

混凝土断裂力学研究

Researches on the Fracture
Mechanics of Concrete

徐世烺
Xu Shilang

赵国藩
Zhao Guofan

编著



大连理工大学出版社

The Press of Dalian University of Technology

混凝土断裂力学研究

Researches on the Fracture
Mechanics of Concrete

徐世烺 赵国藩 编著
Xu Shilang Zhao Guofan

大连理工大学出版社
The Press of Dalian University of Technology

内 容 提 要

本书荟集了混凝土断裂力学专题研究的若干最新成果,内容包括混凝土断裂韧度和断裂能、断裂韧度的概率模型、裂缝稳定扩展过程及裂缝评定的断裂韧度准则、双 K 断裂准则、裂缝尖端应变场分布等。既有混凝土线弹性断裂力学内容,又有混凝土弹塑性断裂力学内容。可供从事材料科学及土建、水利、交通、航运、铁道等部门的科学研究人员、工程技术人员和大专院校有关专业师生阅读参考。

混凝土断裂力学研究

Hunningtu Duanlielixue Yanjiu

徐世烺 赵国藩 编著

大连理工大学出版社出版发行 (邮政编码: 116024)
(出版社登记证号(辽)第 16 号) 大连理工大学印刷厂印刷

开本: 850×1168 1/32 印张: $6 \frac{5}{8}$ 字数: 172 千字
1991 年 4 月 第 1 版 1991 年 4 月第 1 次印刷
印数: 0001—2000 册

责任编辑: 水舟 责任校对: 夏冰

封面设计: 葛明

ISBN 7-5611-0367-0/TU · 7 定价: 2.31 元

序

混凝土是由粗集料、细集料、水泥(通常还有外加剂)等组成的性能十分复杂的材料,往往在凝结硬化过程中或以后的使用过程中出现裂缝。混凝土裂缝问题是工程界极为关注的问题。对混凝土结构,除了对强度、收缩、徐变、冻融、渗透性等提出要求之外,还迫切需要对混凝土裂缝产生的原因、裂缝的特性、裂缝的发展过程如失稳扩展、裂缝危险性的评估以及防止裂缝的对策等进行研究。近年来发展的混凝土断裂力学就是研究这一复杂问题的有效手段之一。大连理工大学土木系工程结构研究室于1981年起在与国际交流研究信息的基础上,在国家自然科学基金会和水利水电科学基金会的资助下,开始进行混凝土断裂力学的研究,徐世烺副教授(博士),在1979~1982年攻读硕士学位期间,1984~1988年攻读博士学位期间,在黄承逵高级工程师、刘毅工程师、王凤翼博士研究生、叶丽达工程师、靳国礼工程师、沈吉纳工程师、曲秀华技术员等同志通力合作下,进行了大量的试验研究,特别是难度大的国内外尚少见的大型混凝土试件的试验研究,和理论计算分析。在混凝土基本断裂特性、断裂韧度、断裂能、裂缝扩展过程、裂缝尖端应变场及相应的断裂准则等方面提出了研究报告。部分论文已发表或将发表在国内学术刊物(土木工程学报、水利学报等)

目 录

混凝土脆性破坏的断裂统计理论	徐世烺	(1)
一、引言		(1)
二、脆性破坏统计理论与线弹性断裂力学		(3)
三、混凝土断裂韧度 K_{Ic} 的尺寸效应		(5)
四、试验验证		(12)
参考文献		(15)
A Statistical Method for Brittle Fracture of		
Concrete (Abstract)		
	Xu Shilang	(15)
混凝土断裂韧度的概率模型研究	徐世烺 赵国藩	(16)
一、引言		(16)
二、Weibull 脆性破坏统计理论		(18)
三、混凝土断裂韧度观测值的统计分布		(20)
四、混凝土 K_{Ic} 的尺寸效应及对大尺寸混凝土试件 K_{Ic} 统计分布的推断		(30)
五、结束语		(35)
参考文献		(36)
A Study on Probability Model of Fracture Toughness of		
Concrete (Abstract)		
	Xu Shilang Zhao Guofan	(37)
混凝土裂缝的稳定扩展过程与临界裂缝尖端张开位移		
.....	徐世烺 赵国藩	(38)
一、引言		(38)
二、实验装置与实验过程		(41)
三、混凝土失稳断裂前微裂缝区的形状、裂缝发展过程及 应变场分布		(46)
四、结束语		(55)

参考文献	(56)
The Stable Propagation of Crack in Concrete and the Determination of Critical Crack Tip Opening Displacement (Abstract)	
..... Xu Shilang Zhao Guofan	(57)
窄条断裂区模型及试件尺寸对断裂韧度的影响规律	
..... 徐世焯 赵国藩 刘毅 叶丽达 王凤翼	(59)
一、引言	(59)
二、实验概况	(60)
三、试件尺寸对断裂韧度 K_{IC} 的影响规律	(63)
四、窄条断裂区模型和临界裂缝尖端张开位移	(67)
五、用 $CTOD_c$ 作控制参数求解等效断裂韧度 \tilde{K}_{IC}	(73)
六、结论	(79)
参考文献	(80)
A Narrow Strip Model of Fracture Zone and the Variational Trends in Size Effect on Fracture Toughness of Concrete (Abstract)	
..... Xu Shilang Zhao Guofan Liu Yi Yie Lida Wang Fengyi	(82)
大型试件断裂韧度和高混凝土坝裂缝评定的断裂韧度准则 徐世焯 赵国藩 刘毅 黄承远 叶丽达 王凤翼 沈吉纳 靳国礼	(83)
一、引言	(83)
二、实验概况	(84)
三、大型试件的断裂韧度	(89)
四、高混凝土坝裂缝评定的断裂韧度准则	(92)
五、结束语	(94)
参考文献	(95)
The Fracture Toughness of the Huge Specimens of	

Concrete and a Criterion of the Fracture Toughness to High Concrete Dam (Abstract)	
..... Xu Shilang Zhao Guofan Liu Yi Huang Chengkui	
Yie Lida Wang Fengyi Shen Jina Jin Guoli	(96)
光弹性贴片法研究混凝土裂缝扩展过程	
..... 徐世焯 赵国藩	(97)
一、引言	(97)
二、实验概况	(99)
三、混凝土大型试件的裂缝扩展过程	(102)
四、扩展裂缝前缘形变场分布	(107)
五、进行有效裂缝长度修正后的等效断裂韧度 K'_{Ic}	(112)
六、结束语	(114)
参考文献	(114)
The Investigation on the Propagation Process of a Crack in Concrete by Means of Photoelastic Coating (Abstract)	
..... Xu Shilang Zhao Guofan	(115)
混凝土结构裂缝扩展的双 K 断裂准则	
..... 徐世焯 赵国藩	(116)
一、引言	(116)
二、混凝土起裂断裂韧度 K^s_{Ic} 和等效断裂韧度 K'_{Ic}	(117)
三、 K_R 阻力曲线	(120)
四、裂缝扩展的双 K 断裂准则	(123)
五、结论	(124)
参考文献	(125)
A Double-K Fracture Criterion for the Crack Propagation in Concrete Structures (Abstract)	
..... Xu Shilang, Zhao Guofan	(126)
三点弯曲梁法研究混凝土断裂能 G_F 及其试件尺寸影响规律 徐世焯 赵国藩 刘毅 叶丽达	(127)

一、引言	(127)
二、虚拟裂缝模型	(128)
三、断裂能 G_F 原理及其测定方法	(132)
四、实验研究	(136)
五、结束语	(143)
参考文献	(143)
The Fracture Energy G_F of Concrete and its Variational Trend in Size Effect Studied by Using the Three-Point Bending Beams (Abstract)	
..... Xu Shilang Zhao Guofan Liu Yi Yie Lida	(144)
混凝土大型试件断裂能 G_F 及缝端应变场	
..... 徐世焯 赵国藩 黄承逵 刘毅	
..... 王凤翼 靳国礼 叶丽达 沈吉纳	(146)
一、引言	(146)
二、加载装置与试验概况	(153)
三、大型试件断裂能 G_F 及其裂缝尖端应变场	(160)
四、结束语	(170)
参考文献	(171)
The Fracture Energy G_F and Strain Field in Front of the Notch for the Huge Compact Tension Specimens of Concrete (Abstract)	
..... Xu Shilang Zhao Guofan Huang Chengkui Liu Yi	
..... Wang Fengyi Jing Guoli Yie Lida Sheng Jina	(172)
The Determination of the Fracture Toughness and the Fracture Energy of Concrete	
..... Xu Shilang Zhao Guofan	(173)
1. Introduction	(173)
2. Mix, Specimen Preparation and Test Procedure	(174)
3. The Characters of the Size Effects on Fracture Toughness K_{1c} of Concrete	(177)

4. The Characters of Size Effect on the Fracture	
Energy G_F	(180)
5. Conclusions	(182)
References	(182)
A Study on the Probability Distribution and the Size Effect	
on the Fracture Toughness of Concrete	
..... Xu Shilang Zhao Guofan	(184)
1. Introduction	(184)
2. Probability Distribution of the Fracture Toughness of	
Concrete	(185)
3. A Statistical Fracture Method to Describe the Effect of	
Specimen Dimensions on the Fracture Toughness	
of Concrete	(186)
4. The Experimental Verification of Equation (1)	(187)
5. Conclusion	(190)
References	(190)
A Study on Fracture Process Zones in Concrete by Means of	
Laser Speckle Photography	
..... Xu Shilang Zhao Guofan	(191)
1. Introduction	(191)
2. Experimental Technique of Specimens	(192)
3. Critical Crack Tip Opening Displacement of Concrete	
.....	(194)
4. Crack Propagation and Fracture Process Zones in	
Concrete	(197)
5. Distribution of Strain Field in Front of Notch	(197)
6. Conclusions	(201)
Reference	(202)

混凝土脆性破坏的断裂统计理论

徐世烺

提 要

本文把 Weibull 脆性破坏统计理论与线弹性断裂力学相结合,提出了混凝土脆性破坏的断裂统计理论,研究了瞬时加载条件下混凝土材料的断裂特性。在此基础上,作者采用链条强度模型推导出了由小尺寸试件测定的 K_{Ic} 值去推求同一材料的大尺寸构件 K_{Ic} 值的尺寸效应公式。公式计算结果与作者所作的 17 根试件的试验结果以及作者所收集到的五批共 52 根试件的试验结果相一致。

一、引言

在混凝土断裂问题的研究中,目前争论的中心问题是线弹性断裂力学是否适用于混凝土材料。引起争论的原因是人们对混凝土的基本特性的看法不尽一致,以及对混凝土 K_{Ic} 的尺寸效应尚不够了解。

M. F. Kaplan 于 1961 年首先发表了可将线弹性断裂力学用于混凝土的试验成果和结论^[1]。随着试验研究的逐步深入,越来越多的试验结果表明, K_{Ic} 随试件尺寸的增大而增大,净截面名义应力随试件尺寸的增大而减小^[2-5]。因而人们开始对线弹性断裂力学可用于混凝土产生了怀疑。有些研究者在混凝土断裂试验中发现其荷载-位移曲线的非线性特性非常明显,据此认为混凝土并不

是脆性材料,而是“弹-塑性”材料,因而倾向于用弹塑性断裂力学参数作为混凝土断裂特性的判据。也有的研究者根据混凝土在长期荷载作用下存在着蠕变变形,主张从流变断裂的角度来研究混凝土的断裂。

从混凝土的蠕变试验资料(图 1)^[7]来看,当试验时间较长时,混凝土应力-应变曲线的非线性特性非常明显;但随着试验时间的缩短,非线性特性逐渐减小。在试验时间趋近于瞬时的情况下,其应力-应变关系曲线基本是线性的。另外从文献 4 来看,试验时加载时间为 10 分钟左右,荷载-位移曲线的非线性程度就非常明显;本文作者试验时的加载时间为 30 秒至 2 分钟,荷载-位移曲线直到破坏荷载的 93% 都是线性的。除了混凝土标号的影响之外,说明了混凝土的蠕变影响是不能忽视的。许多试验结果由于存在着明显的蠕变影响,因而荷载-位移曲线呈非线性。所以有些研究者就把混凝土蠕变特性误认为是“弹-塑性”特征。从上述分析来看,在长期荷载作用下混凝土表现为粘弹性材料;在瞬时荷载作用下混凝土表现为线弹性材料,其破坏是属于脆性的。

鉴于混凝土的这种基本特性,为了更好地了解混凝土的断裂特性,研究工作是否可分两步走。第一步暂不考虑蠕变影响,将时间因子分离开来,研究瞬时条件下混凝土材料的断裂特性的断裂判据;第二步再将时间因子放进去,研究长期荷载作用下混凝土材料的断裂特性和断裂判据。

可以看出,在瞬时荷载作用条件下,混凝土的荷载-位移曲线基本是线性的,存在着低应力脆断现象。这是可以应用线弹性断裂力学最基本的材料特征。但是,许多试验结果表明了混凝土的 K_{Ic} 值随着试件尺寸的变化而变化,这又如何解释呢?看来,对这个问题的看法已成为在瞬时条件下线弹性断裂力学能否适用于混凝土材料的关键。

我们知道,混凝土不是均质材料,它是由粗细骨料、水泥浆组成的多相材料。其内部又遍布着空穴、裂隙、界面裂缝等大量的原

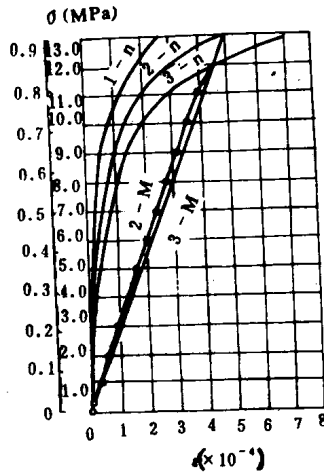


图1 不同加荷速度条件下徐变变形与应力的关系

1-n—试件 No. 1 的徐变变形, $v=8.0\text{MPa/h}$;

2-n—试件 No. 2 的徐变变形, $v=4.0\text{MPa/h}$;

3-n—试件 No. 3 的徐变变形, $v=1.0\text{MPa/h}$;

2-M、3-M—试件 No. 2 和 No. 3 的瞬时变形, 龄期为 47~49d。

始缺陷。从而,它是一种具有随机统计特性的脆性材料,几乎所有的
的基本力学特性指标都是宏观统计意义上的平均物理量。因此,当
我们研究混凝土的断裂特性及其断裂参数 K_{Ic} 时,就不能不考虑
混凝土所具有的这种随机统计特性。

二、脆性破坏统计理论与线弹性断裂力学

早在 1939 年 Weibull 就在试验和理论分析的基础上提出了
著名的脆性破坏统计理论,解释了脆性材料的拉断强度依赖于尺
寸而变化的现象。以后又有许多学者从事这方面的工作,使得这一
理论得到了进一步发展。

脆性破坏统计理论把物体的抗拉强度 R 看作是一个随机变

量。假设物体是由数目极大的若干基本单元所组成，各个基本单元程度不同地担负着整个物体的抗拉强度的一部分。这些单元不论在尺寸、弹性、微观缺陷、裂缝长度等方面是各不相同的，因而它们的抗拉强度也是不相同的。由于这些单元的不均匀性是随机出现的，所以各个基本单元的抗拉强度 R_1, R_2, \dots, R_n 可看成是一组随机变量，都必须服从某一概率分布 $F(R)$ ——原始分布。若能找到整个物体的抗拉强度 R 与组成它的基本单元的局部抗拉强度 (R_1, R_2, \dots, R_n) 之间的关系，或者说确定出一个适当的破坏模型，就可根据原始分布 $F(R)$ 求出整个物体的抗拉强度的分布函数 $F_v(R)$ ，然后就能确定出其宏观平均抗拉强度、方差等值。

线弹性断裂力学则是研究脆性材料所组成的带裂缝物体抵抗断裂的能力。它首先承认物体中含有宏观裂缝，只要知道了物体的断裂韧度值 K_{Ic} (或 G_{Ic})，就可确定出物体中的拉应力 σ 和裂缝长度 a 之间的关系。由此就能根据物体中所具有的宏观裂缝的大小来确定物体抵抗断裂所能承担的最大拉应力，反之亦然。

由此看到，线弹性断裂力学与脆性破坏统计理论的研究对象都是脆性材料。前者研究均质脆性材料组成的物体含有单一裂缝时的断裂特性，它不能处理具有随机统计特性的脆性材料的物体在带有无数随机分布裂缝下的断裂特性；后者的数学基础是概率统计，它不但可以描述具有随机统计特性的脆性材料所组成的物体的抗拉强度所遵从的分布规律，还可描述由这类材料所组成的物体的平均抗拉强度与尺寸之间的定量关系。因此，把脆性破坏统计理论与线弹性断裂力学相结合来研究混凝土材料的断裂，不但可使前面所提的问题有可能得到解决，而且还预示了它可用概率统计方法来处理混凝土结构中大量出现的随机断裂。这将为进一步研究混凝土的断裂机理和断裂规律提供一个新的途径，为研究混凝土结构的断裂概率提供一个新的方法。

三、混凝土断裂韧度 K_{Ic} 的尺寸效应

Weibull 在建立脆性破坏统计理论时提出了一个链条强度假设为破坏模型。由于链条强度模型在数学处理上比较简单,也有一定的精度,当本文把脆性破坏统计理论与线弹性断裂力学结合起来研究混凝土 K_{Ic} 尺寸效应时,作为第一次逼近,在这里也采用链条强度模型。

按照链条强度模型,把物体看成是由无数带有不同长度裂缝的单元所组成,各个单元相互无关。不同长度的裂缝对应于不同的局部名义抗拉强度 R 。若物体中某个基本单元破坏,则整个物体就发生破坏。设体积为 V 的物体共有 nV 个裂缝, n 为单位体积内裂缝的平均数。将每一条裂缝所在的体积微元看成是一个基本单元,共有 nV 个基本单元。设各个基本单元的局部名义抗拉强度为 R_1, R_2, \dots, R_n , 其所遵守的原始分布为 $F(R)$, 整个物体的净截面名义抗拉强度所服从的分布为 $F_v(R)$ 。现在先来建立物体的净截面名义抗拉强度 R 的分布 $F_v(R)$ 与组成它的各个基本单元的局部名义抗拉强度 $(R_1, R_2, \dots, R_{nV})$ 所服从的原始分布 $F(R)$ 之间的关系。

原始分布函数 $F(R)$ 可看成是基本单元的局部名义抗拉强度小于 R 的概率。显然,该单元不破坏的概率为 $1 - F(R)$ 。在均匀应力场情形下,各单元的计算应力相同,因而整个物体不破坏的概率为 $[1 - F(R)]^{nV}$ 。由于整个物体的破坏概率为 $F_v(R)$, 故有

$$F_v(R) = 1 - [1 - F(R)]^{nV} \quad (1)$$

设 R_1 是各基本单元的局部抗拉强度的最小值,当 $\sigma \leq R_1$ 时该单元不破坏,只有当 $\sigma > R_1$ 时,该单元才发生破坏。显然 $F(R)$ 具有下面的性质:

(a) 对任一 $\varepsilon > 0, R_1$ 满足

$$F(R_1) = 0,$$

$$F(R_1 + \varepsilon) \geq 0,$$

$$|F^{(\alpha+1)}(\xi)| \leq A \quad (R_1 < \xi < R_1 + \varepsilon);$$

(b) 在大于 R_1 附近原始分布函数 $F(R)$ 为某个正数。也就是对任一 $\varepsilon > 0, R_1$ 满足

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(R_1 + \varepsilon)}{\varepsilon^\alpha} = B \quad (\alpha > 0, B > 0)$$

可见上式等价于

$$\begin{aligned} F^{(i)}(R_1) &= 0, \\ F^{(\alpha)}(R_1) &= C \end{aligned} \quad (i < \alpha, C > 0)$$

因此, 当我们把 $F(R)$ 在 $R = R_1$ 附近展成泰勒级数时有

$$\begin{aligned} F(R) &= \frac{F^{(\alpha)}(R_1)}{\alpha!} (R - R_1)^\alpha \\ &\quad + \frac{F^{(\alpha+1)}(\xi)}{(\alpha+1)!} (R - R_1)^{\alpha+1} \\ &= B(R - R_1)^\alpha + \theta A (R - R_1)^{\alpha+1} \\ &\quad (0 \leq \theta \leq 1) \end{aligned}$$

略去 $(\alpha+1)$ 阶的小量, 得到

$$F(R) = B(R - R_1)^\alpha \quad (2)$$

因为当 $R = R_1$ 时有

$$\ln[1 - F(R)] = -F(R)$$

所以

$$\ln[1 - F(R)] = -B(R - R_1)^\alpha$$

从而得

$$1 - F(R) = e^{-B(R - R_1)^\alpha} \quad (3)$$

将公式(3)代入公式(1)就再次得到了 Болотин 在文献 7 里所给出的表达式:

$$F_v(R) = 1 - e^{-n^v B (R - R_1)^\alpha} \quad (4)$$

为了得到净截面名义平均抗拉强度 \bar{R} 与试件尺寸的关系, 参照 Болотин 在文献 7 中所用的方法推导如下:

对公式(4)作变量置换

$$nB = \frac{1}{V_0 R_c^\alpha}$$

此处, V_0 为某个标准试件的体积; R_c 为常数, 单位为应力的单位。于是公式(4)成为

$$F_v(R) = 1 - \exp\left[-\frac{V}{V_0}\left(\frac{R - R_1}{R_c}\right)^\alpha\right] \quad (5)$$

所以物体的净截面名义抗拉强度的平均值(数学期望值)为

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \int_{R_1}^{\infty} R \frac{dF_v(R)}{dR} dR \\ &= R_1 + \int_{R_1}^{\infty} [1 - F_v(R)] dR \end{aligned} \quad (6)$$

令 $\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{R - R_1}{R_c}\right) = x$, 则有

$$\bar{R} = R_1 + R_c \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-x^\alpha} dx \quad (7)$$

再令 $R_1 = 0, x^\alpha = t$, 则得到

$$\bar{R} = R_c \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (8)$$

在非均匀应力场情形下, 近似地把全部体积分成若干小体积, 在每个小体积 ΔV_k 内认为应力是均匀的。但 ΔV_k 内又包含足够多的裂缝数, 以致仍可应用公式(5), 每个小体积不破坏的概率为

$$\begin{aligned} P_{\Delta V_k}(+) &= 1 - F_{\Delta V_k}(R) \\ &= \exp\left[-\frac{\Delta V_k}{V_0}\left(\frac{R_k - R_1}{R_c}\right)^\alpha\right] \end{aligned} \quad (9)$$

整个物体破坏的概率为

$$\begin{aligned} F_v(R) &= P_v(-) = 1 - \prod_k P_{\Delta V_k}(+) \\ &= 1 - \exp\left[-\frac{\sum \Delta V_k}{V}\left(\frac{R_k - R_1}{R_c}\right)^\alpha\right] \end{aligned} \quad (10)$$

设该点的计算名义应力 R_k 可写成 $Rf(x, y, z)$, R 为最大应力, f

(x, y, z) 为各点的无量纲坐标函数。则当 ΔV_* 足够小, 数目足够多时有

$$\begin{aligned}
 F_v(R) &= 1 - \exp\left(-\frac{1}{V_0}\right) \int_{Rf(x,y,z) > R_1} \left[\frac{Rf(x,y,z) - R_1}{R_c}\right]^\alpha dV \\
 &= 1 - \exp\left(-\frac{1}{V_0}\right) \iiint_{Rf(x,y,z) > R_1} \left[\frac{Rf(x,y,z) - R_1}{R_c}\right]^\alpha dx dy dz
 \end{aligned} \tag{11}$$

所以又可得到非均匀应力场情形下整个物体的净截面名义抗拉强度的平均值 \bar{R}_* :

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_* &= \int_{R_1}^{\infty} R \frac{dF_v(R)}{dR} dR \\
 &= R_1 + \int_{R_1}^{\infty} [1 - F_v(R)] dR
 \end{aligned}$$

令 $R_1 = 0$, $V_* = \iiint_{Rf(x,y,z) > 0} \left[\frac{Rf(x,y,z) - R_1}{R_c}\right]^\alpha dx dy dz$

则 $\bar{R}_* = \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{V_*}{V_0} \left(\frac{R}{R_c}\right)^\alpha\right] dR$ (12)

再令 $\left(\frac{V_*}{V_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{R}{R_c}\right) = x$

得到 $\bar{R}_* = R_c \left(\frac{V_0}{V_*}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$ (13)

由公式(8)与公式(13)就得到了均匀应力状态与非均匀应力状态的名义抗拉强度的平均值之间的关系

$$\frac{\bar{R}_*}{R} = \left(\frac{V_0}{V_*}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{14}$$

上式中

$$V_* = \iiint_{Rf(x,y,z) > 0} [f(x,y,z)]^\alpha dx dy dz \tag{15}$$

V_* 为转换体积。这就是由 Weibull 所提出, 并经过 Болотин 证明了