兼职研究人员从事中国数学史研究。在杭州大学、天津师范大学、湖南大学等许多单位也都有专人研究中国数学史。

我们研究所正是伴随着这种总的情况发展起来的，一直把重点放在中国数学史研究上，所有的教师和研究生都从事这方面的研究（当然还有其它方向）。除每年在海内外发表一部分成果外，还积存一批论文，数量与日俱增。为了解决这个问题，我们决定出版不定期的连续出版物《数学史研究文集》，它是一种专业性论文集，大约每年出一辑。

这个论文集主要收载中国数学史论文，同时也发表少量的外国数学史论文和译文。

本论文集以发表本所教师和研究生的研究论文为主，但酌登外单位的论文，必要时还将向有关专家组稿。

我们所需要的论文，大体可以分为以下三类：

1. 有指导意义的综述性论文。从范围上来看，可以是全面的，也可以是专题的或某一国家对中国数学史的研究情况。要求在所论述的范围内不能有重要的遗漏，而且在评价上要公正。

2. 专题研究论文。这是本论文集要收载的主要部分，其内容多种多样。所收载的每一篇论文都要有较高的水平，有创造性，至少也要有新见解或一家之言。不论何种内容，都必须有史料依据，特别是要依据原始资料。

3. 资料介绍。资料是研究的基础，因此本论文集注意收载以介绍资料为主的论文，尤其是是那些迄今人们还没有报道过的资料（包括新论著、新版本、数学家事迹、信函等等）为重点，而那些似乎人们知道但又无人道及的重要资料也适当收载。

本论文集由李迪教授担任主编，稿件的处理工作由罗见今副教授负责。

这种论文集我们没有编辑过，《数学史研究文集》的编辑带有尝试性质，可能存在缺点和问题，所收载的论文也不一定都合适，我们热忱欢迎海内外同行给于指正和支持，以便把这个不定期连续出版物办好。

内蒙古师范大学科学史研究所

一九八九年十月三十一日

目　　录

论古代与中世纪的中国算法*

李 文 林

（中国科学院数学研究所）

计算机技术的发展正在引起数学史家们对算法倾向的日益关注。D.E.克努斯（Knuth）曾研究过古代巴比伦算法。他在其论文[1]的结束语中指出：关于古代中国与印度的算法"有更多东西可说"。本文对古代与中世纪的中国算法作简要的分析探讨。

一 程序、标准程序和子程序

像巴比伦人一样，古代中国数学家表达数学公式的传统方式是逐步列出该公式的计算法则，不过他们的处理比巴比伦人更具一般性。

从《九章算术》开始，中国古算书中每个问题之后都有一段所谓"术"，这实际上是解题公式的逐步计算程序，对于以后出现的同类问题，则或是重复最初的术文，或是千篇一律简单地标明"术如……"。这说明了程序的一般性。以下是"方程"章中的一个例子：

> 今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗，问上、中、下禾实一秉各几何？
>
> 方程术曰：置上禾三秉、中禾二秉、下禾一秉、实三十九斗于右方；中左禾列于右方。

亦即首先将数据排列成如下形式：

1	2	3	上禾
2	3	2	中禾
3	1	1	下禾
26	34	39	实

（i）以右行上禾（3）遍乘中行而以直除（即以遍乘后的中行各项反复减去右行各项，直到上禾为 0）；

（ii）又乘其次（左行）亦以直除；

（iii）然后以中行中禾不尽者（5）遍乘左行而以直除；

---

* 本文系作者在第一届国际中国科学技术史讨论会（Leuven，1982）上的英文报告（On Chinese Algorithms in Ancient and Medieval Times），首次用中文发表。英文稿曾蒙李约瑟博士、鲁桂珍博士、席文（N. Sivin）教授以及布鲁（G. Blue）先生审阅并提出宝贵修改意见。

(iv)左方下禾不尽者(36)上为法，下为实(99)，实即下禾之实。①

接着便是完全类似的计算每秉中禾与上禾所得实(斗)数的程序。这里基本的运算就是所谓“遍乘直除”(即用第一个方程中某未知数的系数乘第二个方程的各项，然后从变换后的方程各项反复减去第一个方程的相应项，直至该未知数的系数为0)。《九章》的作者称这一线性联列方程的解算过程为“方程术”。在以后的方程类问题中，开头总是说“术曰如方程”，有时紧接着列出新的数据——这相当于现代算法语言中的“调用”(Calling)标准程序和给参量“赋予”(Assigning)新值。

对算法结构的讲求到宋代达到了登峰造极的地步。以秦九韶《数书九章》(公元1247)线性同余方程组的求解为例。在“大衍”章的开头部分，秦九韶设计了一个求解所有“大衍”类(即线性同余方程组)问题的一般程序——大衍总数术。以下是秦九韶程序的总框图：

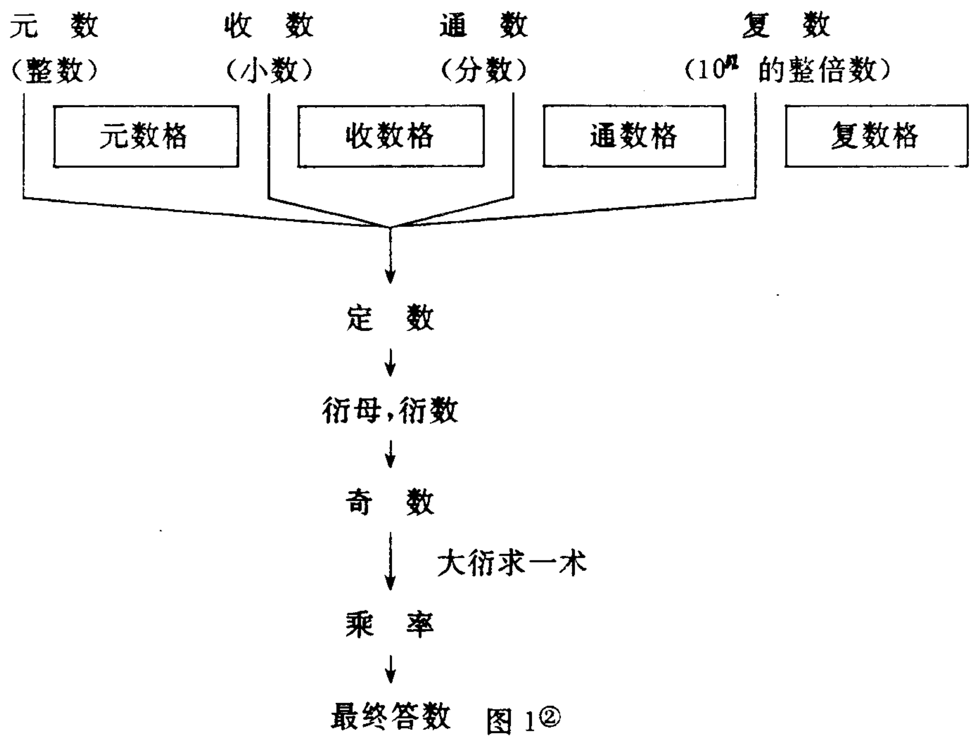


图 1②

这在当时确实是一个巨型程序，尤其值得注意的是，秦九韶程序由若干不同部分组成，它

---

① 术文见《九章算术》卷八“方程”。括号内的文字及编号为笔者所加。

② 用现代代数语言表达，秦九韶的方法大致是：

一次同余组 $x \equiv R_i \pmod{A_i}, i=1,2,\cdots,n$ (1)

等价於 $x \equiv R_i \pmod{a_i}, i=1,2,\cdots,n$

此处 a_i 是 A_i 的素因数，$L.C.M.(a_1,\cdots,a_n)=L.C.M.(A_1,\cdots,A_n)$，且 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两互素。若能求得一组 k_i

满足 $k_i g_i \equiv 1 \pmod{ai}$ $i=1,2,\cdots,n$

此处 $g_i = M/ai \pmod{ai}$， $M=a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$

则 $x=\sum_{i=1}^{n} k_i R_i M/a_i (\mathrm{mod} ai)$ 为同余组(1)的解。

秦九韶分别称 A_i 为问数；a_i 为定数；M 为衍母；M/ai 为衍数；g_i 为奇数，k_i 为乘率。

关于大衍总数术的详细介绍可参阅钱宝琮〔6〕，〔7〕和 Libbrecht〔4〕，李文林、袁向东〔3〕则对秦九韶求定数的方法作了新的探讨，本文所关心的主要是该方法的算法结构。

们适用于不同的场合。也就是说，秦九韶的总程序中包含了若干子程序，主要有求定数的程序（秦九韶对四种模数—元数、收数、通数和复数的每一种分别设计了计算定数的专门程序，并用一个新的术语“格”来称呼这些子程序，“格”就是子程序）和求乘率的“大衍求一术”。

我们可以用图 2 来表示秦九韶“大衍总数术”程序，其中一个大的程序块包含了若干小程序块，这种“嵌套结构”恰是现代算法语言的一种基本结构。

子程序本身可以被看作是一个完整的程序。秦九韶在计算大衍类问题时就经常直接“调用”求定四格与大衍求一术。当调用这些程序时他总是说：“以××格入之”、“以大衍求一术入之”。

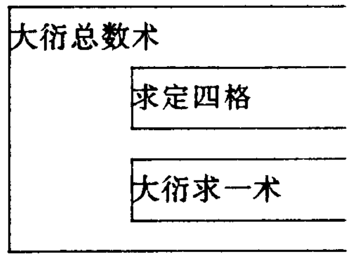


图 2

“大衍总数术”标志着宋代数学家精心讲求算法结构的倾向，从中我们还可以发现其它诸如“循环”与“条件”等算法现象。

二　循环语句与条件语句

“循环”与“条件”是构造非平易算法的两个基本要素。克努斯在其论文〔1〕中曾抱怨说：“在巴比伦文献中很少能看到这类算法现象”。然而在中国数学典籍中却不乏这样的算法结构。

著名的“割圆术”就是一种典型的循环算法过程。刘徽（公元 3 世纪）给出了如下的计算圆内接 2n 边形边长的程序：

(i)割六觚以为十二觚；

(ii)置圆经二尺；

(iii)半之为一尺，即圆里六觚之面也；

(iv)令半经一尺为弦，半面五寸为句，为之求股；

(v)以句幂二十五寸减弦幂，余七十五寸；

(vi)开方除之……得股八寸六分六厘二秒五忽五分忽之二；

(vii)以减半经余一寸三分三厘九毫九秒四忽五分忽之三，谓之小句；

(viii)觚之半面又谓之股，为之求弦；

(ix)其幂二千六百七十九亿四千九百一十九万三千四百四十五忽，余分弃之；

(x)开方除之即十二觚之一面也。①

接着便是完全同样的计算 24、48、96 边形边长（觚面）的程序：

割十二觚以为二十四觚；

亦令半径为弦，半面为句，为之求股；

………

即二十四觚之一面也。

割二十四觚为四十八觚；

① 术文引自《九章算术》卷一“方田”刘徽注，编号系笔者所加。

亦令半径为弦，半面为句，为之求股；

………

即四十八觚之一面。

割四十八觚以为九十六觚；

亦令半径为弦，半面为句，为之求股；

………

即九十六觚之一面。

上述各节计算过程之间仅有的差别就是赋予“面”以新值（事实上，刘徽将每一迭代过程结束时所得之值“赋”给下一迭代过程的参量“面”）。这里我们就看到了一个循环语句的例子“Do I=1 to N”（此处N=4，但刘徽的计算一直进行到N=8）。

至于条件语句，我们重新来考察秦九韶的“大衍求一术”。我们可以用现代符号表述秦九韶的“大衍求一术”程序如下：

第1步：	以奇数G除定数A	得商	余数	计算数 C_i
	即 A/G	q_1	r_1	$c_1=q_1$
第2步：	G/r_1	q_2	r_2	$c_2=c_1q_2+1$
第3步：	r_1/r_2	q_3	r_3	$c_3=c_2q_3+c_1$
……	……	……	……	……
第n步：	r_n/r_{n-1}	q_n	r_n	$c_n=c_{n-1}q_n+c_{n-2}$

若 $r_n\neq1$，继续进行上述运算，否则进行

第n+1步：　若n为偶数，数k（乘率）$=c_n$，

否则进行 $q_{n+1}=r_{n-1}-1, C_{n+1}=C_nq_{n+1}+C_{n-1}$

并取 $K=C_{n+1}$。

十分清楚，此程序包含了下列形式的条件语句：“IF S_1 GO TO，IF S_2 GO TO，S_3”。

如果深入分析“招差术”、“正负开方术①等其它一些算法，一定会发现更多的算法结构的例子，我们不可能在这里一一列举。不过从上述讨论已经可以看出，在算法设计方面，中国古代数学家已掌握了现代算法语言的一些基本要素。

古代中国数学家们设计的程序，当然是适用于他们的计算工具——算筹的一种“软件”。但不难发现：它们很容易被翻译成现代算法语言而被输入计算机去执行（笔者曾对“割圆术”和“大衍求一术”作过这样的尝试）。这正说明了中国数学家十分重视对一个科学算法的要求（参阅 Rybnikov[8]和 Libbrecht[4]），那就是：

(a)机械化，这种算法必须包含一系列没有二义性的、标准的和易于重复迭代的指令，任何人只要一步一步执行这些指令，必然达到同样的计算结果；

(b)一般性，这种算法能被应用于性质相同的一整类问题；

(c)有效性，从初始数据出发，经过有限步骤的运算，定能得到问题的解答。

---

① 参阅 Lan Lay—yong〔2〕，Libbiecht〔4〕和李文林、袁向东〔3〕。

正如其它许多人类知识领域一样，现代算法语言也有其历史渊源。揭示这种渊源关系，可能是数学史研究的一个新颖而重要的课题。

算法结构的设计与算法本身的创造有密切关系。汉代以来的中国数学家们发展了许多重要的算法①，从而形成了强烈的算法传统。

遗憾的是，与演绎倾向相比，算法倾向的作用往往遭到忽视。然而在数学发展的历程上，算法的创造与古希腊的演绎途径至少可以相提并论。重大数学真理的发现往往是寻求新算法的结果，微积分的创造也许是最有说服力的例子。这一成就乃是算法倾向的胜利（参阅 Rybnikov[8]），而牛顿后来用几何方式来处理其流数理论在一段时期内甚至成为英国微积分进一步发展的障碍，同时算法的创造又构成演绎推理的基础。显然，如果没有那些计算面积、体积的巴比伦与埃及算法，就不可能发展出希腊几何；如果没有从开普勒、费马到牛顿、莱伯尼兹的无穷小算法，就不可能有严格的现代分析学。

算法构造与演绎推理是两种不同的数学思维形式。它们在数学史上的作用既不能相互替代，又不是相互排斥的。在这方面，注意到下述事实是有趣的：演绎大师欧几里得曾经不加严格证明地给出了著名的辗转相除算法，并没有人为此而责难欧几里得，或许是因为他的演绎几何名声太大的缘故吧。

事实上，数学的发展似乎呈现出这样的特征，即算法倾向与演绎倾向总是交替地取得主导地位。例如，巴比伦和埃及式的原始算法时期被希腊式的演绎几何所接替；在中世纪，希腊数学则让位于以算法为主导的中国、印度与阿拉伯数学；17、18世纪是无穷小算法的黄金时期；十九世纪以后，演绎数学又重新在更高的水准上繁荣发达起来。这标志着一种螺旋式上升的发展过程。那么在“纯数学”统治了一个多世纪后的今天，情况又如何呢？计算机的广泛渗透似乎正在开始一个算法研究的新时代。因此，数学史研究中对算法倾向的重视乃是十分自然的趋势。

参 考 文 献

〔1〕 Knuth, D. E. Ancient Babylonian Algorithms, Communication of the ACM, Vol. 15, No. 7. 1972.

〔2〕 Lam Lay—yong. The Chinese Connection Between the Pascal Triangle and the Solution of Numerical Equations of any Degree, Historia Mathematica, Vol. 7. No. 4. 1980.

〔3〕 李文林、袁向东：“中国古代不定分析若干问题探讨”，《科技史文集》8，上海科学技术出版社，1982。

〔4〕 Libbrecht, U. Chinese Mathematics in the Thirteenth Century, the Shu—Shu Chiu—Chang of Chin Chiu—Shao, Cambridge, Massachusetts and London, England, 1973.

〔5〕 Needham, J. Science and Civilisation in China, Vol. 3. Cambridge, 1959.

〔6〕 钱宝琮：《中国数学史》，科学出版社，1966。

〔7〕 钱宝琮：《宋元数学史论文集》，科学出版社，1966。

〔8〕 Rybnikov, K. A. On the Role of Algorithms in the History of Mathematical Analysis, Actes du V111 Congres International d'Historie des Sciences, Vol. I, Firenze & Paris. 1958.

① 可参阅 J. Needham〔5〕和钱宝琮〔6〕。

中国古代对角度的认识

李国伟
（台北中央研究院数学研究所）

一　角的定义

除了点、线、面、体之外，角度应该是人类几何直觉不难掌握的一个概念。但是在中国古典的天文、历法与数学中，角度的认识似乎有欠圆满。钱宝琮曾说："中国古代不知利用角度，然有《周髀》测望术，日、月、星辰在天空中地位，亦大概可知矣。"[1]他还说："在后世数学书中，一般角的概念没有得到应有的重视。"[2]关增建则说："中国古代 $365\frac{1}{4}$ 分度方法对于确定天体空间方位是有效的，惟其有效，才阻滞了其他分度方法的产生，导致了角度概念的不发达。"[3]黄一农认为："中国古代的天文家在明末西学传入之前，一直未发展出近似西方几何学完整的角度概念。当量度星体的角大小或两点间的角距离时，文献中所用古度值的意义常因人而异，有时近于现代的角度值，有时则直接以浑仪环上的刻度差来表示，故当以窥管测极星距极度或日、月的体径时，其值往往较今几何学中的角度值大一倍左右。"[4]刘君灿更进一步断言："中国除了直角之外没有一般的角度观念。"[5]

其实角度比点、线等基本几何概念的内涵更为丰富，因此可以从逻辑上等价，但着眼点迥异的方向来认识它。若要讲究起来，现代数学甚至可由向量空间、旋转群等出发，再逐步引入角度的概念。[6]西方古典几何学的代表作是欧几里得的《几何原本》，根据 Thomas L. Heath 的翻译，定义八描述了平面角度的意义：

A plane angle is the inclination to one another of two lines in a plane which meet one another and do not lie in a straight line. [7]

这个定义在利玛窦、徐光启的《几何原本》中认为："平角者，两直线于平面纵横相遇交接处。"[8]并没有点出"inclination"的意味。Heath 认为 inclination 是欧几里得的创意，因为在他之前一般人是把角看作折曲或折断的线。Heath 还综述了西方古代对角度的种种不同看法，甚至角度应属"质"、"量"还是"关系"哪一种范畴，也引起不少的议论。最后他引用十九世纪末 Schotten 的说法，把角度的定义方式划分为三类：

（一）角是两条直线方向的差别。

（二）角是从一边旋转到另一边的量。

（三）角是两条直线相夹的那部分平面。

既然西方几何学中对角的识识也有几套体系，我们似乎应该更致力厘清中国对角度理解

的递嬗与特色，而不必执著在古代是否有现代角度观念的问题上。

二　技艺里的角度

角是一个非常简单而易见的几何观念，古代人民通过农具、兵器、车辆、乐器的制造不可能不发现角的存在。但是“角”这个字的原意，按《说文解字》是指“兽角”，最初并不用它来称呼几何量。《考工记》里是以“倨句”表示角度，倨表钝，句表锐，正如用“多少”表示量，“长短”表示长。《考工记》的《冶氏》有“已倨则不入，已句则不决，…倨句外博。…倨句中矩。”《辉人》有“倨句磬折”，《磬氏》有“为磬，倨句一矩有半。”《车人》有“倨句磬折，谓之中地。”可见“倨句”是泛指直线的曲折程度，这有点类似欧几里得以前希腊人对角的定义。《车人》中也记载了一些特殊的角，所谓“半矩谓之宣，一宣有半谓之欘，一欘有半谓之柯，一柯有半谓之磬折。”很多论述都由此推算出宣是 45°，欘是 67°30′，柯是 101°15′，磬折是 151°52′30″。不过脱离开技艺的场所，这些角度并没有继续发展下去。本来有机会作为一般角统称为“倨句”，后来也不见了踪迹。这一脉最有可能与西方角度观念合流的思路，在中国很令人惋惜的未能发扬起来。

《考工记》还有另一条可以发展出角度的网络。《筑氏》有“合六而成规”，《弓人》有“为天子之弓，合九而成规。为诸侯之弓，合七而成规。大夫之弓，合五而成规。士之弓，合三而成规。”钱宝琮说：“这是用圆心角的大小来规定弓背的曲率。”[2]似乎断言过强了。我们只能说用圆弧的长度规定了弓背的弯曲程度，而圆弧有可能引出角度的观念。既使没有把圆心角明确的指出来，圆弧的度量也可以看作是一种与角度在逻辑上等价的系统。这种观念在描述天球上星体的位置与运动方面，更有它不可磨灭的价值。

三　天文里的“度”

中国古代天体运动的度量以太阳的运动为定标准的依据。“天之动也，一天一夜而运过周，星从天而西，日违天而东。日之所行与运周，在天成度，在历成日。”[9]这里所成的度又如何确定呢？“历数之生也，乃立仪、表，以校日景。景长则日远，天度之端也。日发其端，周而为岁，然其景不复，四周千四百六十一日，而景复初，是则日行之终。以周除日，得三百六十五四分度之一，为岁之日数。日日行一度，亦为天度。”[10]因此周天为三百六十五又四分之一度著眼点不在圆心角的度量，而是天体间距离的标定。“度”这个字的本意便是指长度。“度者，分、寸、尺、丈、引也，所以度长短也。”[11]“故体有长短，检以度；”[12]关增建在他的论文中相当清楚说明了这种以长度量天的体系。

《周体算经》卷下明确的记载了分圆的方法：“术曰：倍正南方，以正句定之。即平地径二十一步，周六十三步。令其平矩以水正，则位径一百二十一尺七寸五分。因而三之，为三百六十五尺、四分尺之一，以应周天三百六十五尺、四分尺之一，以应周天三百六十五度、四分度之一。审定分之无令有纤微。分度以定则正督经纬。而四分之一合各九十一度、十六分度之五，于是圆定而正。”[13]在这种运作下，圆弧对应的圆心角几乎已经呼之欲出，但是古人的眼光并没有这么看。他们“立表正南北之中央，以绳系颠，…立周度者，各以其所先至游仪度上。车幅引绳，就中央之正以为毂，则正矣。”[14]用对应比例的思想，以地面的尺寸量起天体的度数。但是因为众

星绕极旋转，而所画圆心并不在极下，所以测出的地面弧长并不完全正比于周天的弧长。即使《周髀》体系内的盖天家知道这种偏差，他们也不可能跑到极下去作测量。盖天家说的这种弱点在浑天说中可以得到相当的校正，因为在浑天的模式里，只要把浑仪摆到"地中"，则子午环上的分度就正比与天球上的分度。因此我们可以说，在适当的天体模式下，以弧长作为度量的体系，是逻辑等价于角度，特别是用 radian 作单位的角度体系。只不过这种等价关系有一方，是中国古代不曾自觉认识清楚的。

四　几何里的"隅"与"角"

《周髀算经》虽然在地面画圆分度，但是这种分度方法并没有应用到中国古代的几何体系，去度量不同角的大小。数学中最重要的一个角度概念就是直角，以"矩"作为度量它的工具。所谓"矩者，所以矩方器械，令不失其形也。"[15]但是"矩"在很多场合也指矩形，所以要指矩形的顶角时只好使用另外一个说法"隅"了。"隅"本指房子的角落，例如《论语・述而》有名的说法："举一隅不以三隅反"。"隅"逐渐普遍用来指各种建筑物的角落，进而在几何上称谓等于直角的角。例如《考工记》有"宫隅之制七雉，城隅之制九雉"。《诗・北风・静女》有"俟我乎城隅"。《周髀算经》有"句广三，股修四，径隅五。"[16]《九章算术・句股》有"东门南至隅步数，以乘南门东至隅步数为实。"[17]

值得注意的是《周髀算经》与《九章算术》的正文，除了以上引用"隅"的例子外，并没有用"角"的文句。或者可推断在这两本书成书的时间，数学家的注意力基本上还在指谓直角的"隅"。由尖锐兽角引申来，有可能指谓非直角的"角"，还未赢得它应有的地位。《汉书・律历志》说："角，触也，物触地而出，戴芒角也。"[18]"角"的解释虽然脱离开兽角，但仍然是描写尖锐的形状。因为现代中国人已极少使用"隅"字，这种数学术语由"隅"为主，演化到以"角"为主的历史，似乎也反映了由直角走向一般角的认识过程。

三国时期的赵爽在注《周髀算经》时已说过："隅，角也。"[19]可见到三世纪时"角"的用法至少与"隅"已相当接近了。赵爽用"角"的例子在注文中有"伸圆之周而为句，展方之匝而为股，共结一角，邪适弦五。"[20]在他著名的"句股圆方图"那段论说中有"开矩句之角，…，开矩股之角。"[21]但与赵爽同时代的刘徽在《九章算术》注中，似乎比较爱"隅"字，例如：

"三面，三廉、一隅皆已有幂，"

"阳马之形，方锥一隅也。今谓四柱屋隅为阳马。"

"依隅之周半于依垣，"

"两隅相去一丈为弦，"

"满此方则两端之矩重于隅中，"

"令黄幂连于下隅。"[22]

刘徽用"角"的一个为人熟知的例子，是《句股》章开始解释句股形时说："短面曰句，长面曰股，相于结角曰弦。"[23]此处"相于结角"的说法与前引赵爽注"共结一角"类似，但因刘徽基本上是以"隅"称呼直角，所以这句话的另一种合理解释是："直角三角形的短边叫句，长边叫股，与短边（或长边）结角的边叫弦"。此处用"角"而不用"隅"，应该是强调所结的角不会是直角。刘徽另一个用"角"的地方是在讨论开方时说："欲除朱幂之角黄乙之幂，其意如初之所得也。"[24]

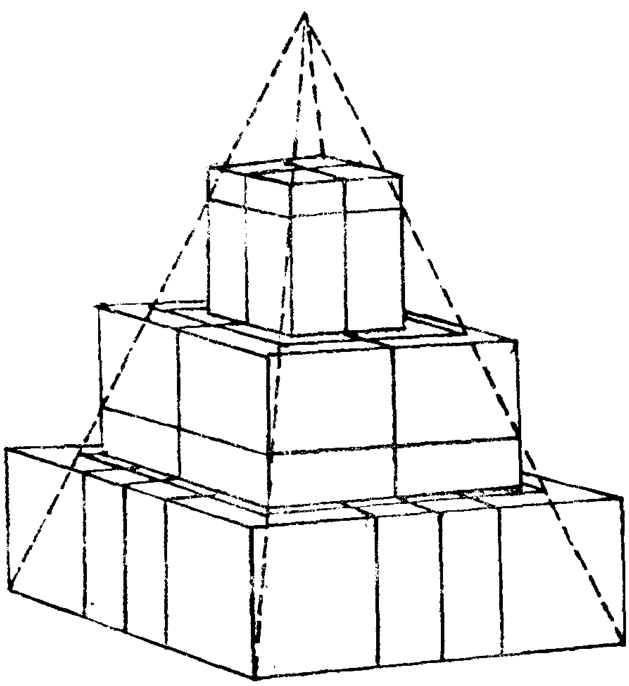
这个“角”字用得相当特殊，因为随后讨论开立方时，又恢复使用“隅”。“隅”字在开方术里的用法为后代的数学书籍承袭下去，衍申到唐初《缉古算经》时，甚至以实、方、廉、隅来说明方程的各项系数。

刘徽以后，在开方术之外，“隅”、“角”出现的场合可举其大要如下。

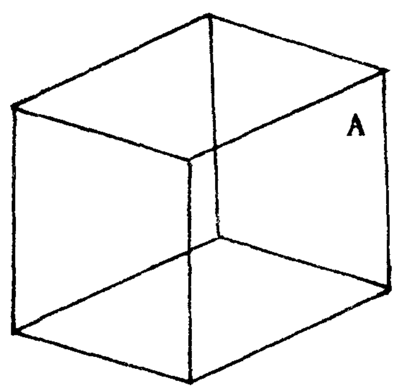
五世纪的《孙子算经》有“今有田，桑生中央，从角至桑一百四十七步，问田几何？…术曰：置角至桑一百四十七步，…”[25]但是此题目中的“角”字，到六世纪甄鸾的《五曹算经》里却又改为“隅”字。

唐朝李淳风注《周髀算经》用过“角隅正方，自然之数”[26]的说法。注《九章算术》用过“自然从角至角，其径二尺可知。…角径亦皆一尺。更从觚角外畔围绕为规，…”[27]此处“从角至角”度量的始终是角的顶点，但是不应把“角”字解释作或等同于“点”字，因为没有角的烘托，点的位置就失去了着落。并且由此可见“角”字使用的意味已渐隐含较广义的角了。

北宋沈括在《梦溪笔谈》里讨论隙积术时曾说过：“刍童求见实方之积，隙积求见合角不尽，益出羡积也。”其中所合之角是一个方锥的顶角（如图一）[28]，所以“角”字也可以指立体角了。



图一



图二

南宋杨辉在《详解九章算法》讨论垛积时，用了“三角垛”、“四隅垛”的名称，还没有把“四隅”称为“四角”。但到元朝朱世杰《四元玉鉴》里已称“四角垛”[29]。对于城墙的四隅也改用四角：“今侵城四角周回撅圆池”[30]。类似《孙子算经》的“桑生田中”题目，变成直田中生出竹，已知“四角至竹各十三”[31]。当“角”把“隅”也取代之后，“角”字真的成为一种统称的名词。

《四元玉鉴》里谈到八角形[32]。到明朝程大位《算法统宗》[33]更是普遍的使用“圆容六角”、“六角容圆”、“圆容三角”、“三角容圆”、“三角田”、“六角形”、“八角形”等，“角”在称呼多边形的用法上已与现代没有什么出入了。

在几何学的剧场内，“隅”由称呼直角的正统地位，逐渐抽象化成开方法的用辞，而被“角”挤出了舞台。这种由“隅”到“角”的演化过程，相当程度地反映了中国古典几何学，从对直角三角形的关注中，逐渐把视线转移到更一般的平面圆形。例如南宋秦九韶《数书九章》卷五田域类的“尖田求积”、“三斜求积”、“斜荡求积”、“计地容民”，就讨论了在此之前未曾有过的题型。虽然秦九韶的公式仍由句股形逐步导来[34]，但在题目的表现上已经脱离句股形的简单堆叠。

五“角”的递嬗

“角”字为什么会由“兽角”逐步提升到对一般角的统称，并不容易从文献中确认它的原委与轨迹。本文尝试提出一条看来合理的路径。

兽角衍申的直觉意义自然会包含尖锐感，因此前面引过《汉书・律历志》便曾说：“角，触也，物触地而出，戴芒角也。”按《说文》“芒”是指草端，在尖锐的意义上，“芒”与“角”便结合在一起了，也因此对光芒的形容就可以用“角”字。以《史记・天官书》为例，用“角”描述星光的语句可列举如下：

“天一、枪、棓、矛、盾动摇，角大，兵起。”

“库有五车。车星角，若益众，及不具，无处车马。”

“狼、角变色，多盗贼。”

“军星动，角益希，及五星犯北落，入军，军起。”

“其角动，乍小乍大，若色数变，人主有忧。”

“若角动，绕环之，及乍前乍后，左右，殃益大。”

“赤角，犯我城。黄角，地之争。白角，哭泣之声。青角，有兵忧。黑角，则水。”

“小以角动，兵起。…角，敢戏。…顺角所指，吉。”

“赤角有戏。白角有丧。黑圆角忧，有水事。青圆小角忧，有木事。黄圆和角，有土事，有年。”

“青角，兵忧。黑角，水。”

“赤角，犯我城。黄角，地之争。白角，号泣之声。”

“昭明星大而白，无角，乍上乍下。”[35]

这些观察到的芒角，可能是因窥管测象而产生。黄一农以铜管仿制窥管，从实验中证实了这种观察的可能性[36]。其它用“芒”与“角”的例子还有，北周庾季才的《灵台秘苑》中称：“动者光体摇动；芒者光耀生芒刺；角者头角长大芒；喜者光色润泽；恕(怒)者光芒威大润泽。”可能是明朝刘基所辑，但托之唐朝李淳风所撰的《观象玩占》里，芒角已有更量化的定义：“光曜外出生锋曰芒，五寸以下谓之芒；芒而长四出曰角，一曰七寸以上谓之角。”[37]

芒角的产生应该是对称的，也就是把芒角的端连起来会形成正多边形。对于正多边形古代也有一个特殊的字“觚”来描述。《汉书・律历志》说：“其算法用竹，径一分，长六寸，二百七十一枚而成六觚，为一握。”[38]刘徽在注解《九章算术》求圆田的方法时，涉及六边、十二边、二十四边、四十八边、九十六边、一百九十二边、一千五百三十六边、三千七十二边的正方形。虽然南宋鲍瀚之刻本及明《永乐大典》本均用若干“弧”，但清朝戴震校为若干“觚”。“觚”字本多从角。这种字源的亲近性以及通过对星光描述的媒介，终致“觚”“角”不分。“角”从尖锐的芒角，过渡到宽厚的觚角，再统合了隅角，而日渐成为一般角的统称。

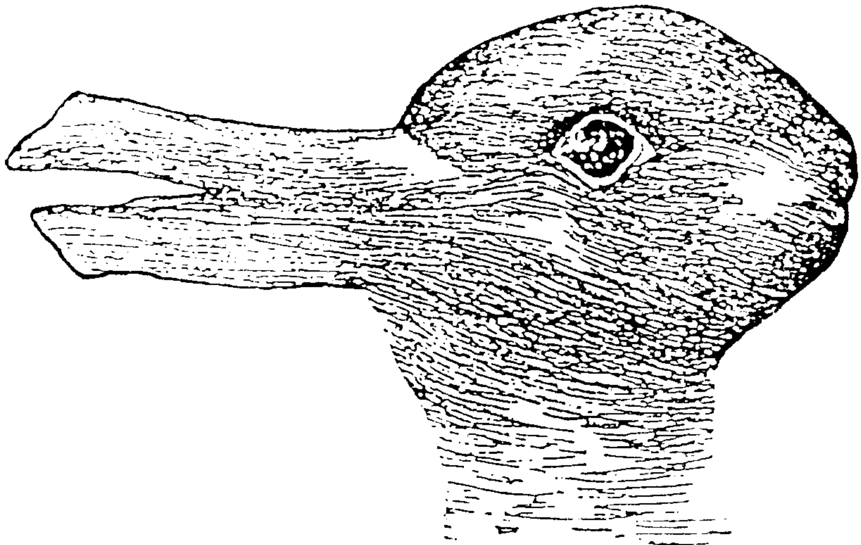
六"角"与"度"的"格式塔"

从前面的讨论,可以看出中国古代对于角度的认识,有三条依循的网络。一条是从来未曾充分发展的技艺路线,另两条是各领胜场的天文与几何的研究传统。天文著重在圆弧的线性度量,而几何著重在过与边的交会空间。这两套等价的系统,如果不曾通过圆心角与圆弧的对应关系统一起来,在角度的认识上是有缺陷的。清圣祖敕编的《数理精蕴》所说:"凡圆界,皆以所对之角而命其弧,而角又以所对之弧而命其度。盖角度俱在圆界,而圆界为角度之规也。"[39]这种"角"与"度"藉由圆而贯通的统一认识,已经是中国人学习过欧几里得《几何原本》后的水平。

从史实上看,中国几何的"角"与天文的"度",没有自发的统合到一个整体的认识中。但是要问为什么会如此,恐怕就成为一个无法回答的问题了。退而求其次,我们也许可以找出某些人类认知的模式,说明这种分裂的状态并非全属意外。

我们用来作为参考的模式,取自视觉功能的"格式塔"(Gestalt)现象。当人观察某些特殊的图像时,会因为脑中组织视觉信息的方式不同,而把图像解释成不同的物件。最突出的地方是当圆像被看作是一种物件时,便无法同时被看作另一种物件。多数人稍加指点,便可由一种视讯翻转(switch)成另一种视讯,但有些人就套牢在自己一开始的解释中,非常不容易翻转到其它的视讯。

现在举几个著名"格式塔"的例子。图二的立方块是 louis Albert Necker 在 1832 年公布的,其中字母 A 可看作在方块的前面,也可以看作在方块的底面。图三是 Joseph Jastrow 在 1900 年举的例证,可看成一只嘴向左的鸭子,也可看成一只嘴向右的兔子,但是就是无法同时看出鸭子与兔子。图四是漫画家 W. E. Hill 在 1915 年发表的,标题就叫作"我的妻子与我的岳母"。图五则是 1915 年 Edgar Rubin 发现的一种暧昧图像,可看成是白色的花瓶,或两张黑色相对的面孔侧影[40]。



图三