教学用书

微分几何习题集

〔苏〕A.C.菲金科等编

陈立人译　顾鹤荣校

浙江师范学院金华分校数学科

1982年

前　言

本书系根据苏联科学出版社(Издательство《Наука》)出版的菲金科 (А.С.ФЕДЕНКО) 等编著“微分几何习题集” (Сборник задач по дифференциальной геометрии) 1979年版全文译出。全书分六章，共有1091道题目。内容包括概论、矢函数、平面曲线、空间曲线、曲面、曲线和曲面的仿射性质、场论初步等。大部分习题附有解答或提示。每一章节开始，还简要介绍了有关基本概念、公式、定义和定理。该书考虑到了目前在数学教学中发生的变化，运用了比较近代的方法，是苏联高等院校较新的数学教学参考书。翻译并出版此书，目的是为了适应我国教学需要，供高等院校数学专业和工科大学有关专业的“微分几何”教学参考。考虑到我国目前教学中所习惯采用的符号，中译本对原书所使用的某些符号作了更动，对原书中的一些错误和遗漏作了修改与补充。

在本书的出书过程中，得到了我校和科领导的大力支持。华东师范大学陈信漪、顾鹤荣、李浩然等老师对本书的翻译工作给予了热情鼓励和指导。特别是，顾鹤荣老师校阅了全部译稿，并作了仔细的修改。另外，我们科里的一些同志为此书作了不少工作，金华新华印刷厂为本书承担排版印刷。在此译者向他们表示衷心的感谢。

由于水平有限，错误在所难免，敬请读者批评指正。

陈立人

1982年2月

目　　录

序　　言

本习题集包含在综合性大学物理数学系讲授的微分几何课程的基本章节范围内的一千多道习题和练习题。在这版的准备时，作者力求考虑到目前在数学教学中发生的变化。

中学转到新的教学大纲导致了教学方法、术语及符号的变化，在此书中我们尽力巩固和发展这些革新。我们无条件地采用在中学里惯用的所有术语和符号，特别注意在微分几何课程中被研究的基本对象的确切定义。对于曲线（线）给出两种定义。即一方面，曲线被定义为等价参数表示道路的类；另一方面，引入作为一维流形的线的概念。曲面被看作为二维流形并通常借助其参数表示给出。大多数题目可从局部观点来解决，即在确定点的邻域内研究几何图形。

在本书的叙述中作者力求将微分几何课程同其他数学课程结合起来，主要用到线性代数、数学分析和微分方程的工具，并特别注意与中学几何和解析几何的联系。

全书包括概论、六章及二十一节。

此书可推荐为综合性大学和师范学院物理数学系的教学参考书。

符　　号

$\{a, b, c, \cdots\}$—由元素 $a, b, c, \cdots$ 组成的集合；

$\{x \mid x$ 具有性质 $P\}$——所有具有给定性质 P 的元素的集合；

$x \in A$——x 是集合 A 的元素（x 属于 A）；

$A \subset B$——集合 A 是集合 B 的子集；

$A \cup B$——集合 A 和 B 的并；

$A \cap B$——集合 A 和 B 的交；

$A \setminus B$——集合的差；

$\varnothing$——空集；

R——所有实数的集合；

$\forall$——任一个；

$\exists$——在在；

$p \Longrightarrow q$——由 p 得出 q；

$p \Longleftrightarrow q$——p 和 q 等价；

$\overline{a} \cdot \overline{b}$——矢量的数量积；

$\overline{a} \times \overline{b}$——矢量的矢量积；

$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$——矢量的混合积。

所有其他符号将在本文中阐明。

概　　论

映　　射

设X和Y是任意的非空集合，如果集合X的每一个元素与集合Y中的某个元素相对应，那么说给出了集合X到集合Y内的一个映射。映射用字母f表示，在此记为

$$f: X \to Y,\quad x \mapsto f(x) \tag{1}$$

元素 $y = f(x)$ 称为元素x的象。如果 $A \subset X$，则集合

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$$

称为集合A的象，集合 $f(X)$ 称为映射f的象。

若 $f(X) = Y$，则称f是集合X到集合Y上的映射，或者称f是满射。如果

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

则称映射f是内射。同时是满射和内射的映射称为双射。这种映射确定了集合X和Y的元素之间的一一对应。对于双射f存在逆映射：

$$f^{-1}: Y \to X,\quad f(x) \mapsto x,$$

它同样也是双射。

如果 $A \subset X$，那么可以观察映射（1）在A上的限制：

$$f|_A: A \to Y,\quad a \mapsto f(a)，这里\ a \in A。$$

当将实数集合R作为Y，则称映射（1）为函数。

设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 均为映射，那么能确定映射

$$g \circ f: X \to Z,\ x \mapsto g(f(x)),$$

它称为映射 f 和 g 的合成。

两个集合X和Y的直积（或笛卡尔积）是所有的偶（x，y）的集合，其中，$x \in X$，$y \in Y$：

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}。$$

空　间　R^n

由 n 个实数的有序组（x_1，x_2，$\cdots x_n$）组成的集合

$$R^n = \{(x_1, x_2, \cdots x_n) \mid x_1, x_2, \cdots x_n \in R\}$$

能够赋予不同的结构。R^n是n维实矢量空间，据此R^n中的元素可称为矢量，并用符号$\overline{a}$，$\overline{b}$，$\overline{x}$，$\overline{y}$，…表示。由矢量

$$\overline{i}_1 = (1, 0, \cdots, 0),\ \overline{i}_2 = (0, 1, 0 \cdots, 0),\ \cdots\cdots,$$
$$\overline{i}_n = (0, 0, \cdots, 1),$$

组成的空间R^n的基称为规范基。在R^3中的规范基用（$\overline{i}$，$\overline{j}$，$\overline{k}$）表示。

我们可将R^n看作为与矢量空间R^n联系在一起的点的仿射空间。此时R^n的元素既可看作是点，并用符号M，N，…表示，也可看作是矢量$\overline{a}$，$\overline{x}$，…。

矢量$\overline{r} = (x_1, \cdots x_n)$关于规范基具有坐标$x_1$，$x_2$ …，x_n，点A（x_1，…，x_n）关于标架（O，$\overline{i}_1$，$\overline{i}_2$，$\overline{i}_3$，…$\overline{i}_n$）具有同样的仿射坐标，其中$O = (0, 0, \cdots, 0)$是坐标原点。

如果使空间R^n的任意两个矢量$\overline{x} = (x_1, x_2 \cdots x_n)$和

$\overline{y}=(y_1, y_2, \cdots y_n)$与称为矢量$\overline{x}$和$\overline{y}$的数量积的数：

$$\overline{x}\cdot\overline{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

相对应，那么R^n成为n维欧基里德空间。在这个空间中能引入两点：$M=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$和$N=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$间的距离的概念：

$$|MN|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}。$$

特别是，对中学数学课程中研究的平面和空间，如果在它们中选取笛卡尔坐标系，则能够分别看作为R^2和R^3。

集合

$$B(A, \varepsilon)=\{M\in R^n|AM|<\varepsilon\}$$

称为球心在点A，半径为$\varepsilon>0$的球，这个球称为点A的ε邻域。

R^n的子集U称为开集，如果对它的每个点A，它都包含球心在A的某个球。所有包含点A的开集都称为该点的邻域。

点$A\in R^n$称为集合$U\in R^n$的接触点，如果这个点的任何邻域至少包含U里的一个点。集合U的所有接触点的总合称为集合U的闭包，并用符号$\overline{U}$表示。如果$\overline{U}=U$，则集合U称为闭的。

如果不存在不交的开集U_1和U_2，这两个开集将集合V分为两个非空子集V_1和V_2，使$V_1\subset U_1$，$V_2\subset U_2$，则集合$V\subset R^n$称为连通的。开连通集合称为区域，区域的闭包称为闭区域。

如果集合U内的点连同它的某个邻域都属于集合U，则

该点称为集合U的内点。集合U的所有内点的总合称为该集合的内部。

如果在点$M \in R^n$的任何邻域中既存在属于集合$U \subset R^n$的点，又存在不属于集合U的点，则点M称为集合U的边界点。集合U的所有边界点的总合称它的边界，并用符号∂U表示。

在空间R^n中所有点的子集皆称为空间R^n的图形Φ。给出一个含有$x_1, x_2, \cdots, x_n$的方程称为图形Φ的方程，如果R^n的属于图形Φ的点且仅仅是属于图形Φ的点满足此方程。设$l: R^m \to R^n$是一个线性映射，$(\overline{i}_1, \overline{i}_2, \cdots, \overline{i}_m)$是$R^m$的规范基，$('\overline{i}_1, '\overline{i}_2, \cdots, '\overline{i}_n)$是$R^n$的规范基，并设

$$l(\overline{i}_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk}{}'\overline{i_j} \quad (k = 1, 2, \cdots m)$$ 。矩阵

$$(\alpha_{jk})\begin{matrix} 1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant m \end{matrix}$$

称为线性变换l的矩阵，它的列是矢量$l(\overline{i_k})$的坐标。如果$x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in R^m$，且
$l(x) = (y_1, y_2, \cdots y_n) \in R^n$，那么

$$y_j = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{jk} x_k 。$$

m维矢量空间V的两个基$(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \cdots \overline{e}_m) = [\overline{e}]$和$(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots, \overline{a}_m) = [\overline{a}]$称为等价的，如果由基$[\overline{e}]$到基$[\overline{a}]$的变换矩阵的行列式（即空间V的由基$[\overline{e}]$到基$[\overline{a}]$的线

性变换的矩阵）是正的。空间V的等价基的类称为这个空间的定向。每个矢量空间仅仅存在两个定向，其中一个称为正的，另一个称为反的。这样，空间的定向的选择等价于这个空间中基的选择。

如果V是在R^3中的二维子空间，($\overline{e}_1$，$\overline{e}_2$）是V的基，而$\overline{n}$是R^3的不属于V的非零矢，则($\overline{e}_1$，$\overline{e}_2$，$\overline{n}$）是R^3的基。如果矢量$\overline{n}$已被选定，而基（$\overline{e}_1$，$\overline{e}_2$，$\overline{n}$）与R^3的规范基等价，则基（$\overline{e}_1$，$\overline{e}_2$，）称为正的。这样，确定V的定向等价于确定矢量$\overline{n}$。通常将$\overline{n}$取为与V正交的单位矢量。

线性映射α：$R^n \to R$ 称为在矢量空间R^n上的线性形式。设$\alpha(\overline{i}_k) = \alpha_k$，那么对于矢量

$\overline{h} = (h_1, h_2, \cdots h_n)$ 有

$$\alpha(\overline{h}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k。$$

坐标函数

u_i：$R^n \to R$，$(u_1, u_2, \cdots, u_n) \mapsto u_i (i = 1, 2, \cdots, n)$

是线性形式的例子。

满足下列条件的映射β：$R^n \times R^n \to R$ 称为在矢量空间R^n上的双线性形式：

$$\beta(\overline{h}_1 + \overline{h}_2, \overline{p}) = \beta(\overline{h}_1, \overline{p}) + \beta(\overline{h}_2, \overline{p})$$
$$\beta(\lambda \overline{h}, \overline{p}) = \lambda \beta(\overline{h}, \overline{p})$$
$$\beta(\overline{h}, \overline{p}_1 + \overline{p}_2) = \beta(\overline{h}, \overline{p}_1) + \beta(\overline{h}, \overline{p}_2)$$
$$\beta(\overline{h}, \lambda \overline{p}) = \lambda \beta(\overline{h}, \overline{p})。$$

如果$\beta(\overline{i}_k, \overline{i}_l) = \beta_{kl}$，$\overline{h} = (h_1, \cdots h_n)$，$\overline{p} = (p_1 \cdots, p_n)$，则

$$\beta(\overline{h}, \overline{p}) = \sum_{k,l=1}^{n} \beta_{kl} h_k p_l$$

如果$\beta(\overline{h}, \overline{p}) = \beta(\overline{p}, \overline{h})$，则称双线性形式$\beta$是对称的。如果$\beta(\overline{h}, \overline{p}) = -\beta(\overline{p}, \overline{h})$，则称双线性形式$\beta$是反对称的（或称为2－形式）。对于对称双线性形式有$\beta_{kl} = \beta_{lk}$，对于反对称双线性形式有$\beta_{kl} = -\beta_{lk}$。映射q：$R^n \to R$称为矢量空间R^n上的二次形式，如果存在双线性对称形式β，使$q(\overline{h}) = \beta(\overline{h}, \overline{h})$。在坐标下$q(\overline{h})$可用下面公式表示：

$$q(\overline{h}) = \sum_{k,l=1}^{n} \beta_{kl} h_k h_l。$$

二次形式q称为是与双线性形式β相对应的形式。设α和β是在矢量空间R^n上的两个线性形式，2－形式

$$\alpha \wedge \beta: R^n \times R^n \to R$$

称为这两形式的外积，它由下式确定：

$$(\alpha \wedge \beta)(\overline{h}, \overline{p}) = \frac{1}{2}(\alpha(\overline{h})\beta(\overline{p}) - \alpha(\overline{p})\beta(\overline{h}))$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \alpha(\overline{h}) & \alpha(\overline{p}) \\ \beta(\overline{h}) & \beta(\overline{p}) \end{vmatrix}$$

设M是空间R^3中的任意点，偶$(M, \overline{h})$称为R^3在点M处的切矢量，这里$\overline{h}$是R^3中的任意矢量。切矢量$(M, \overline{h})$能够表示为点的这样的有序点对(M, N)，使对应于点对的矢量与$\overline{h}$一致（即$M + \overline{h} = N$），而作为矢量$\overline{h}$已被放到点M处。R^3在点M处的所有切矢量的集合$T_M R^3 = \{(M, \overline{h}) | \overline{h} \in R^3\}$称为切矢量空间。对$R^3$中矢量的运算，可根据下面原则转到同一点的切矢量上：

$$(M, \overline{h}) + (M, \overline{P}) = (M, \overline{h} + \overline{P})$$
$$\alpha(M, \overline{h}) = (M, \alpha\overline{h})$$
$$(M, \overline{h}) \cdot (M, \overline{P}) = \overline{h} \cdot \overline{P}$$

关于这些运算T_MR^3是一个欧几里德矢量空间。而矢量$(M, \overline{i})$、$(M, \overline{j})$、$(M, \overline{k})$构成它的正交基。当切点M明确时，切矢量$(M, \overline{h})$能简单地用$\overline{h}$来表示。

在R^3（或它的某个子集）的每个点指定R^3的一个切矢量，就称为R^3（或R^3的某个子集）上的矢量场。

矢 函 数

设U是空间R^m的某个点集，使每个点$(u_1, u_2 \cdots u_m) \in U$映到矢量$\overline{r}(u_1, u_2, \cdots, u_m) \in R^n$的映射

$$\overline{r}: U \to R^n \qquad (2)$$

称为m个数量变量的矢函数。确定一个矢函数相当于确定n个数量函数（称为它的分量）：

$$\overline{r}(u_1, u_2, \cdots u_m) = (x_1(u_1, u_2, u_m), \cdots, x_n(u_1, \cdots u_m))。$$

设矢函数$\overline{r}$定义在点$M_0 \in R^m$的某个邻域中，或许除点M_0本身以外，此外，$\overline{a}$是某个固定的矢量，如果对于$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使

$$0 < |MM_0| < \delta \Longrightarrow |\overline{r}(M) - \overline{a}| < \varepsilon,$$

则矢量$\overline{a}$称为矢函数$\overline{r}$的极限，并记为$\overline{a} = \lim\limits_{M \to M_0} \overline{r}(M)$。

定义在点M_0的某个邻域中的矢函数(2)称为在该点是连续的，如果

$$\lim_{M \to M_0} \overline{r}(M) = \overline{r}(M_0)。$$

在一般情况下，对于任意点$M_0 \in U$，如果对点$\overline{r}(M_0)$在R^n内的任何邻域W可求得点M_0在R^m的邻域V，使$\overline{r}(V \cap U) \subset W$，则矢函数（2）称为在点$M_0$是连续的。映射$\overline{r}: U \to V$，这里U是$R^m$的子集，V是$R^n$的子集，称为同胚，如果$\overline{r}$是双射且$\overline{r}$和$\overline{r}^{-1}$均是连续的。

我们考虑定义在直线R的开集上的矢函数$\overline{r} = \overline{r}(t)$，即一个实变量t的矢函数，如果这矢函数在点t有定义，且存在极限：

$$\lim_{\triangle t \to 0} \frac{\overline{r}(t_0 + \triangle t) - \overline{r}(t_0)}{\triangle t},$$

那么称这极限为已知矢函数在点t_0的导数，并用符号$\overline{r}'(t_0)$或$\frac{d\overline{r}}{dt}(t_0)$表示。这样产生矢函数$\overline{r}'$称它为矢函数$\overline{r}$的导矢函数。$\overline{r}'$的导数称为矢函数$\overline{r}$的二阶导数，$\overline{r}^{k-1}$的导数称为矢函数$\overline{r}$的k阶导数$\overline{r}^k$。具有k阶连续导数的函数属于$C^k$级函数，具有任意阶导数的函数称为$C^\infty$级函数。通常将$C^k$级函数称为光滑的。矢函数$\overline{r} = \overline{r}(t)$的导数$\overline{r}'(t_0)$与使每个$\tau \in R$映到矢量$\tau \overline{r}'(t_0)$的线性映射$\overline{r}'(t_0): R \to R^n$能够同样看待，这个映射满足等式：

$$\lim_{\triangle t \to 0} \frac{|\overline{r}(t_0 + \triangle t) - \overline{r}(t_0) - \triangle t \overline{r}'(t_0)|}{|\triangle t|} = 0。$$

通常称这个线性映射$\overline{r}'(t_0): R \to R^n$为微分，并记为

$$d\overline{r}_{t_0}=\overline{r}'(t_0)dt。$$

定义在线段$J=[\alpha,\ \beta]$上的矢函数$\overline{r}=\overline{r}(t)$称为光滑的，如果存在定义在包含线段J的区间$I=]a,\ b[$上的光滑矢函数$\overline{\rho}=\overline{\rho}(t)$，使$\overline{\rho}|_J=\overline{r}$。

对属于C^k级的一个实变量的矢函数$\overline{r}$有台劳公式：

$$\overline{r}(t+\triangle t)=\overline{r}(t)+\triangle t\,\overline{r}'(t)+\frac{(\triangle t)^2}{2!}\overline{r}''(t)$$

$$+\cdots+\frac{(\triangle t)^k}{k!}(\overline{r}^{(k)}(t)+\overline{\varepsilon}(t,\ \triangle t)),$$

其中$\lim\limits_{\triangle t\to 0}\overline{\varepsilon}(t,\ \triangle t)=\overline{0}$。

现在考虑定义在变量为u，v的R^2的子集上的矢函数(2)，这个函数在点$(u_0,\ v_0)$的偏导数由下列方式确定：

$$\partial_u\overline{r}(u_0,\ v_0)=\overline{r}_u(u_0,\ v_0)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{r}(u_0+h,v_0)-\overline{r}(u_0,v_0)}{h}$$

$$\partial_v\overline{r}(u_0,\ v_0)=\overline{r}_v(u_0,\ v_0)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{r}(u_0,\ v_0+h)-\overline{r}(u_0,\ v_0)}{h}$$

$$\partial_{uu}\overline{r}=\overline{r}_{uu}=\partial_u(\overline{r}_u),\quad \partial_{vv}\overline{r}=\overline{r}_{vv}=\partial_v(\overline{r}_v),$$

$$\partial_{uv}\overline{r}=\partial_{vu}\overline{r}=\overline{r}_{uv}=\overline{r}_{vu}=\partial_u(\overline{r}_v)=\partial_v(\overline{r}_u)。$$

矢函数$\overline{r}$：$U\to R^n$，$(u,\ v)\mapsto\overline{r}(u,\ v)$，其中U是在$R^2$内的区域，称为在$M_0\in R^n$处可微的，如果存在线性映射$l$：$R^2\to R^n$，使

$$\lim_{|\overline{h}|\to 0}\frac{|\overline{r}(M_0+\overline{h})-\overline{r}(M_0)-l(\overline{h})|}{|\overline{h}|}=0。$$

在点M_0可微的矢函数在该点是连续的，而线性映射l：$R^2\to R^n$是唯一的且称为矢函数$\overline{r}=\overline{r}(u, v)$在点$M_0$的微分(或导数)，记为$d\overline{r}_{M_0}$。微分$d\overline{r}_{M_0}$可以表示为$T_{M_0}R^2$到$T_{r(M_0)}R^n$内的映射，只需将矢量$\overline{h}\in R^2$看作为$R^2$在点$M_0$的切矢量$(M_0, \overline{h})$，而将矢量$d\overline{r}_{M_0}(\overline{h})=l(\overline{h})\in R^n$看作为$R^n$在点$\overline{r}(M_0)$的切矢量$(\overline{r}(M_0), d\overline{r}_{M_0}(\overline{h}))$。如果矢函数$\overline{\rho}=\overline{\rho}(t)$满足条件$\overline{\rho}(t_0)=M_0$，$\overline{\rho}'(t_0)=\overline{h}$，那么矢量$d\overline{r}_{M_0}(\overline{h})$与矢函数$(\overline{r}\circ\overline{\rho})$的导数$(\overline{r}\circ\overline{\rho})'(t_0)$重合。矢函数$\overline{r}=\overline{r}(u, v)$称为可微的，如果它在U的每一点可微。坐标u和v能够理解为在U上的函数，$u:(u, v)\mapsto u$，$v:(u, v)\mapsto v$。这些函数是可微的，而它们的微分du和dv与切线矢量$(M, \overline{h})$对应，其中$\overline{h}=(h_1, h_2)$，h_1和h_2为相应的数，即$du_M(\overline{h})=h_1$，$dv_M(\overline{h})=h_2$。对微分du和dv的这种表示有公式：

$$d\overline{r}=\partial_u\overline{r}\,du+\partial_v\overline{r}\,dv。$$

对于切矢量$\overline{h}=(h_1, h_2)$，

$$\begin{aligned}d\overline{r}(\overline{h}) &= \partial_u\overline{r}\,du(\overline{h})+\partial_v\overline{r}\,dv(\overline{h})\\ &= \partial_u\overline{r}\,h_1+\partial_v\overline{r}\,h_2。\end{aligned}$$

若$\overline{r}(u, v)=(f_1(u, v), \cdots, f_n(u, v))$，且$M_0=(u_0, v_0)$，则微分$d\overline{r}_{M_0}$可用雅科比矩阵给出：

$$\begin{pmatrix}\partial_u f_1(u_0, v_0) & \partial_v f_1(u_0, v_0)\\ \partial_u f_2(u_0, v_0) & \partial_v f_2(u_0, v_0)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \partial_u f_n(u_0, v_0) & \partial_v f_n(u_0, v_0)\end{pmatrix}。$$

当线性映射由它的矩阵给出时，R^2到R^n内的线性映射空间$\mathscr{L}(R^2, R^n)$可以看作空间R^{2n}，对于可微的矢函数

$\overline{r}=\overline{r}(u, v)$可产生矢函数$d\overline{U}\to R^{2n}$。矢函数$d\overline{r}$在点M处的微分称为矢函数$\overline{r}$在点M处的二阶微分并记为$d^2\overline{r}_M$矢函数$\overline{r}=\overline{r}(u, v)$称为二次可微，如果在U的每一点都存在$d^2\overline{r}$。若$d\overline{r}$是连续的，则称$\overline{r}$为连续可微的（或为$C^1$级的）；若$d^2\overline{r}$是连续的，则为$C^2$级的。这样可逐次确定k阶微分和$C^k$级矢函数。为简便起见$C^k$级矢函数称为光滑的。线性映射

$$d^2\overline{r}_M\colon R^2\to\mathscr{L}(R^2, R^n), \overline{h}\mapsto d^2\overline{r}_M(\overline{h})$$

可看作为按下面规则确定的$R^2\times R^2$到R^n的双线性映射(同样可表示为$d^2\overline{r}_M$)：

$$d^2\overline{r}_M(\overline{h}, \overline{p})=d^2\overline{r}_M(\overline{h})(\overline{p})\text{。}$$

双线性映射$d^2\overline{r}_M$是对称的，而对应它的二次形式通常记为：

$$d^2\overline{r}=\partial_{uu}\overline{r}\,du^2+2\partial_{uv}\overline{r}\,du\,dv+\partial_{vv}\overline{r}\,dv^2\text{。}$$

设U、V是在R^n中的区域，映射f：$U\to V$称为C^k级微分同胚，如果f是双射且与其逆映射f^{-1}均属C^k级的。

曲 线 和 线

设I是在直线R上的区间、线段或半开集。C^k级矢函数$\overline{r}$：$I\to R^3$称为在空间R^3中的C^k级道路(或参数表示的曲线)，并用$(I, \overline{r})$表示。道路$(I, \overline{r})$称为：

1）简单的，如果映射$\overline{r}$是一一的；

2）正则的，如果对于所有内点$t_0\in I$有
$\overline{r}'(t_0)\neq\overline{0}$；