

地下结构有限元法解析

孙 钧 汪炳鑑 编著

同济大学出版社

地下结构有限元法解析

孙 钧 汪炳鑑 编著

同济大学出版社

内 容 提 要

《地下结构有限元法解析》原是一本供隧道与地下建筑工程专业研究生学习和本科高年级学生选修的讲义,在近年以来多次的教学实践中经过了不断的修改和补充,比较系统地介绍了岩土力学与地下结构有限元法分析的计算理论和方法,详细论述了岩土介质的应力-应变本构关系和隧洞工程的各种有限元模型,演引了岩土介质按非线性弹性、弹塑性和粘弹塑性以及与渗流耦合效应等各类问题的有限元法分析公式。在岩土介质和地下结构的动态响应方面,介绍了地震波和爆炸压缩波在地层内传播的有限元法解析,按线性与非线性系统作振动分析的矩阵方法,以及地下结构抗震、抗爆动力问题的有限元法计算。

本书可供有关专业研究生学习和本科高年级学生选习,亦可供从事隧道和地下结构工程的科研和设计人员阅读参考。

责任编辑 杨 健

封面设计 王肖生

地下结构有限元法解析

孙 钧 汪炳镒 编著

同济大学出版社出版

(上海四平路1239号)

新华书店上海发行所发行

常州市武进县村前印刷厂印刷

开本787×1092 1/16 印张 28 字数 716 千

1988年6月第1版 1988年6月第1次印刷

印数1—3000 科技新书目158-293

定价 5.20元

ISBN 7-5608-0034-3/TU·14

目 录

第一章 绪论	(1)
§ 1—1 地下结构计算问题的提出	(1)
§ 1—2 结构分析方法分类和有限元法	(1)
§ 1—3 隧洞与地下结构中的非线性问题	(5)
§ 1—4 非线性问题与动态响应的有限元法解析和应用	(6)
§ 1—5 对有限元解析法的评述和主要研究课题	(10)
第二章 岩土工程中的弹塑性力学基本知识	(13)
§ 2—1 应力	(13)
§ 2—2 应变	(21)
§ 2—3 应力-应变性状类型	(24)
§ 2—4 线性本构关系	(24)
§ 2—5 弹塑性体单向拉伸或压缩下的应力-应变关系	(30)
§ 2—6 屈服条件及常用的屈服准则	(31)
§ 2—7 流动法则	(42)
§ 2—8 加工硬化规律	(44)
§ 2—9 弹塑性矩阵 $[D]_{ep}$	(46)
第三章 土体应力-应变关系模型理论	(51)
§ 3—1 概述	(51)
§ 3—2 土体应力-应变试验与试验曲线	(51)
§ 3—3 土体线弹性模型	(55)
§ 3—4 土体非线性弹性模型	(58)
§ 3—5 土体的弹塑性应力-应变模型	(69)
第四章 岩土应力-应变与时间关系模型理论	(85)
§ 4—1 概述	(85)
§ 4—2 简单的流变元件	(89)
§ 4—3 松弛模型(又称马克斯威尔模型)	(95)
§ 4—4 延迟模型(又称凯尔文或沃伊特模型)	(99)
§ 4—5 一般线性流变体模型	(104)
§ 4—6 弹塑性和粘塑性模型	(114)
§ 4—7 对实际岩土体的力学模型的判断	(121)
第五章 非线性弹性和弹塑性问题的有限元法解析	(124)
§ 5—1 引言	(124)
§ 5—2 线性弹性问题中有限元法综述	(125)
§ 5—3 材料非线性问题 关于结点位移的非线性方程组	(131)

§ 5—4	材料非线性问题的迭代解法	(133)
§ 5—5	材料非线性问题的增量解法	(144)
§ 5—6	应变和应力解析	(148)
§ 5—7	初应力法和初应变法	(149)
§ 5—8	弹塑性问题的增量法解析	(153)
§ 5—9	各种基本计算方法的比较	(158)
§ 5—10	残余应变和残余应力的计算	(160)
§ 5—11	几何非线性问题有限元法解析简介	(161)
第六章	粘弹塑性问题有限元法解析	(163)
§ 6—1	概述	(163)
§ 6—2	粘弹性体的有限元法解析	(163)
§ 6—3	弹-粘塑性体本构方程及有限元法解析	(167)
§ 6—4	粘弹-粘塑性体的有限元法解析	(173)
§ 6—5	粘弹塑性问题的有限元法概括	(175)
§ 6—6	非线性弹性-粘塑性体的有限元法解析	(181)
§ 6—7	不可压缩非牛顿粘性流体的有限元法解析	(184)
第七章	土体非线性分析的特点和土质隧洞工程的有限元法解析	(192)
§ 7—1	土体形变参数的确立	(192)
§ 7—2	土体单元的破坏模式及其修正	(194)
§ 7—3	土体单元破坏后的应力迁移与土体弹性常数的选用	(196)
§ 7—4	接触面单元	(198)
✓ § 7—5	土工分期施工效应	(202)
§ 7—6	土体单元的网格划分	(203)
✓ § 7—7	初始地应力场和隧洞开挖效应	(205)
§ 7—8	土质隧洞非线性有限元法解析的计算模型	(209)
第八章	岩体力学与岩质隧洞工程的有限元法解析	(221)
§ 8—1	岩体的物理-力学特性	(221)
§ 8—2	隧洞岩体力学问题的处理方法	(223)
§ 8—3	岩体的应力-应变关系	(223)
§ 8—4	岩石的强度条件	(224)
§ 8—5	各向异性弹性岩体的分析	(226)
§ 8—6	岩体非线性变形	(232)
§ 8—7	岩体不连续性的模拟	(234)
§ 8—8	软弱夹层和节理裂隙的有限元法解析	(243)
§ 8—9	几种计算模型的拟定	(249)
§ 8—10	工程实例	(253)
第九章	隧洞围岩-支护系统粘弹塑性有限元法解析	(256)
§ 9—1	毛洞围岩粘弹-粘塑性有限元法计算和问题	(256)
§ 9—2	隧洞粘弹塑性有限元法解析的粘性全值初应变法(附算例)	(261)

§ 9—3 大断面地下结构考虑分部开挖施工的粘弹塑性有限元法解析 (附算例)	(266)
§ 9—4 粘性岩土介质考虑流变效应和判别隧洞稳定性的有限元法解析	(285)
第十章 隧洞岩土力学中的渗流与膨胀效应问题	(290)
§ 10—1 渗流计算的基本知识	(290)
§ 10—2 土中渗流的作用力和孔隙水压力	(295)
§ 10—3 有限差分法解板桩支护的渗流场问题	(299)
§ 10—4 有限元法在渗流计算中的应用	(302)
§ 10—5 复合膨胀渗水围岩有压隧洞的有限元法解析(附算例)	(310)
第十一章 连续介质弹性动力分析的有限元法	(325)
§ 11—1 引言	(325)
§ 11—2 虚功原理和有限元法的离散化	(326)
§ 11—3 无阻尼情况下弹性体系的动力平衡方程 质量矩阵	(327)
§ 11—4 无阻尼自由振动 特征值问题	(333)
§ 11—5 有阻尼自由振动	(337)
§ 11—6 任意外扰力作用下强迫振动的解答(振型迭加法)	(342)
§ 11—7 结构物在地震力作用下的解答	(354)
第十二章 有限元法运动方程的时间逐步数值积分	(358)
§ 12—1 数值积分方法概述	(358)
§ 12—2 中心差分法	(359)
§ 12—3 豪鲍尔特法	(362)
§ 12—4 威尔逊- θ 法	(365)
§ 12—5 纽马克方法	(369)
§ 12—6 数值积分法的稳定性和计算精度	(375)
§ 12—7 剩余值加权平均法在时间逐步积分中的应用	(386)
§ 12—8 材料非线性问题的结构有限元法动力分析(对增量运动方程的逐步积分法)	(391)
附 录 1. 杜哈美积分	(405)
2. 剩余值加权平均法	(407)
第十三章 地震波和爆炸波应力传播问题的有限元法解析	(409)
§ 13—1 应力波传播问题简述	(409)
§ 13—2 线性介质的波动方程	(410)
§ 13—3 振动方程的有限元法表达式	(418)
§ 13—4 岩土介质的阻尼效应	(421)
§ 13—5 波传播问题的频率域解法	(426)
§ 13—6 有限域的边界条件	(433)
后记	(437)
主要参考文献	(439)

第一章 绪 论

§ 1—1 地下结构计算问题的提出

地下结构的计算较之一般结构物具有一些主要特点,有如:

1. 地下结构与岩土介质结合成一个连续的或不连续的整体系统,相互作用,共同受力;
2. 岩土介质材料一般呈不均质、各向异性的非线性性态;
3. 通常都处于二维或三维的复杂应力状态,例如隧道衬砌应按平面应变和空间问题计算分析。

以岩质隧道结构按围岩-结构体系的计算为例,具有代表性的一些特征,主要反映在其计算模型中的有:

1. 对新鲜、完整而又坚硬致密的层状岩体,多数情况可将岩体按层理面作为正交各向异性的弹性介质来分析;
2. 对比较松散、破碎而又具有随机分布的细微节理裂隙的软弱岩体,可将岩体作为非线性或弹塑性变形但宏观上仍可视作均匀连续介质来分析。将岩体作为弹塑性介质分析时要求假定在复杂应力状态下的屈服准则与加工硬化条件;
3. 节理裂隙发育丰富的岩体,可作为不可抗拉的介质材料,或有定向大节理、断层、破碎带和软弱夹层,或有其他明显的地质构造缺陷等“间断”特性的岩体,可将其视为不连续介质来模拟。在用有限元法解析时,要求采用专门拟定的特殊的有限单元模型(如夹层单元、节理单元等);
4. 岩体被拉裂或剪断以后,或在高的围压应力下,岩体中塑性流动区的内力将会重分布(内力转嫁、应力迁移)。

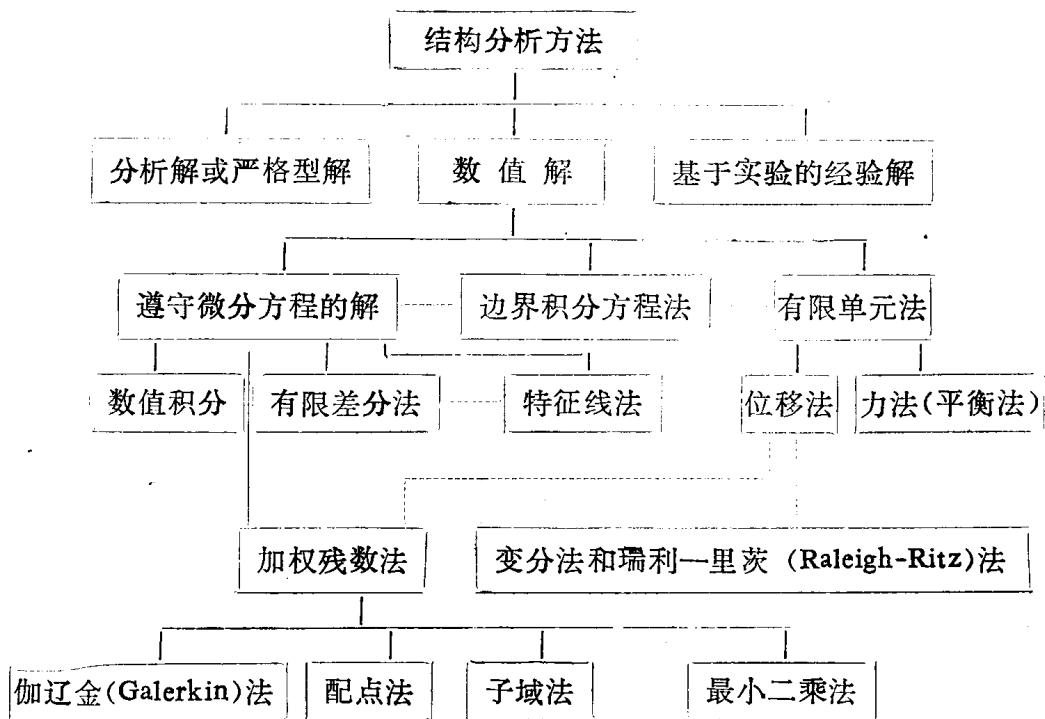
对这类工程实际问题,几乎没有可以处理所有上述复杂因素的经典解析解方案,即使对个别情况有时也能较正确地列出其解析公式,但解题工作十分繁复。例如:经常是一个难于有数学封闭解的高阶微分方程组,采用经典的数学分析解则往往只能是比较浅显的解答;如果改用数值计算,则往往又是几十甚至上百个未知数的线性或非线性代数方程组,利用手算是完全不可能的。所以,在电算出现以前,许多岩土工程计算都不得已要有赖于试验或实测之上的经验公式。

为了反映有限元法在目前解题各方法中的地位,可以回顾一下,从大类看结构分析方法的基本类别,并进而引出有限元解析法,这在下节说明。

§ 1—2 结构分析方法分类和有限元法

一、结构分析方法分类

1. 有严格数学闭合形式解答的解析法,系按古典结构力学和弹塑性力学来求解,如杆



系和板壳等，它能给出结构系统中任一点所要求未知量数值在假定计算条件下的“精确解”。因而，它的解对结构中的所有无限个点都成立，但这种解仅对包含未知数不多的比较简单的问题才是可能的，同时还要取决于荷载、结构外形和边界条件，并一般是线弹性材料。因此，对当前许多复杂的工程实际问题，能够沿用解析解的局限性是十分明显的。

2. 数值解的特点是适用于具有复杂性质的材料(如非线性的应力-应变关系，非均质和各向异性等)、各种边界条件任意荷载情况以及任意结构几何形状等，均可得到与实际情况近似的解，但解答仅限于在结构中各离散点给出未知量的近似的不连续值，并再须按假定的位移模式将其推算到其它任意点。

数值解又可分为微分方程的数值解和矩阵有限单元法两大类。

3. 微分方程数值解中除少数较简单情况可用直接的数值积分方法外，主要是采用有限差分法。这时，微分改由有限差分来代替，即可直接由微分方程导出差分方程。因为有限差分法等不是本书所讲述的内容，对它们的适用条件和限制性评价，可在弹性力学教材中找到，本书不再赘述。

4. 有限单元法数值解，就是在结构中选择一定数量的离散点，将其离散为小的单元的等价系统，这些单元的集合体就代表原来的结构。建立每个组成单元的平衡公式，然后结合起来，再引入边界条件，求解这种整体的平衡方程组，就得到原来结构在离散点处未知量(位移或应力)的解答。注意到有限元分析方法不是从前述的微分方程出发的，而是根据等价于微分方程的积分原理，这种积分原理能以几种不同的方法来建立，其中在有限元中最常用虚功原理和固体力学中的变分法(如最小位能原理)，来得到每个结点的平衡方程组。最小位能原理可简述为：在荷载作用下，将结构的总位能 Π 用(1)由于受力变形而贮存在结构内的应变能 U ，和(2)外荷载位移的位能 W_P 的两者之和来表示，则在结构处于静力平衡状态时，这个总位能应该为极小值，即：

$$\Pi = U + W_p \quad (1-1)$$

$$\delta \Pi = 0 \quad (1-2)$$

从 $\delta \Pi = 0$ 就能列出表达每个结点处荷载-位移关系的平衡方程,从而解出结点未知位移,再进而求出各单元的应力和应变。

二、结构分析的物理假设

为了要说明两种基本不同的有限元模型(即位移型和力型),先要说一下结构分析的三条基本的物理假设:

1. 运动(指变形状态)协调性,即指要满足位移连续条件(变形协调)、边界条件和应变与位移间的几何条件;
 2. 静力协调性,即指从外荷载-内力-位移间的关系,建立符合静力平衡条件的方程式组;
 3. 满足描述岩土介质性态应力-应变关系的本构定律*。
- 经典的结构分析的微分方程正是根据以上三者来建立的。

三、位移型、平衡型、混合型和杂交型有限元法的计算特点

位移型的有限元法是建立在满足各单元内部及其边界上的上述运动协调条件的位移函数或变形模式的基础上的。矩阵位移法保证在任何地方均满足这种运动协调性,但只保证在结点处保持静力协调性(力的平衡条件)。另一方面,在平衡型或称矩阵力法中,则建立在满足各单元内部和边界上任何地方的力的平衡或静力协调条件的应力状态的基础上,但只是在结点处才保持运动的协调性。此外,在矩阵位移法中,所形成的是刚度矩阵,并对给定的载荷条件下求出作为基本未知量的结点位移;而在矩阵力法中,所形成的是柔度矩阵,此时内力是待定的基本未知量。从这两种基本解法派生出来的还有另外两种类型的解法,即混合型和杂交型。在混合法中,为了计算便速,对各个不同部分分别对待,区别以某些位移和某些内力(或应力)作为未知量。而在杂交法中,则采用在单元内部为协调的位移模式,而在单元边界上则另改用平衡的内力;或反之,采用单元内部平衡的应力场和协调的边界位移。

由于位移法在计算机上更容易实现复杂问题的系统化,而便于用电算来求解,并易于推广到非线性和动力效应等其他方面,故现时位移法更为广泛采用。

从上述可见,有限元解析法在计算概念上的主要优点之一,是可通过类似于对杆系结构一维问题的分析思路(例如力法、位移法及混合法)来求解连续介质力学中较复杂的二维和三维结构的问题。

四、有限元法分析解题的过程

以位移法为例,其解题过程为:

(1) 连续体的离散化。离散化即是将给定的连续体分割成等价的有限单元组合系统,在地下结构分析的许多情况下,要模型化的岩土介质连续体的范围一般是不能明显确定的,可

*: 外力施加于岩土体时,岩土产生应力与应变。在一些岩土体中,应力、应变还与时间有一定关系。这种有关岩土应力、应变与时间的物理量之间的关系的描述,称为岩土本构定律(亦称本构关系或本构方程)。

能要考察在水平和垂直方向上都是无限大或非常大的岩土地层介质。由于实践上的限制，通常引入考察并将其离散化的只是处理这种大连续体中与地下结构物相邻近的有意义的部分围岩；对应力波在地层中传播问题的有限元解析中，因为有复杂的边界效应，而建议人为地设置边界阻尼等处理方法；

(2) 选择场变量模型(位移模式)；

(3) 按变分法(或虚功原理)推导单元刚度矩阵，形成平衡方程；

(4) 综合整个离散化连续体的代数方程式组：

$$[K]\{\delta\} = \{R\} \quad (1-3)$$

并引入几何边界条件，在结构的边界处位移是给定的。并按此适当修改上述方程；

(5) 解算结点场变量矢量(单元结点的未知位移)；

(6) 由结点场变量幅度矢(结点位移)计算单元合量(单元的应变和应力)。

在计算方法方面，本书将重点介绍非线性平衡方程、特征值和特征向量以及动态响应等非线性性和动力问题的一些解法。

五、有限元解析法对电算技术的依赖

有限元数值解有可能使分析过程简化，但要求处理的数据是大量的线性或非线性代数量。人工手算是不可能的，需要依赖于电算，并使之能系统化地编成大型通用源程序或专用程序，再按输入数据，通过运算将要求的未知量一次输出。所以，有限元发展的背景是高速、大型电子数字计算机的发展，使这种数值分析方法得以在近十多年来的工程计算中得到特别广泛的采用。

六、有限元法解题的特点

1. 单元间位移的连续分布是靠假定合理的位移模式，形函数的选择是十分重要的一步，必须要求这种位移函数的一阶导数甚至高阶导数在单元之间都是连续的；

2. 选择一些很成功的单元型式，能给出收敛较快而较精确的逼近值，同时，这些近似值又要是很稳定的(特别在动力问题中)。只要增加单元参数的个数，改进单元的可能性是非常多的。有如采用等参数的概念，在由完全三维连续介质降阶得出曲面壳体元素即为一例；

3. 通过引入虚功原理或采用变分(求二次泛函的极值问题)对总位势作近似的极小化——类似于过去习用的瑞利-里茨方法，能便于推导得出单元的刚度矩阵；

4. 对不规则边界条件的拟合，由于有限元方法的积分形式，改进了边界条件逼近，而这用有限差分方法是做不到的。在有限元分析方法中，几何边界条件易于通过对离散化方程进行一些修正来规定，而自然边界条件则不必考虑。但如用有限差分法，则不仅要分别专门处理每一种边界条件，而且在如靠近曲线边界处要求建立精确的差分算子也是非常困难的；

5. 不论边界条件如何，用有限元法离散化的矩阵总是对称的，便于电算。此外，在平衡方程中，刚度系数矩阵 $[K]$ 是带状矩阵或至少是稀疏矩阵，使其解算很易用线代数中的直接法或迭代法得出。

进行固体力学三维问题有限元分析不仅复杂，也更费时费钱，在一般隧洞岩土工程中，考虑到结构系统的几何形状、载荷情况和受力特征，多数可将三维空间问题简化为二维平面应变问题来处理，这在计算上也方便许多。

§ 1—3 隧洞与地下结构中的非线性问题

土 体

(一)土体变形和强度问题的特点。土作为一种应用广泛的工程材料,在地下结构方面土又是参与结构共同作用的介质。研究其变形和强度问题,比之其它建筑材料的困难在于:(1)材料性态上的非线性和非弹性;(2)各种土体的物理-力学性质不同,是非均质的;(3)非各向同性的。土的变形模量及强度与应力水平和应力路径有关。

为了计算地下结构物的位移和应力,不管是在天然土体自重静压力、地下水压力和地震波与爆炸波压力作用下,都要求首先了解在该处土的非线性和非弹性的应力-应变关系(本构关系),然后从土的应力水平和应力路径用假拟的屈服模型来进行后述的非线性的静、动力分析。

(二)过去把土体变形和土体强度孤立考虑而分别计算。一类问题是:计算土体的变形和位移按线性解答;另一类问题是计算引起土体破坏或屈服的破坏强度或失稳的荷载和应力——理想刚塑性解答。

关于土的工程特性方面的研究,过去着重于:

1. 探讨土的抗剪强度(通过三轴或直剪试验来研究土体稳定和土体计算);
2. 通过用单向固结仪等来测定土的变形模量,估算地基沉降与土体位移。但是,对土的应力-应变关系问题过去却注意得很少,认识也很肤浅。这是由于当时只是靠用数学解析法来计算土的应力和应变,把土作为线弹性体计算已较复杂,不可能再考虑用其它更符合实际的模型来求解。同时,没有按土体属性从试验或实测得出反映其受力特色的本构关系。

(三)六十年代后半期开始,由于设计技术的发展,应用大型数字计算机解决土工问题,使有可能采用非线性弹性的、以至弹塑性的土的应力-应变关系式。于是可以说,最近15~20年间在研究土的变形和强度特性以及土体稳定方面有了新的突破,过去人为分割开考虑的土体变形和强度问题,现在结合起来研究了。这方面主要包括以下新的内容:

1. 土体弹塑性应力-应变模型理论;
2. 按与土体本构关系相适应的各计算参数的试验测定;
3. 非线性问题计算方法和计算机技术在土工中推广应用;
4. 原位观测。

(四)土体非线性变形性态受到以下因素的影响:颗粒结构与组成、孔隙比、密度、土体固结(压密)度、应力水平和应力历史、载荷特性、加荷过程(应力路程)和渗流压力及其运动,以及与时间有关的粘性和流变效应等等。

(五)土工问题研究的发展动向:把对土体现状的研究加以与之适应的近代计算技术。当今分析土的变形和稳定问题的中心课题在于根据较严格的土体材料非线性的应力、应变和强度特性的研究,建立普遍的本构关系式来进行电算,应着重考虑到土的应力-应变要通过土体本身的本构关系式互相制约。近年来,对土的流变特性研究也很活跃,把对土体性状的研究,加以与之相适应的近代计算技术,它代表着土工问题研究的发展动向。除由于土体材料非线性应力应变关系引起的物理非线性问题之外,对在深层受大的地压作用下和在强力压缩波传播作用时土体动力性能的研究中,可能还有与由于大变形引起的几何非线性相综合的最

一般性的非线性问题。

岩 体

(一)岩体材料的非线性特性除和土体非线性相仿以外, 还要包括: 地质特征(如断层、裂隙、节理、岩脉、褶皱和夹层、破碎带, 以及其它地壳构造缺陷等); 岩体天然状态(地壳造山运动)引起的地壳构造应力(初始应力场); 区域构造应力场(与地震有关)和构造运动分析。

(二)岩体力学方面课题主要的有:

1. 建立模拟真实地质体的力学模型, 即给出应力-应变本构关系。反映在①原岩地应力场; ②各向异性、不抗拉节理裂隙及其它地质结构面产状; 和③岩体介质应力-应变呈非线性关系;

2. 隧洞开挖后沿周边围岩产生应力扰动区, 因“开挖效果”使应力释放, 形成二次应力场, 并可能存在塑性破坏区;

3. 深层岩体有明显的塑性变形性质;

4. 地质体因时间因素引起的粘性反应, 包括岩体应力松弛和蠕变;

5. 在急骤的地壳构造运动中(例如地震), 岩石呈复杂不定的非稳定性质。在地震波和爆震波的传播过程中, 由于岩体应力变化比较快, 岩石的力学反应有时接近于脆弹性。

§ 1—4 非线性问题与动态响应的有限元法解析和应用

有限元法被辛凯维兹(O.C.Zienkiewicz)、阿古律兹(J·H·Argyris)等人迅速地 from 航空、结构力学推广到非结构领域和非线性岩土工程, 经康斯坦丁诺(C·J·Costantino)、克诺夫(R·W·Clough)等人应用于波传播问题和结构动态响应方面。所有这些与地下结构静、动力分析都有最直接的关系。

一、有限元法的适用范围

将有限元方法应用于材料(包括岩土介质)服从线性本构关系的线性问题, 其分析计算比较简单, 因为材料的参数这时是常数(E 和 μ 在岩土工程中常改为剪切模量 G 和体积变形模量 K)。此时, 为了得到某一给定的载荷情况下的结果, 只须要应用一次求解过程即得。然而, 有限元法也同样适用于非线性弹性和弹塑性问题。这就首先关系到建立有限元公式时用到的非线性材料性态——即非线性应力-应变本构关系的描述。和在岩土工程与结构工程的静力问题中一样, 有限元数值分析方法也是求解这一领域中波动力学与结构系统动力响应方面的有力手段。

二、地下结构静、动力有限元分析

(1)非线性(非线性和弹塑性材料性态)和粘弹塑性岩土力学与工程问题; (2)应力波在岩土介质(地层)内的传播(波动力学); (3)地下结构动态响应(结构动力学)等。

三、非线性问题的分类

(一)单纯的材料非线性, 或称物理非线性——是指结构材料或岩土介质的非线性和非弹

性状态,但仍为无限小应变和小位移。所以,它只构成 $\{\sigma\}=[D(\epsilon)]\{\epsilon\}$ (物理方程)和 $[K(\delta)]\{\delta\}=\{R\}$ (力平衡方程)的非线性;但 $\{\epsilon\}=[B]\{\delta\}$ (几何方程)仍然是线性的。

例如,结构弹塑性分析(指结构材料屈服后的状态)就是一种典型的材料非线性问题,又岩土介质中的地下结构静、动力分析一般也可归属于这一类。

(二)几何非线性——指结构几何形状的变化为大位移(包括线位移和角位移)、小应变,小位移、大应变,大位移、大应变等情况。这时须考虑应变-位移方程(几何方程)中的高阶项。如某一点处的应变分量与位移分量间的关系为:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \text{更高次项}$$

.....
.....

(线性项)
(高次项)

.....
.....

(1-4)

和

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

.....
.....

(线性项)
(高次项)

.....
.....

在上述几何非线性问题中,一般地应力尚保持在弹性范围,即物理方程仍为线性。如弹性薄板的大挠度分析,以及压杆(柱、拱)和板壳在弹性屈曲后的稳定问题等都是。

(三)还有包括材料非线性和几何非线性两类综合的最一般的非线性问题,如板壳的弹塑性屈曲非线性分析,以及软弱土体在弹塑性爆炸压缩波作用下的动力响应。

四、材料线性与非线性问题的本构关系简述

对于数值计算来说,通常有两种方法将由试验导出的非线性应力应变关系引入有限元分析。其一是直接应用表格或数字形式,通过适当插值便能得到可变的材料参数;其二是将试验得出的应力-应变曲线用适当的数学函数或样条函数来表示,在这种函数中通过用各应力参数表示的应力状态来得到非线性分析的材料参数。

线性问题的应力-应变曲线和结点力-位移曲线如图 1-1 所示。

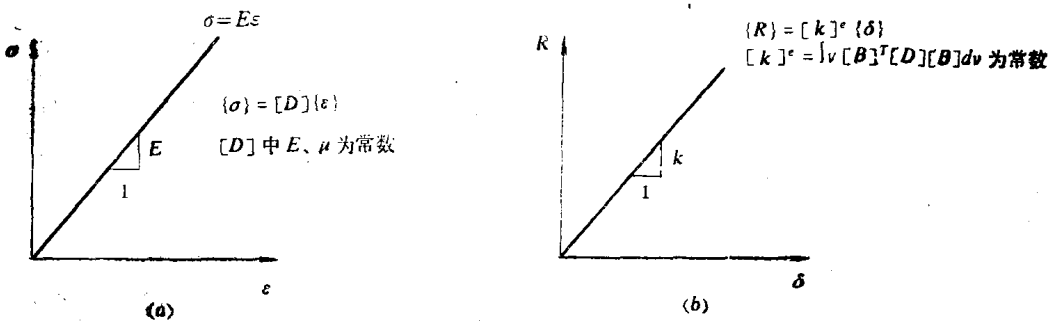


图 1-1 线性问题的应力-应变曲线和结点力-位移曲线

而材料非线性的应力-应变曲线和结点力-位移曲线如图1-2所示。

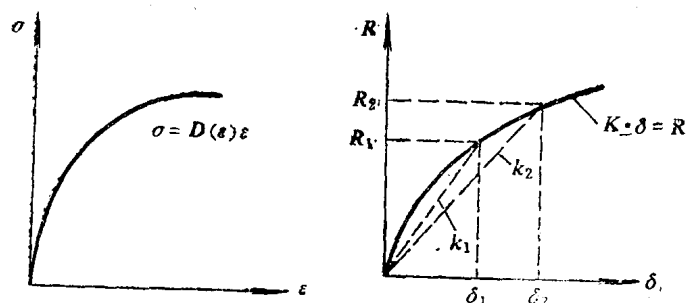


图 1-2 材料非线性的应力-应变曲线和结点力-位移曲线

五、材料非线性问题的解算方法简述

1. 用全部载荷一次加载的直接迭代，直到最终的平衡状态(全量理论)。
2. 用分级加载的增量並分段线性化的方法(增量理论)——可反映结构加载 路径 或应力历史的分段加载。

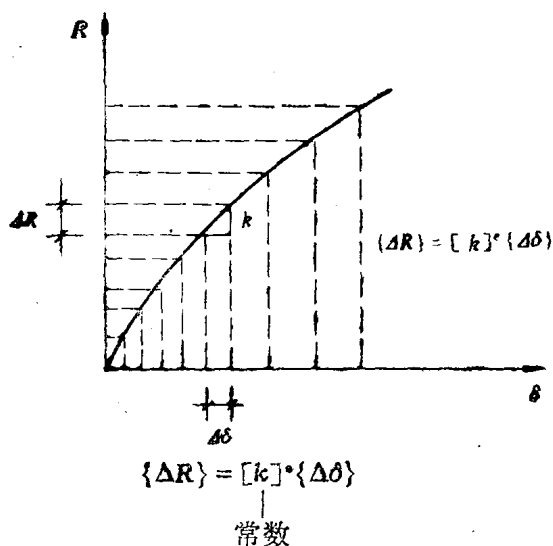


图 1-3 分级加载的增量法

由于在非线弹性性态中，材料参数与应力状态有关，所以在用于非线性弹性分析的增量法中，需要对每一级载荷增量都单独进行一次求解过程，也即是在施加每一载荷增量的分段期间将材料非线性弹性性态近似地表示成分段线性的，而对不同加载分段的增量则采用不同的材料性质。这样，线弹性性态的原理在此处各个小的增量分段范围内也适用(如图1-3所示)。

对于弹塑性材料，在比例极限前，可以利用线弹性分析的公式；在比例极限到屈服点之间，材料表现为非线性弹性性态，可以沿用上述的分段线性来近似；但对于应力超过屈服点以后的塑性性态，有必要确定屈服

准则(对复杂应力状态)和说明屈服后材料性态的流动规律及硬化条件。同时，此后应力-应变已不再是单值的对应关系，要设法处理好由弹性向塑性过渡等复杂因素，需要另外改用一些修正的分析方法。

以上是静力分析。对有加速度和时间效应的动力问题的解算方法，则应通过下法求解：

1. 振型迭加法——对于线弹性系统的小振幅分析，以及当激起的有重要意义的振型数不多时(例如地震效应)比较适用。先需求解一组特征值问题(固有频率和相应的各阶振型)；
2. 直接逐步积分法——可推广用于非线性问题。对波的传播问题和冲击振动响应，这时动荷作用时间短，而激起的重要振型阶数很多时比较适用。

六、有限元法在隧洞岩土工程与地下结构计算中的应用和举例

1. 有限元法能用于工程计算中的各种边值问题和初值问题。结构的边值问题是指：如

需要求出结构中一定范围区域内的解答，而定解条件需要在所考察的该区域的边界上给出，即这时边界处的因变量或其导数的值是给定的。这样，相应的定解问题即称为边值问题。在动态和瞬态问题中，往往还包括有需要在运动初始时刻应满足的初始条件来求出后续运动状态的相应的定解，这就是初值问题。

2. 在隧洞岩土力学和地下结构计算中， 三种主要的边值问题均可应用 有限元数值法求解(见表 1-1)。

表 1-1

1. 平衡或稳态问题	2. 特征值问题	3. 动态或瞬态问题
(1) 属于结构力学和弹塑性力学领域内的内力和应力、应变分析；(在岩土工程中，特别是对二维平面应变问题分析) (2) 隧洞开挖和围岩稳定； (3) 岩土与地下结构相互作用； (4) 隧洞衬砌与地下结构应力与应变分析。	(1) 结构稳定性； (2) 岩土——结构系统自由振动的固有频率和振型； (3) 线性粘弹性阻尼 (结构阻尼)。	(1) 爆炸和地震应力在岩土介质内的传播； (2) 地下结构与岩土及爆炸压缩波的动力相互作用(包括反射与绕射)及结构动态响应； (3) 与时间因素有关的粘性 (蠕变和松弛)与流变问题。

3. 为解决地下结构设计中的 岩土力学课题，多采用与岩土介质材料力学性质相适应的弹性、粘弹性以及塑性理论。但是,即使把土、岩石和岩体的应力-应变关系、屈服条件以及地下结构物的载荷、几何形状和边界条件等假定为理想化的简化情况，能够用于理论分析作封闭形式解答的课题也很有限(例如， 各向同性均匀弹性介质无限和半无限体中的圆形和椭圆形孔洞周边的应力和位移场分布)。过去，为解决分析上的困难,往往套用在适当简化条件下把真实解包含在其上限和下限之间的近似方法：例如在分析地下洞穴的稳定性时，其上限是通过假定在规定的破坏条件下，求总的破坏荷重，而其下限值则是通过研究在满足平衡条件下，进行应力分析求得的变形量或应力值看是否在其规定的容许限值之内。这里，不仅是确定整体破坏条件，对研究发生局部破坏与否，及其塑性区开展等问题也同样非常重要。因而，根本问题是正确地掌握实际岩土介质和结构材料的变形特性、破坏机理，以及实际受力状态下的应力和变形性态。

4. 有限元法的应用， 使对上述根据线弹性解析法的增量形式的逐次计算或 反复迭代计算变得可能。因此，在有限元解析中可以考虑包含材料应力-应变关系的物理非线性，和因大挠度引起的几何非线性、粘性和流变特性，以及塑性屈服条件等各类非线性状态的复杂问题。

无论是考虑弹性、弹塑性或粘性状态， 岩土力学有限元解析 过程几乎都 沿用连续体假定。对没有抗拉能力的节理、定向大节理裂隙等岩体则可模拟为不连续的特殊单元。

七、岩土工程问题有限元分析方法的组成部分

1. 建立描述岩土力学性状的本构模型
分别按线弹性、非线性弹性和弹塑性 本构关系得出如图 1-4 所示的材料本构关系曲线。
2. 测定计算模型所需要的岩土物理、力学参数，如E、 μ 、K、G和 η (粘性系数)等。

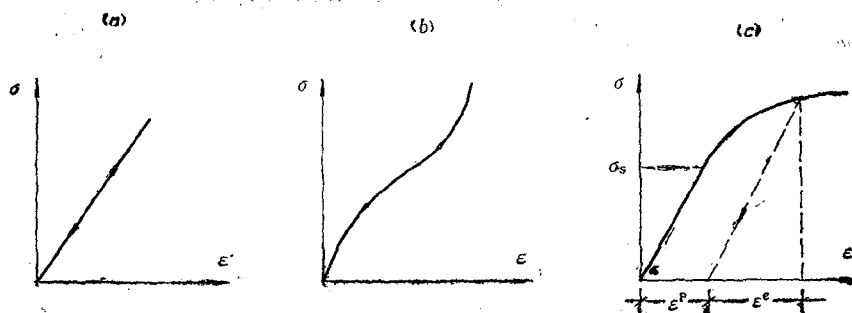


图 1-4 线弹性、非线性弹性和弹塑性本构关系曲线

3. 建立将模型用于解算非线性方程组的有限元解法(主要有增量法、迭代法和混合法)。

有限元法应用于岩土工程的实例,可参见 C.S. 德赛和 J.F. 阿贝尔著的“有限元素法引论” 349~352 页、363~364 页、393~396 页; O. C. 辛凯维兹著的“工程实用岩石力学” 231~250 页, 以及 C.S. 德赛和 J.T. 克里斯琴主编的“岩土工程数值分析方法”的有关章节等。

§ 1—5 对有限元解析法的评述和主要研究课题

在已熟悉矩阵结构力学和弹性力学有限元法的基础上,再结合上面所述,有可能对该方法作出简要的评价,并提出尚待进一步研究的问题。

一、有限元方法主要的基本特点和优越性

1. 适合于分析复杂几何形状连续介质问题。

和其它所有数值近似解(如有限差分法,其他各种变分法和加权残数法)一样,它也是基于离散化概念求得了有限个离散结点处的解,再通过建立场变量模型(位移模式),就可以提供连续体结构系统所有其它各点处的解。但此法不必用分别的插值过程,也不要求适用于整个多维连续体的试探解。

2. 便于引入各种要求的边界条件。

在求得整个集合体系统的代数方程以后,再引入几何边界条件。这时因边界条件不进入单个有限元方程,所以对于内部的和边界上的所有各单元都可采用一个同样的场变量模型。对不同的边界条件,其场变量模型并不要求改变。

3. 能成功地反映各种复杂的材料性质及其不均匀性,因而可考虑计入岩土介质的非均质性。这可通过对岩土各处不同特性的单元分别给定的材料(岩土介质)性质。如果希望对材料特性的变化作更精确的分析,还可以按预先选定的多项式位移模式来改变单个元素内的性质。例如,可把有限元法用于本构关系中各参数或二维介质的厚度呈不连续变化的情况。

这是其它数值方法都难于做到的。

在固体力学方面,包括:各向异性、非线性、弹塑性、应力波传播、动力、滞后、随时间变化或随温度变化的材料(介质)特征——粘弹性、粘塑性和热粘性,均已建立了相应的有限

元型模。

4. 可编制成系统化和通用性的电算程序。

对于某一工程问题编制的程序，往往不必修改(如由非线性改为线性)或小修改(如由平面问题改为轴对称问题)即可成功地通用于不同领域的问题。

5. 易于在不同的学识水平上学习、掌握和运用计算技术。

在弹塑性力学方面，多数是可借用结构力学(不用变分法)一维杆系统的概念(杆系结构位移法)来解决连续体和非线性(将其分段线性化)问题。它也不必求导难以理解的高阶微分方程。

二、有限元方法使用上的局限性和困难

1. 对一些复杂现象的问题，目前尚未能满意地解决。

在固体力学领域中，如裂纹与断裂性态、接触问题、复合材料的胶结破坏、加工软化材料的非线性性态、以及波动或瞬态问题的数值解等。

2. 要求建立与计算方法相适应的本构定律和测定符合实际的各有关材料性参数。有如岩土非线性材料参数的测定，并由试验求得材料非线性的应力-应变关系等。目前对材料性态的认识和解决手段仍落后于分析方法的进展。

3. 对高效的通用性强的计算程序，都需要有庞大的计算机内存和较长的运算时间，这就要求大容量、高速数字计算机，并耗用较多的计算费用。三维空间问题等参数元素、非线性动力问题等的大型通用程序还比较少见。此外，为供基层单位实际采用，要求编绘实用图表、曲线来充分利用现成的分析成果，这在目前也是一个问题。

4. 网格划分和输入数据容易出错，不易检查，并要结合经验判断。当前，程序编制、校核以及电算程序的工作量大，还不易实现全盘自动化。

5. 要进一步改进计算模型，完善计算方法，使程序更为合理并扩大应用范围。

三、目前有待进一步研究的课题

1. 研究如何引入合乎实际的材料参数及其应力-应变本构关系。

真实材料，特别是岩土介质的性态往往是十分复杂的，带有其固有的可变性和不确定性。它受到材料的物理性质、荷载大小与性质、温度、时间、加载速率以及材料在本次受力以前的应力历史和加载(应变)路径等各种因素的综合影响。通过对材料模拟实物和对岩土模拟其天然产状中所有的重要因素与条件，进行现场或实验室测试，从而精心地导出其本构关系。本构模型的精确程度在根本上决定了分析结果的逼真程度。

2. 在最一般性的非线性(材料与几何两方面之综合)静力问题和动力问题分析中，要开展研究合理的解题方法和建立相应的计算公式。

3. 在计算技术和程序设计方面要更进一步改进计算模型和计算技术。在使程序更为先进合理方面，包括：

- (1)离散元素网格分割过程自动化；
- (2)数据的简易处理方法；
- (3)有效的大型通用源程序，使其通用性更强，并更有效地扩大应用范围，节约计算时间；